This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

4 Soc 1726.9

Harvard College Library

FROM THE BEQUEST OF

JOHN AMORY LOWELL,

(Class of 1815).

This fund is $20,000, and of its income three quarters shall be spent for books and one quarter be added to the principal.

8 Jul., 1897 – 14 May, 1898.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

NEUNUNDVIERZIGSTER BAND.

1897.

MIT ZWEI TAFELN UND DREIZEHN FIGUREN.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER.

74 L. Soc. 1726.9

1897, Jul. 8 — 1898, May 14.
Lowell fund

INHALT.

Seite

F. Stohmann, Calorimetrische Untersuchungen. Sechsunddreissigste Abhandlung 1

Otto Staude, Die Gleichung der Ellipsoide und Hyperboloide als Resolvente der biquadratischen Gleichung der gebrochenen Focaldistanzen. Mit einer Figur 75

W. Scheibner, Die gestörte elliptische Bewegung. Hansen's ideale Coordinaten. Mit 4 Figuren 85

Otto Staude, Die algebraische Grundlage der Focaleigenschaften der Paraboloide. Mit 2 Figuren 172

Sophus Lie, Das Abel'sche Theorem und die Translationsmannigfaltigkeiten 184

Friedrich Engel, Ueber lineare homogene Transformationen . . 249

W. Ostwald, Studien über die Bildung und Umwandlung fester Körper. Mit sechs Figuren. 254

Johannes Wislicenus, Die tautomeren Formen des Dibenzoylmethans. 304

Derselbe, Die geometrisch-isomeren Pseudobutylene 307

J. Thomae, Lineare Construction der Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten. 315

Eduard von Weber, Résumé einer Integrationstheorie höherer partieller Differentialprobleme 329

Sophus Lie, Die Theorie der Integralinvarianten ist ein Corollar der Theorie der Differentialinvarianten 342

W. Ahrens, Zur Theorie der adjungirten Gruppe 358

Sophus Lie, Ueber Integralinvarianten und ihre Verwerthung für die Theorie der Differentialgleichungen 369

Paul Stäckel, Anwendungen von Lie's Theorie der Transformationsgruppen auf die Differentialgleichungen der Dynamik. 414

E. Study, Ueber die Invarianten der projectiven Gruppe einer quadratischen Mannigfaltigkeit von nicht verschwindender Discriminante 443

Max von Frey, Beiträge zur Sinnesphysiologie der Haut. Vierte Mittheilung 468

Seite

Johannes Wislicenus, Ueber Bildung carbocyklischer Verbindungen aus 1.3- und 1.6-Diketonen durch Ueberführung in ihre Pinakone 469

Dr. Semi Mayer, Ueber die Function der Protoplasmafortsätze der Nervenzellen. Vorgelegt von P. FLECHSIG, o. M. (Hierzu zwei Tafeln) 475

F. Hausdorff, Das Risico bei Zufallsspielen. Vorgelegt von H. BRUNS, o. M. 497

P. Drude, Zur Theorie der anomalen elektrischen Dispersion und Absorption 549

W. Scheibner, Ueber die formale Bedeutung des Hamilton'schen Princips und das Weber'sche Gesetz 578

Friedrich Engel, Die Zerlegung einer ganzen Function einer Veränderlichen in Factoren ohne vielfache Wurzeln 603

Prof. Lange in Berlin, Ein elementarer Beweis des Reciprocitätsgesetzes. Fortsetzung des Aufsatzes vom December 1896, Seite 629. Vorgelegt von C. NEUMANN, o. M. 607

C. Neumann, Die Anwendung des Hamilton'schen Princips in der Hydrodynamik und Aërodynamik 611

W. Ahrens in Magdeburg, Ueber eine besondere Klasse von Substitutionengruppen. Vorgelegt von S. LIE, o. M. 616

K. Rohn, Ueber den Zusammenhang der von Flächen beliebiger Ordnung auf einer Raumcurve ausgeschnittenen Punktgruppen mit denen ihrer Restcurven 727

Derselbe, Die Raumcurven auf den Flächen IV^{ter} Ordnung . . . 631

J. Hartmann in Potsdam, Ueber den Gang einer mit Riefler'schem Pendel versehenen Uhr von Utzschneider und Fraunhofer. Vorgelegt von H. BRUNS, o. M. 664

Sophus Lie, Liniengeometrie und Berührungstransformationen . . 687

Wilhelm Ostwald, Gedächtnisrede auf FRIEDRICH STOHMANN. . . 744

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Geheimer Hofrath *Otto Ribbeck* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1898.
Geheimer Hofrath *Ernst Windisch* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1898.
Hugo Berger in Leipzig.
Professor *Adolf Birch-Hirschfeld* in Leipzig.
Geheimer Rath *Otto Böhtlingk* in Leipzig.
Professor *Friedrich Carl Brugmann* in Leipzig.
—— *Karl Bücher* in Leipzig.
—— *Berthold Delbrück* in Jena.
—— *Alfred Fleckeisen* in Dresden.
Oberbibliothekar Professor *Oscar v. Gebhardt* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Heinrich Gelzer* in Jena.
Professor *Georg Götz* in Jena.
—— *Albert Hauck* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Max Heinze* in Leipzig.
Professor *Rudolf Hirzel* in Jena.
Oberschulrath *Friedrich Otto Hultsch* in Dresden-Striesen.
Geheimer Hofrath *Christoph Ludolf Ehrenfried Krehl* in Leipzig.
Professor *Carl Lamprecht* in Leipzig.
—— *August Leskien* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Hermann Lipsius* in Leipzig.

Professor *Richard Meister* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *August von Miaskowski* in Leipzig.
—— —— *Wilhelm Pertsch* in Gotha.
Oberschulrath *Hermann Peter* in Meissen.
Professor *Friedrich Ratzel* in Leipzig.
—— *Wilhelm Roscher* in Wurzen.
—— *Sophus Ruge* in Dresden.
—— *August Schmarsow* in Leipzig.
Hofrath *Theodor Schreiber* in Leipzig.
Professor *Eduard Georg Sievers* in Leipzig.
—— *Albert Socin* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Rudolph Sohm* in Leipzig.
Professor *Franz Studniczka* in Leipzig.
—— *Moritz Voigt* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Curt Wachsmuth* in Leipzig.
Professor *Richard Paul Wülker* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Geheimer Hofrath *Lujo Brentano* in München.
Professor *Friedrich Delitzsch* in Breslau.
—— *Georg Ebers* in München.
—— *Friedrich Kluge* in Freiburg i. B.
—— *Theodor Mommsen* in Berlin.
Geheimer Rath *Erwin Rohde* in Heidelberg.
Kirchenrath *Eberhard Schrader* in Berlin.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Hofrath *Johannes Wislicenus* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1899.
Professor *Adolph Mayer* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1899.
Geheimer Medicinalrath *Rudolf Böhm* in Leipzig.
Professor *Heinrich Bruns* in Leipzig.

Geheimer Bergrath *Hermann Credner* in Leipzig.
Geheimer Medicinalrath *Paul Flechsig* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Hans Bruno Geinitz* in Dresden.
Geheimer Rath *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig.
Geheimer Medicinalrath *Ewald Hering* in Leipzig.
Geheimer Rath *Wilhelm His* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Martin Krause* in Dresden.
Geheimer Rath *Rudolph Leuckart* in Leipzig.
Professor *Sophus Lie* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Müller* in Jena.
—— —— *Carl Neumann* in Leipzig.
Professor *Wilhelm Ostwald* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Pfeffer* in Leipzig.
Professor *Karl Rohn* in Dresden.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
Geheimer Rath *Oskar Schlömilch* in Dresden.
Geheimer Hofrath *Rudolf Wilhelm Schmitt* in Dresden.
—— —— *Johannes Thomae* in Jena.
—— —— *August Töpler* in Dresden.
—— —— *Gustav Wiedemann* in Leipzig.
Geheimer Bergrath *Clemens Winkler* in Freiberg.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Wundt* in Leipzig.
Geheimer Rath *Gustav Anton Zeuner* in Dresden.
Geheimer Bergrath *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.

Ausserordentliche Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Professor *Richard Altmann* in Leipzig.
—— *Hermann Ambronn* in Leipzig.
—— *Paul Drude* in Leipzig.
—— *Friedrich Engel* in Leipzig.
—— *Alfred Fischer* in Leipzig.
—— *Otto Fischer* in Leipzig.
—— *Max von Frey* in Leipzig.
—— *Emil Schmidt* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Hofrath *Carl Gegenbaur* in Heidelberg.
Professor *Felix Klein* in Göttingen.
Geheimer Regierungsrath *Ferdinand Freiherr von Richthofen* in Berlin.

Archivar:

Ernst Robert Abendroth in Leipzig.

Verstorbene Mitglieder.

Ehrenmitglieder.

Falkenstein, Johann Paul von, 1882.
Gerber, Carl Friedrich von, 1891.
Wietersheim, Karl August Wilhelm Eduard von, 1865.

Philologisch-historische Classe.

Albrecht, Eduard, 1876.
Ammon, Christoph Friedrich von, 1850.
Becker, Wilhelm Adolf, 1846.
Brockhaus, Hermann, 1877.
Bursian, Conrad, 1883.
Curtius, Georg, 1885.
Droysen, Johann Gustav, 1884.
Ebert, Adolf, 1890.
Fleischer, Heinrich Leberecht, 1888.
Flügel, Gustav, 1870.
Franke, Friedrich, 1871.
Gabelentz, Hans Conon von der, 1874.
Gabelentz, Hans Georg Conon von der, 1893.
Gersdorf, Ernst Gotthelf, 1874.
Göttling Carl, 1869.
Gutschmid, Hermann Alfred von 1887.
Hünel, Gustav, 1878.
Hand, Ferdinand, 1851.
Hartenstein, Gustav, 1890.
Hasse, Friedrich Christian August, 1848.
Haupt, Moritz, 1874.
Hermann, Gottfried, 1848.
Jacobs, Friedrich, 1847.
Jahn, Otto, 1869.
Janitschek, Hubert, 1893.
Köhler, Reinhold, 1892.
Lange, Ludwig, 1885.
Marquardt, Carl Joachim, 1882.
Maurenbrecher, Wilhelm, 1892.
Michelsen, Andreas Ludwig Jacob, 1884.
Nipperdey, Carl, 1875.

Noorden, Carl von, 1883.
Overbeck, Johannes Adolf, 1895.
Peschel, Oscar Ferdinand, 1875.
Preller, Ludwig, 1861.
Ritschl, Friedrich Wilhelm, 1876.
Roscher, Wilhelm, 1894.
Sauppe, Hermann, 1893.
Schleicher, August, 1868.
Seidler, August, 1851.
Seyffarth, Gustav, 1885.
Springer, Anton, 1891.
Stark, Carl Bernhard, 1879.
Stobbe, Johann Ernst Otto, 1887.
Tuch, Friedrich, 1867.
Ukert, Friedrich August, 1851.
Voigt, Georg, 1891.
Wachsmuth, Wilhelm, 1866.
Wächter, Carl Georg von, 1880.
Westermann, Anton, 1869.
Zarncke, Friedrich, 1891.

Mathematisch-physische Classe.

d'Arrest, Heinrich, 1875.
Baltzer, Heinrich Richard, 1887.
Bezold, Ludwig Albert Wilhelm von, 1868.
Braune, Christian Wilhelm, 1892.
Bruhns, Carl, 1881.
Carus, Carl Gustav, 1869.
Cohnheim, Julius, 1884.
Döbereiner, Johann Wolfgang, 1849.
Drobisch, Moritz Wilhelm, 1896.
Erdmann, Otto Linné, 1869.
Fechner, Gustav Theodor, 1887.
Funke, Otto, 1879.
Hansen, Peter Andreas, 1874.
Harnack, Axel, 1888.
Hofmeister, Wilhelm, 1877.
Huschke, Emil, 1858.
Knop, Johann August Ludwig Wilhelm, 1891.
Kolbe, Hermann, 1884.
Krüger, Adalbert, 1896.
Kunze, Gustav, 1851.
Lehmann, Carl Gotthelf, 1863.
Lindenau, Bernhard August von, 1854.
Ludwig, Carl, 1895.
Marchand, Richard Felix, 1850.
Mettenius, Georg, 1866.
Möbius, August Ferdinand, 1868.
Naumann, Carl Friedrich, 1873.
Pöppig, Eduard, 1868.
Reich, Ferdinand, 1882.
Scheerer, Theodor, 1875.
Schenk, August, 1891.
Schleiden, Matthias Jacob, 1881.
Schweigrichen, Christian Friedrich, 1853.
Seebeck, Ludwig Friedrich Wilhelm August, 1849.
Stein, Samuel Friedrich Nathanael von, 1885.
Stohmann, Friedrich, 1897.
Volkmann, Alfred Wilhelm, 1877.
Weber, Eduard Friedrich, 1871.
Weber, Ernst Heinrich, 1878.
Weber, Wilhelm, 1891.
Zöllner, Johann Carl Friedrich, 1882.

Leipzig, am 31. December 1897.

Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1897 eingegangenen Schriften.

1. Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Deutschland.

Abhandlungen der Kgl. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. Aus d. J. 1896. Berlin d. J.

Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1896, No. 40—53. 1897, No. 1—39. Berlin d. J.

Kekulé von Stradonitz, Reinh., Ueber Copien einer Frauenstatue aus der Zeit des Phidias. 57. Programm zum Winkelmannsfeste der Archäolog. Gesellschaft. Berlin 1897.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 29, No. 18. 19. Jahrg. 30, No. 1—18. Berlin 1896. 97.

Die Fortschritte der Physik im J. 1890. 1891. 1895. 1896. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 46. 47. 51. 52. Abth. 1—3. Braunschweig 1896. 97. Namenregister zu Bd. 21 (1865) —43 (1887). Bearb. von *B. Schwalbe*. 1. Hälfte. Berlin 1897.

Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin i. J. 1896, No. 6. 7. 1897. Nr. 1—10 (Jahrg. 15. 16). Berlin d. J.

Centralblatt für Physiologie. Unter Mitwirkung der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben. Bd. 10 (Jahrg. 1896), No. 20—26. Bd. 11 (Jahrg. 1897), No. 1—18. Berlin d. J.

Verhandlungen der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 21 (1896/97), No. 1—17. Berlin d. J.

Abhandlungen der Kgl. Preuss. geolog. Landesanstalt. N. F. H. 21—23. Berlin 1896/97.

Jahrbuch der Kgl. Preuss. geolog. Landesanstalt u. Bergakademie zu Berlin f. d. J. 1895. Bd. 16. Berlin 1896.

Beyschlag, Franz, Geognostische Uebersichtskarte des Thüringer Waldes. Hsg. von der Kgl. Preuss. Geolog. Landesanstalt u. Bergakademie. Berlin 1897.

Die Thätigkeit der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt i. d. Z. vom 1. Febr. 1896 bis 31. Jan. 1897. S.-A. Berlin 1897.

Hauck, G., Ueber innere Anschauung und bildliches Denken. Rede, gehalten in d. Aula der Kgl. Technischen Hochschule. — *Rietschel, H.*, Gedächtnissrede zur Feier des hundertsten Geburtstages Kaiser Wilhelms des Grossen. Berlin 1897.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. H. 100. 101. Bonn 1896/97.

Zehnter Jahresbericht des Vereins für Naturwissenschaften zu Braunschweig f. d. Vereinsjahre 1895/96 u. 1896/97. Braunschweig 1897.

Braunschweig im Jahre 1897. Festschrift, den Theilnehmern an der 69. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte gewidmet von der Stadt Braunschweig. Hsg. von *Rud. Blasius*. Braunschweig 1897.

Vierundsiebzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1896. Breslau 1897.

Abhandlungen des Königl. Sächs. meteorologischen Instituts in Chemnitz. H. 2. Leipzig 1897. — Das Klima des Königreichs Sachsen. H. 4. Chemnitz 1897.

Vorläufige Mittheilungen der Beobachtungs-Ergebnisse von zwölf Stationen II. Ordnung in Sachsen. Sept.—Dec. 1896. Jan.—März 1897.

Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. N.F. Bd. 9, H. 2. Danzig 1897.

Codex diplomaticus Saxoniae Regiae. Im Auftrage der K. Sächs. Staatsregierung herausgeg. v. *O. Posse* und *E. Ermisch*. 2. Haupttheil, Bd. 16. Die Matrikel der Universität Leipzig. Hrsg. von *Georg Erler*. Bd. 2. Leipzig 1897.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureaus. Redig. v. *V. Böhmert*. Jahrg. 42 (1896), No. 3. 4. Jahrg. 43. (1897), No. 1. 2. Dresden 1896. 97.

Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftl. Gesellschaft Isis in Dresden. Jahrg. 1896, Jul.—Dec. 1897, Jan.—Jun. Dresden d. J.

Verzeichniss der Vorlesungen und Übungen an der Kgl. Sächs. Technischen Hochschule f. d. Sommersem. 1897. Für d. Wintersem. 1897/98. — Bericht über die Kgl. Sächs. Techn. Hochschule für 1896/97. — Die Bibliothek der Kgl. Sächs. Techn. Hochschule i. J. 1896. Dresden 1897.

Mittheilungen der Pollichia, eines naturwissenschaftlichen Vereins der Rheinpfalz. No. 11. (Jahrg. 54.) [Dürkheim a. d. H.] 1896.

Beiträge zur Geschichte des Niederrheins. Jahrbuch des Düsseldorfer Geschichtsvereins. Bd. 11. Düsseldorf 1897.

Mittheilungen des Vereins für die Geschichte und Alterthumskunde von Erfurt. H. 18. Erfurt 1896.

Sitzungsberichte der physikal.-medicinischen Societät in Erlangen. H. 28 (1896). Erlangen d. J.

Jahresbericht des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a./M. f. das Rechnungsjahr 1895/96. Frankfurt 1897.

Helios. Abhandlungen u. monatliche Mittheilungen aus d. Gesammtgebiete der Naturwissenschaften. Organ des Naturwissensch. Vereins des Reg.-Bezirks Frankfurt. Herausgeg. von *Ernst Huth*. Jahrg. 14, Berlin 1897.

Societatum litterae. Verzeichniss der in d. Publikationen der Akademien und Vereine aller Länder erscheinenden Einzelarbeiten auf d. Gebiete d. Naturwissenschaften. Im Auftrage des Naturwissenschaftl. Vereins für den Reg.-Bezirk Frankfurt herausgeg. von *M. Küttke*. Jahrg. 10 (1896), No. 7—12. Jahrg. 11 (1897), No. 1—6.

Jahrbuch für d. Berg- und Hüttenwesen im Königreich Sachsen auf d. Jahr 1897. Freiberg d. J.

Programm der Kgl. Sächs. Bergakademie zu Freiberg f. d. J. 1897/98. Freiberg 1897.

34. Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde. Giessen 1896.

Verzeichniss d. Vorlesungen auf der Grossherz. Hessischen Ludwigs-Univers. zu Giessen. Sommer 1897, Winter 1897/98; Personalbestand W. 1896/97, S. 1897. — *Behagel, Otto*, Schriftsprache und Mundart. (Rede). — *Krüger, Gustav*, Das Dogma vom neuen Testament. (Programm). — *Stade, Bernhard*, Die Entstehung des Volkes Israel. (Rede). — 40 Dissertationen a. d. J. 1896/97.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrag d. Oberlausitz. Gesellsch. d. Wissensch. herausgeg. von *R. Jecht*. Bd. 73, H. 1, 2. Görlitz 1896/97.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. N. F. Philologisch-historische Classe. Bd. 1. No. 4—8. Bd. 2. No. 1—3. Mathematisch-physische Classe. Bd. 1. No. 1. Berlin 1897.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Cl. 1896, No. 4. 1897, No. 1. 2. Philol.-hist. Cl. 1896, No. 4. 1897, No. 1. 2. Geschäftliche Mittheilungen. 1897, H. 1. Göttingen d. J.

Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule zu Grimma über d. Schuljahr 1896/97. Grimma 1897.

Nova Acta Academiae Caes. Leopoldino-Carolinae germanicae naturae curiosorum. Tom. 65—67. Halis 1896. — Katalog der Bibliothek der Kais. Leop.-Carolin. deutschen Akademie der Naturforscher. Lief. 7. Halle 1896.

Leopoldina. Amtl. Organ d. Kais. Leopoldinisch-Carolinisch deutschen Akad. der Naturforscher. H. 32, No. 12. H. 33, No. 1—11. Halle 1896. 97.

Neue Heidelberger Jahrbücher. Herausg. vom Histor.-philosophischen Vereine zu Heidelberg. Jahrg. 7, Heft 1. Heidelberg 1897.

Verhandlungen des Naturhist.-medicinischen Vereins zu Heidelberg. N. F. Bd. 5, H. 7. Heidelberg 1896.

Programm der Technischen Hochschule zu Karlsruhe f. d. J. 1897/98. — *Bunte, H.*, Wissenschaftliche Forschung und chemische Technik. (Festrede). — *Wislicenus, Hans*, Ueber activirte Metalle (Habilitationsschrift). Leipzig 1896.

Chronik d. Universität zu Kiel f. d. J. 1896/97. — Verzeichniss der Vorlesungen. Winter 1896/97, Sommer 1897. — *Bruns, Ivo*, De schola Epicteti. (Programm). — *Kauffmann, Friedr.*, Philipp Melanchthon. (Rede). — *Krümmel, Otto*, Ueber Gezeitenwellen. (Rede). — *Schirren, C.*, In Memoriam. (Rede). — *Schöne, Alfred*, Ueber die Ironie in der griechischen Dichtung. (Rede). — 89 Dissertationen a. d. J. 1896/97.

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. Hrsg. von der Commission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel und der Biologischen Anstalt auf Helgoland. Im Auftrage des Königl. Minist. für Landwirthschaft, Domänen u. s. w. N. F. Bd. 2, H. 1. 2. Kiel und Leipzig 1896/97.

Schriften des naturwissenschaftlichen Vereins für Schleswig-Holstein. Bd. 11. H. 1. Kiel 1897.

Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 37 (1896). Königsberg 1896.

Sitzungsberichte der naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig. Jahrg. 22, 23 (1895/96). Leipzig 1897.

Jahresbericht des Nicolaigymnasiums in Leipzig für das Schuljahr 1896/97. Leipzig 1897.

Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule zu Meissen von Juli 1896—Juli 1897. Meissen 1897.

Almanach der k. bayer. Akad. d. Wiss. f. d. J. 1897. München d. J.

Hesse, Ludwig Otto, Gesammelte Werke. Hsg. von der math.-phys. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. München 1897.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1896, H. 3. 4. 1897, H. 1. 2. München 1897.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1896, H. 3. 4. 1897, H. 1. 2. München 1896/97.

Achtunddreissigste Plenarversammlung der histor. Commission bei der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bericht des Secretariats. München 1897.

Sitzungsberichte der Gesellschaft für Morphologie und Physiologie in München. Bd. 6. 1890, H. 3. Bd. 7. 1891, H. 1. Bd. 11. 1895, H. 2. 3. Bd. 12. 1896, H. 1—3. Bd. 13. 1897, H. 1. München 1891—97.

24. Jahresbericht des Westfälischen Provinzial-Vereins f. Wissenschaft u. Kunst f. 1895/96. Münster 1896.

Abhandlungen d. Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. Bd. 10, H. 5. Nürnberg 1897.

Jahresbericht d. Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. 1896. Nürnberg 1897.

Anzeiger des Germanischen Nationalmuseums. Jahrg. 1896. — Mittheilungen aus dem Germanischen Museum. Jahrg. 1896.

Mittheilungen des Alterthumsvereins zu Plauen i. V. 9. Jahresber. (1892/93.) Plauen 1893.

Zeitschrift der Historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Jahrg. 11 H. 3. 4. Jahrg. 12, H. 1. Posen 1896/97.

Jahresbericht des Direktors der Kgl. Geodätischen Instituts (zu Potsdam) 1896/97. Berlin 1897.

Publication des Kgl. preuss. Geodätischen Instituts. Die Neumessung der Grundlinien bei Strehlen, Berlin und Bonn. Bearb. von *Fr. Kühnen*. Berlin 1897.

Württembergische Vierteljahrsschrift für Landesgeschichte. Hsg. von der Württembergischen Kommission f. Landesgeschichte. N. F. Jahrg. 5 (1896). 6 (1897). Stuttgart 1896/97.

Tharander forstliches Jahrbuch. Bd. 46, 2. 47, 1. 2. Dresden 1896. Suppl. Bd. 7. 1897.

Die Entwickelung der Staatsforstwirthschaft im Königreich Sachsen. Dresden 1897.

Jahrbücher des Nassauischen Vereins f. Naturkunde. Jahrg. 50. Wiesbaden 1897.

Sitzungsberichte der physikal.-medicin. Gesellschaft zu Würzburg. Jahrg. 1896, No. 1—11. 1897, No. 1. 2. Würzburg d. J.

Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellschaft zu Würzburg. N. F. Bd. 30, No. 6—8. Bd. 31, No. 1—7. Würzburg 1896. 97.

Oesterreich-Ungarn.

Ljetopis Jugoslavenske Akademije znatosti i umjetnosti (Agram). Svez. 11. 1896. U Zagrebu 1897.

Rad Jugoslavenske Akademije znatosti i umjetnosti. Knija 130. 131. U Zagrebu 1896. 97.

Rječnik hrvatskoga ili srpskoga jezika. Izd. Jugoslav. Akad. znatosti i umjetnosti. Svez. 16. U Zagrebu 1896.

Starine na sviet izdaje Jugoslav. Akad. znatosti i umjetnosti. Knija 28. U Zagrebu 1896.

Viestnik Hrvatskoga arkeologičkoga Družtva. N. S. God. 2. (1896/97.) U Zagrebu 1897.

Zbornik za narodni život i obiǧage juznik slavena. Svez. 1. U Zagrebu 1896.

Građa za povjest Kniževnosti hrvatske. Na svijet izdaje Jugosl. Akad. znatosti i umjetnosti. Kniga 1. U Zagrebu 1897.

Magyar. tudom. Akadémiai Almanach 1897. Budapest d. J.

Mathematische u. naturwiss. Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungar. Akad. d. Wissensch. herausgeg. Bd. 13 (1895), H. 2, Budapest 1896.

Értekezések a nyelv-és-széptudományok Köréből. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 16, szám. 8. 9. Budapest 1896.

Értekezések a társadalmi tudományok Köréből. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 11, szám. 12. Köt. 12, szám. 1. 2. Budapest 1896/97.

Értekezések a történeti tudományok Köréből. Köt. 16, szám. 8—12. Köt. 17, szám. 1. Budapest 1896/97.

Archaeologiai Értesitö. A M. T. Akad. arch. bizottságának és av Orsz. Régészeti s emb. Társulatnak Közlönye. Köt. 16, szám. 3—5. Köt. 17, szám. 1—3. Budapest 1896. 97.

Mathematikai és természettudományi Értesitö. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 14, füz. 3—5. Köt. 15, füz. 1. 2. Budapest 1896. 97.

Nyelvtudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 26, füz. 3. 4. Köt. 27, füz. 1. 2. Budapest 1896. 97.

Monumenta Hungariae Historica. Cl. II. Vol. 35. Budapest 1897.

Monumenta comitalia regni Transsylvaniae. Köt. 19. Budapest 1896.

Rapport sur l'activité de l'Académie Hongroise des sciences en 1896. Budapest 1897.

Vogul Népköltési Gyüjtemény. Kiadja a Magyar Tudom. Akad. Köt. 4. Budapest 1896.

Petényli, J. S. v., Pastor roseus L. (S.-A.) Budapest 1896.

Landwirthschaftliche Statistik der Länder der Ungarischen Krone. Im Auftrag der K. Ungarischen Ackerbauministeriums. Bd. 1. Budapest 1897.

Verzeichniss d. öffentl. Vorlesungen an der k. k. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz im Sommer-Sem. 1897. — Uebersicht der akad. Behörden im Studienjahr 1897/98. — Die feierliche Inauguration des Rectors f. 1896/97.

Mittheilungen des historischen Vereins für Steiermark. H. 44. Graz 1896.

Mittheilungen des naturwissenschaftlichen Vereins f. Steiermark. H. 33. Graz 1897.

Anzeiger der Akademie d. Wissenschaften in Krakau. Jahrg. 1896, No. 10. 1897, No. 1—9. Krakau d. J.

Atlas geologiczny Galicyi. Zeszyt 6. Kraków 1896.

Archivum do dziejów literatury i oświaty w Polsce (Wydanictwo Akademii umiejetn. w Krakowie). T. 9. Kraków 1897.

Biblijoteca pisarzáw polskich (Wydanictwa Akad. umiej. w Krakowie). No. 33. W Krakowie 1897.

Rozprawy Akademii umiejetności. Wydziału filologicznego. T. 25. (Ser. II. T. 10.) — Wydz. histor. filoz. T. 33. 34. (Ser. II. T. 8. 9.) — Wydz. matemat.-przyrodn. T. 30—32. (Ser. II. T. 10—12.). W Krakowie 1896/97.

Sprawozdania komisyi fizograficznéj. T. 31. Kraków 1896.

Sprawozdania komisyi do badánia historyi Sztuki w Polsce. T. 6. sesz. 1. W Krakowie 1897.

Burattini, Tit. Liv., Misura universale. W Krakowie 1897.

Mittheilungen des Musealvereines für Krain. Jahrg. 9. Abth. 1—6. Laibach 1896.

Izvestija Muzejskega društva za Kranjsko. Letnik 6. V Ljubljani 1896.

Veröffentlichungen des hydrographischen Amtes der Kais. u. Kön. Kriegs-Marine in Pola. Gruppe III. Relative Schweremessungen durch Pendelbeobachtungen. H. 1. Pola 1897.

Almanach Českе Akademie Cisaře Františka Josefa. Ročn. 7. 1897. V Praze d. J.

Historický Archiv. Čisl. 8. 9. V Praze 1896.

Bulletin international. Résumés des travaux présentés. Classe des scienc. matémat. et naturelles. III. Prague 1896.

Rozpravy Českе Akad. Cís. Františka Josefa. Tříd. I (pro vědy filos., právn. a histor.) Ročn. 5. — Tříd. II (mathemat.-přírodn.) Ročn. 5. — Tříd. III (Philolog.) Ročn. 5. čisl. 1. V Praze 1896.

Věstník Českе Akad. Cís. Františka Josefa. Ročn. 5, Čisl. 1—9. V Praze 1896.

Sbírka Pramenův ka Poznáni literárního života. Skupina druhá. Čisl. 3. V Praze 1897.

Život církevní v čechách. Svaz. 2. Praze 1896.

Palaeontographica Bohemiae. No. 4. V Praze 1897.

Hanuk, J., Život a spisy Václava Bolemira Webeského. — *Kott, F. S.*, Příspěvky k česko-německému slovníku. Svaz. 1. 2. — *Láska, V.*, Vyšší Geodesie. — *Vondrák, V.*, Frisinské památky. V Praze 1896/97.

Jahresbericht der k. böhm. Gesellsch. d. Wissenschaften für das Jahr 1896. Prag 1897.

Spisův poctěných jubilejní cenou Král. česk Společnosti nauk v Praze. Čisl. 7. 8. Praze 1896, 97.

Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften. Math.-naturw. Classe. Jahrg. 1896. I. II. — Philos.-histor.-philolog. Classe Jahrg. 1896. Prag 1897.

Bibliothek deutscher Schriftsteller aus Böhmen. Hsg. im Auftrage der Gesellschaft zur Förderung deutsch. Wissensch., Kunst und Lit. in Böhmen. Bd. 6. *Joh. Mathesius*, Ausgewählte Werke. Bd. 2. Hochzeitspredigten. Hsg. von *Geo. Lösche*. Bd. 7. *Jos. Messner*. Ausgewählte Werke. Hsg. von *Paul Messner*. Wien 1897.

Geologische Karte des Böhmischen Mittelgebirges. Bl. 3. Wien 1897.

Mittheilung der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen. No. 7. Prag o. J.

Uebersicht über die Leistungen des Deutschen Böhmens auf dem Gebiete der Wissenschaft, Kunst u. Literatur i. J. 1894. Prag 1897.

Biermann, G., Geschichte des Protestantismus in Oesterreich-Schlesien. Mit Unterstützung d. Gesellsch. f. Förderung deutsch. Wissensch., Kunst u. Lit. in Böhmen. Prag 1897.

Bericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag über d. J. 1896. Prag 1897.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1896. Jahrg. 57. Appendix 7. 49—52. Jahrg. (1888—94). Prag 1897.

Personalstand der k. k. Deutschen Carl-Ferdinands-Universität in Prag zu Anfang d. Studienjahres 1897/98. — Ordnung d. Vorlesungen im Sommersem. 1897. Wintersem. 1897/98.

Krok, časopis věnovaný veškerym potřebám středního školstva. Roč. 11, Seš. 1—10. V Praze 1897.

Wissenschaftliche Mittheilungen aus Bosnien und der Hercegovina. Hrsg. vom bosnisch-hercegovinischen Landesmuseum in Sarajevo. Bd. 4. 5. Wien 1896/97.

Bullettino di archeologia e storia dalmata. Anno 19 (1896), No. 10—12. Anno 20 (1897), No. 1—11. Spalato d. J.

Marchesetti, Carlo, Flora di Trieste e de suoi dintorni. Publ. del Museo civico di storia naturale di Trieste. Trieste 1896/97.

Anzeiger der Kaiserl. Akad. d. Wissenschaften in Wien. Math.-naturw. Cl. Jahrg. 1896, No. 27. Jahrg. 1897, No. 1—26.

Archiv f. österreichische Geschichte. Hrsg. v. der z. Pflege vaterländ. Geschichte aufgestellten Commission der Kais. Akad. d. Wissensch. Bd. 83, H. 2. Wien 1897.

Denkschriften der Kais. Akad. d. Wissenschaften. Mathem.-naturw. Classe, Bd. 63. Phil.-hist. Cl. Bd. 44. Wien 1896.

Fontes rerum Austriacarum. Oesterreichische Geschichtsquellen hrsg. v. d. histor. Commission d. Kais. Akademie d. Wissensch. Bd. 49. 1. Hälfte. Wien 1896.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Math.-naturw. Classe. Abth. I, II^a, II^b, III. Bd. 105 (1896), H. 1—10. — Philos.-histor. Cl. Bd. 134. 135 (1895. 1896). Wien d. J.

Tabulae codicum manu scriptorum praeter graecos et orientales in bibliotheca Palatina Vindobonensi asservatorum. ed. Acad. Caesar. Vindobonensis. Vol. 9. Vindobonae 1897.

Hubert, Alfr., Geschichte der Gründung und der Wirksamkeit der Kais. Akad. d. Wissenschaften während der ersten fünfzig Jahre ihres Bestandes. Wien 1897.

Mittheilungen der k. u. k. geographischen Gesellschaft in Wien. 1896. Bd. 39 (N. F. Bd. 29). Wien d. J.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. 46, H. 10. Bd. 47, H. 1—9. Wien 1896. 97.

Publicationen für die internationale Erdmessung. Astronomische Arbeiten der k. k. Gradmessungs-Commission. Bd. 8. Breiten-, Azimut- und Winkelbestimmungen. Wien 1896.

Verhandlungen der österreich. Gradmessungs-Commission. Protokoll über die am 21. April 1897 abgehaltene Sitzung. Wien 1897.

Annalen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums Bd. 11, No. 3. 4. Bd. 12, No. 1. Wien 1896. 1897.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 46 (1896), H. 2—4. Jahrg. 47 (1897), H. 1. Wien d. J.

Verhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1896, No. 13—18. Jahrg. 1897, No. 1—8. 11—13. Wien d. J.

Mittheilungen der Section f. Naturkunde des Oesterreichischen Touristen-Club. Jahrg. 8. Wien 1896.

Belgien.

Bulletin de l'Académie d'archéologie de Belgique (IV. Sér. des Annales), II. Partie. No. 28—30. Anvers 1896. 97.

Annuaire de l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1896/97. (Année 62. 63). — Règlements et documents concernant les deux classes. — Notices biographiques et bibliographiques 1896. 4me édit. Bruxelles 1896/97.

Bulletins de l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Année 65—67 (1895—97). III. Sér. T. 29—33. Bruxelles d. J.

Mémoires couronnés et autres Mémoires publ. l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 48, Vol. 1. T. 49. 50, Vol. 2. T. 53. 54. Bruxelles 1895/96.

Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publ. p. l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 54. Bruxelles 1896.

Analecta Bollandiana. T. 16. Fasc. 1—3. Bruxelles 1897.

Annales de la Société entomologique de Belgique. T. 38—40. Bruxelles 1894—96.

Mémoires de la Société entomologique de Belgique. 3—5. Bruxelles 1895/96.

La Cellule. Recueil de cytologie et d'histologie générale. T. 12, Fasc. 1. 2. T. 13, Fasc. 1. Bruxelles 1897.

Dänemark.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i aaret 1897, No. 1—5. Kjøbenhavn d. J.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Hist. og philos. Afd. 6. Række. Bd. 4, No. 3. — Naturv. og math. Afd. 6. Række. Bd. 8, No. 3—5. Kjøbenhavn 1896/97.

Curtze, Maxim., Petri Philomeni de Dacia in Algorismum vulgarem Johannis de Sacrobosco commentarius. Sumptibus Soc. Reg. scientiar. Danicae. Hauniae 1897.

Wessel, Casp., Essai sur la représentation analytique de la direction. Publ. par l'Acad. Roy. d. sciences et d. lettres d. Danemark. Copenhague 1897.

England.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 9, P. 4—6. Cambridge 1897.

Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 16, P. 2. Cambridge 1897.

Proceedings of the R. Irish Academy. Ser. III. Vol. 4, No. 1—3. Dublin 1896. 97.

Transactions of the R. Irish Academy. Vol. 31, P. 1—4. Dublin 1896. 97.

Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Vol. 21, No. 3—5. Edinburgh 1896/97.

Proceedings of the R. Physical Society of Edinburgh. Vol. 13, P. 2. (Session 1895/96.) Edinburgh 1896.

Proceedings and Transactions of the Liverpool Biological Society. Vol. 10 (1895/96). 11 (1896/97). Liverpool 1896/97.

Proceedings of the R. Institution of Great Britain. Vol. 15, P. 1 (No. 90). London 1897.

Proceedings of the R. Society of London. Vol. 60—62, No. 364—384. London 1896. 97.

Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 28, No. 569—608. Vol. 27, No. 535—568. London 1896/97.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. 1896, No. 6. 1897, No. 1—6. London d. J.

Memoirs and Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester. IV. Ser. Vol. 11, P. 2—4. Manchester 1896/97.

Report of the Manchester Museum Owens College for 1896/97. Manchester 1897.

Notes from the Manchester Museum. No. 1—4. Manchester 1896.

Frankreich.

Annales de la Faculté des sciences de Marseille. T. 8. Marseille 1897.

Bulletin de la Société des sciencee de Nancy. T. 14, Fasc. 30. (Année 28. 1895). Paris et Nancy 1896.

Bulletin des séances de la Société des sciences de Nancy. Année 7, No. 1—4.

Bulletin du Muséum d'histoire naturelle. Année 1896. No. 6. Paris d. J.

Comité international des poids et mesures. Procès-verbaux des séances de 1895. Paris 1896.

Comptes rendus des séances de la 2me conférence générale des poids et mesures, réunie à Paris en 1895. Paris 1896.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. 24, No. 8. T. 25, No. 1—7. Paris 1896/97.

Galois, E., Oeuvres mathématiques, publ. sous les auspices de la Société mathématique de France. Paris 1897.

Annales de la Faculté des sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques. T. 1 (1887)—10 (1896). T. 11 (1897), Fasc. 1—3. Paris d. J.

Annales de l'Observatoire astronomique, magnétique et météorologique de Toulouse T. 1. 2. Paris 1880. 86.

Griechenland.

École française d'Athènes. Bulletin de correspondance hellénique. Année 20 (1896), No. 11—12. Année 21 (1897), No. 1—10. Athen, Paris d. J.

Mittheilungen des Kaiserl. Deutschen Archäologischen Instituts, Athenische Abtheilung. Bd. 21, H. 2—4. Bd. 22, H. 1—3. Athen 1896. 97.

Holland.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetenschappen gevestigt te Amsterdam, voor 1896. Amsterdam d. J.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. — Afdeel. Natuurkunde. Sect. I. Deel 5, No. 3—8. Sect. II. Deel 2, No. 4—10. Amsterdam 1896. 97.

Verslagen en mededelingen der Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afd. Letterkunde. III. Reeks. Deel 12. — Register op Reek III, Deel 1—12. Amsterdam 1896/97.

Verslagen van de gewone vergaderingen der wis- en natuurkundige afdeeling der Kon. Akad. v. Wetenschappen. Deel 5. Amsterdam 1897.

Programma certaminis poetici ab Acad. Reg. discipl. Neerlandica ex legato Hoeufftiano indicti in annum 1898. — *Pascoli, Joh.*, Reditus Augusti. Carmen in certamine poetico Hoeufftiano praemio aureo ornatum. Acced. 4 poemata laudata. Amstelodami 1897.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Uitg. door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam. 2. Reeks. Deel 3, St. 2. Amsterdam 1897.

Wiskundige opgaven met oplossingen door de leden van het Wiskundig Genootschap. Deel 7, Stuk 3. Amsterdam 1897.

Revue semestrelle des publications mathématiques. T. 5, P. 1. 2. Amsterdam 1897. — Tables des matières contenues dans les Vol. 1—5 (1893—97). Amsterdam et Leipzig 1897.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. T. 30, Livr. 4. 5. Ser. II. T. 1, Livr. 1—3. Harlem 1896/97.

Huygens, Chr., Oeuvres complètes, publ. p. la Société hollandaise des sciences. T. 7. La Haye 1897.

Archives du Musée Teyler. Sér. II. Vol. 5, P. 3. Harlem 1897.

Handelingen en mededeelingen van de maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden over het jaar 1896/97. Leiden 1897.

Levensberigten der afgestorvene medeleden van de maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. Bijlage tot de Handelingen van 1896/97. Leiden 1897.

Tijdschrift voor Nederlandsche taal- en letterkunde, uitgeg. van wege de Maatsch. der Nederl. Letterkunde. Deel 15 (N. F. 7), Afl. 4. Deel 16 (N. F. 8), Afl. 1—4. Leiden 1896/97.

Nederlandsch kruidkundig Archief. Verslagen en mededeelingen der Nederlandsche Botanische Vereeniging [Leiden]. Ser. III. Deel 1, Stuk 2. Nijmegen 1897.

Verslag van den staat der Sterrenwacht te Leiden 1894—96. Leiden 1896.

Programme de la Société Batave de Philosophie expérimentale de Rotterdam 1897.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectiё-vergaderingen van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetensch., ter gelegenheid van de algem. vergad. gehouden den 30. Juni 1896. Utrecht d. J.

Verslag van het verhandelnde in de algem. vergad. van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetensch., gehouden d. 30. Jun. 1896 en 20. April 1897. Utrecht d. J.

Bijdragen en Mededeelingen van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Deel 18. 's Gravenhage 1897.

Werken van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. III. Ser. No. 7. 8. La Haye, 's Gravenhage 1897.

Onderzoekingen gedaan in het Physiol. Laboratorium d. Utrechtsche Hoogeschool. IV. Reeks. 4, II. 5, I. Utrecht 1896/97.

Italien.

Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. No. 265—288. Firenze 1897.

Atti e Rendiconti dell' Accademia di scienze, lettere ed arti di Acireale. N. S. Vol. 7 (1896). Acireale 1896.

Le Opere di Galileo Galilei. Edit. nazionale. Vol. 6. Firenze 1896.

Atti della Fondazione scientifica Cagnola dalla sua instituzione in poi. Vol. 14. Milano 1896.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere e scienze morali e polit. Vol. 20 (Ser. III, Vol. 14), Fasc. 4. 5. — Classe di scienze matematiche e naturali. Vol. 18 (Ser. III, Vol. 9), Fasc. 2. 3. Milano 1896.

R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Ser. II, Vol. 29. Milano 1896.

Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena. Ser. II. Vol. 12. Modena 1896.

Società Reale di Napoli. Atti della R. Accad. di archeolog., lettere e belle arti. Vol. 18 (1895/96). Rendiconto delle tornate e dei lavori dell' Accad. di archeologia, lettere e belle arti. N. S. Anno 10 (1896). Nov.-Diz. Anno 11 (1897) Genn.-Magg. — Atti della R. Accad. di scienze morali e politiche. Vol. 28. — Rendiconto delle tornate e dei lavori dell' Accad. di scienze morali e politiche. Anno 36 (1896). Napoli 1896. 97.

Atti e Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Padova. N. S. Vol. 12. Padova 1896.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. 10, Fasc. 1—6. T. 11, Fasc. 1—6. Palermo 1896. 97.

Giornale di scienze naturali ed economiche, publ. p. cura della Società di scienze nat. ed econ. di Palermo. Vol. 21 (Anno 1896). Palermo 1897.

Atti e Rendiconti dell' Accademia medico-chirurgica di Perugia. Vol. 8, Fasc. 4. Vol. 9, Fasc. 1—3. Perugia 1896. 97.

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Vol. 4—17 (Filosofia e Filologia, Vol. 8—10). Pisa 1891—95.

Atti della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Memorie. Vol. 15. Pisa 1897.

Processi verbali della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. 10, adunanza del 6. Genn.—Marz. 1897.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Ser. V, P. I. Vol. 2. 3. P. II. (Notizie degli scavi), Vol. 4, Nov.-Diz. 1896. Vol. 5, Genn.-Ottob. 1897. — Rendiconti. Ser. V. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. 5 (1896), II. Sem., Fasc. 11. 12. Vol. 6 (1897) [I. Sem.], Fasc. 1—12. II. Sem., Fasc. 1—11. — Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. 5 (1896), Fasc. 11. 12. Vol. 6 (1897), Fasc. 1—10. — Rendiconto dell' adunanza solenne del 5. Giugno 1897. Roma d. J.

Mittheilungen des Kais. Deutschen Archaeologischen Instituts. Römische Abtheilung (Bollettino dell' Imp. Istituto Archeologico-Germanico. Sezione Romana). Bd. 11, H. 3. 4. Bd. 12, H. 1. 2. Roma 1896. 97.

Atti della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena. Ser. IV. Vol. 8, Fasc. 4—8. Processi verbali delle adunanze 1896, No. 6. Siena 1896. 97.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. 32, Disp. 1—15. Torino 1896/97.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Ser. II. T. 46. Torino 1897.

Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1896 all' Osservatorio della R. Università di Torino. Torino 1897.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Ser. VII. T. 7, Disp. 5—10. T. 8, Disp. 1. 2. Venezia 1896. 97.

Memorie del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Vol. 25, No. 8. Venezia 1896.

Luxemburg.

Publications de l'Institut R. Grand-Ducal de Luxembourg. Section des sciences naturelles. T. 25. Luxembourg 1897.

Rumänien.

Buletinul Societăţii de sciinţe fizice (Fizica, Chimia si Mineralogia) din Bucaresci-România. Anul 5, No. 12. Anul 6, No. 1—4. Bucarescî 1896. 97.

Russland.

Acta Societatis scientiarum Fennicae. T. 21. Helsingforsiae 1896.

Öfversigt af Finska Vetenskabs-Societetens Förhandlingar. 38 (1895—96). Helsingfors 1896.

Fennia. Bulletin de la Société de géographie de Finlande. 12. 13. Helsingfors 1896.

Utschenyja Zapiski Imp. Kasanskago Universiteta. 1885—96. 97. Nr. 1—11. Kasan d. J. — 7 Dissertationen a. d. J. 1896. 97.

Universitetskija Izvěstija. God 36, No. 11. 12. God 37, No. 1—11. Kiev 1896. 97. — *Bunge, N. A.*, Kurs chimičeskoj technologin. Vyp. 3. Kiev 1897.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1896, No. 3. 4. 1897, No. 1. Moscou d. J.

Meteorologische Beobachtungen in Moskau i. J. 1895. — Observations faites à l'Observatoire météorologique de l'Université impér. de Moscou. Avril 1895—Juni 1896.

Bulletin de l'Académie Imp. des sciences de St. Pétersbourg. Ser. V. T. 3, No. 2—5. T. 4—6. 7, No. 1. St. Pétersbourg 1895—97.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. T. 42, No. 14. Sér. VIII. Cl. phys.-mathém. Vol. 1, No. 1—8. Vol. 3, No. 7—10. Vol. 4, No. 2—4. Vol. 5, No. 1—5. Cl. hist.-philol. Vol. 1, No. 3—6. St.-Pétersbourg 1896. 97.

Annalen d. physikalischen Centralobservatoriums, herausg. von *H. Wild*. Jahrg. 1895, Th. 1. 2. St.-Petersburg 1896.

Materialy po Archeologii Rossii. No. 18—20. S. Peterburg 1893—96.

Otčet imp. archeolog. Kommissii za 1894—94. S. Peterburg 1893—96.

Comité géologique, St. Pétersbourg. Bulletins. T. 15, No. 5—9 et Suppl. T. 16, No. 1. 2. — Mémoires. Vol. 14, No. 2—5. St. Pétersbourg 1896.

Trudy S.-Peterburgskago Obščestva estestvoyspytatelej. — Travaux de la Société des naturalistes de St. Pétersbourg. T. 26. Sect. de botanique. Sect. de zoologie et de physiologie. St. Pétersbourg 1896.

Publications de l'Observatoire central Nicolas. Ser. II. Vol. 2. St. Pétersbourg 1896.

Godičnyi Akt Imp. S. Peterburgsk. Universiteta za 8. Feb. 1897. S. Peterburg.

Obozrěnie propodavanija nauk v Imp. S.-Peterburgsk. Universitetě na osenne i vesenne polugodie 1897/98. S. Peterburg 1897.

Zapiski istoriko-philologičeskago Fakulteta Imp. S. Petersburgskago Universiteta. Čast 42. 43. S. Peterburg 1897.

Svod Zakonov Rossiskoj Imperii. T. 3, 14, yest. 1. S. Peterburg 1896.

Vizantijskij vremennik (*Βυζαντινά Χρονικά*), izdavaemyi pri imp. Akad. nauk. T. 3, Vyb. 2—4. T. 4, Vyb. 1. 2. S. Peterburg 1896. 97.

Correspondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga. Jahrg. 39. Riga 1896.

Beobachtungen des Tifliser Physikalischen Observatoriums i. J. 1895. Tiflis 1896.

Schweden und Norwegen.

Bergens Museum. Aarbog for 1896. Bergen 1897.

Sars, G. O. An Account of the Crustacea of Norway. Vol. 1, p. 3—8. Bergen 1897.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1895. 96. Christiania 1895. 96.

Skrifter udgivne af Videnskabsselskabet i Christiania. Math.-naturvid. Kl. 1895. 96. Hist.-filos. Kl. 1895. 96. Kristiania 1896. 97.

Jahrbuch des Norwegischen meteorologischen Instituts für 1893—95. Christiania 1895/96.

Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bind 34 (4. R. Bd. 2), H. 3. 4. Bind 35. (4. R. Bd. 3). H. 1—3. Christiania 1893—95.

Det Kon. Norske Frederiks Universitets Aarsberetning for 1894/95. 1895/96. Christiania 1896. 97.

Den Norske Nordhavens Expedition 1876—78. 23. Zoologi. 24. Botanik. Christiania 1896. 97.

Fauna Norvegiae. Bd. 1. Phyllocarida och Phyllopoda, ved *G. O. Sars.* Christiania 1896.

Rerum Normannicarum Fontes arabici. Ed. *Alex. Seippel.* Fasc. 1. Christiana 1896.

Barth, Justus, Norrønskaller. Crania antiqua in parte orientali Norvegiae meridionalis inventa. (Progr.) Christiania 1896.

Gjelsvik, N., Om skadeserstatning for retmaessige handlinger efter Norske ret. Kristiania 1897.

—— Den Norske privatrets laere om vildfarelsens indflydelse paa retshandlers gyldighed. Kristiania 1897.

Schjøtt, P. O., Samelde philologiske Afhandlinger. (Progr.) Christiania 1896.

Stang, Fred, Om erstatning fort liv. — Om vildfarelse. Kristiania 1897.

Statholderskabets Extraprotokol at Supplicationer og Resolutioner 1642—1652 Udgivn. fra det Norke Rigsarkiv. H. 1. Christiania 1896.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Års-Skrift. T. 32. (1896) I. II. — Festskrift med anledning at Hans Majestät Konung Oscar II:s Regerings-Jubileum 1872—1897; a. u. d. T.: *Tegnér, Elof*, Lunds Universitet 1872—1897. Lund 1897.

Acta mathematica. Hsg. v. *G. Mittag-Leffler.* 20, 3. 4. Stockholm 1897.

Bihang till kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Bd. 22. Stockholm 1897.

Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Ny Följd. Bd. 28. Stockholm 1895/96.

Meteorologiska Jakttagelser i Sverige utg. af kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 34 (Ser. II. Bd. 20). Jhrg. 1892. Stockholm 1897.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Åarg. 53. (1896). Stockholm 1897.

Kongl. Vitterhets Historie och Antiqvitets Akademiens Månadsblad. Årg. 21 (1892). 22 (1893). Stockholm 1893—97.

Antiqvarisk Tidskrift för Sverige, utg. af Kongl. Vitterhets Historie och Antiqvitets Akademien. D. 13, H. 2. 3. D. 15, H. 1. Stockholm o. J.

Astronomiska Jakttagelser och Undersökningar anställda på Stockholms Observatorium. Bd. 5, No. 5. Stockholm 1896.

Entomologisk Tidskrift utg. af Entomologiska Föreningen i Stockholm. Arg. 17 (1896). Stockholm d. J.

Nova Acta Reg. Societatis scientiarum Upsaliensis. Ser. III Vol. 17, 1. Upsaliae 1896.

Bulletin of the Geological Institution of the University of Upsala. Vol. 3, P. I, No. 5. Upsala 1897.

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. Vol. 28 (1896). Upsal 1896. 97.

Eranos. Acta philologica Suecana. Ed. *Vil. Lundström.* Vol. 1, Fasc. 1—4. Vol. 2, Fasc. 1. 2. Upsaliae 1896. 97.

Zoologiska Studier, Festskrift, Wilhelm Lilljeborg tillequand på hans 80de födelsedag af Svenska Zoologer. Upsala 1896.

Schweiz.

Neue Denkschriften der Allgem. Schweiz. Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften. Bd. 35. Basel 1896.

Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Zermatt, 8.—11. Sept. 1895, in Zürich, 3.—5. Aug. 1896. 78. Jahresversammlung. Jahresbericht 1894/95. Sitten 1896. 79. Jahresversammlung. Jahresbericht 1895/96. Zürich 1897.

Compte-rendu des travaux présentés à la 78. et à la 79. Session de la Société Helvet. des sciences naturelles. Genève 1895. 96.

Beiträge zur vaterländischen Geschichte. Hrsg. v. d. Histor. u. Antiquar. Gesellschaft in Basel. N. F. Bd. 4, H. 3. 4. Bd. 5, H. 1. Basel 1896. 97.

20. u. 21. Jahresbericht der Histor. u. Antiquar. Gesellschaft in Basel. Vereinsj. 1894/95. 1895/96. Basel 1895. 96.

Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Bd. 11, H. 3. Basel 1897.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern a. d. J. 1895 u. 1896 (No. 1373—1435). Bern 1896. 97.

Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft Graubündens. N. F. Jahrgang 40 (1896/97). Chur 1897.

Index lectionum in univers. Friburgensi per mens. aest. 1897 et per mens. hiem. 1897/98. Friburgi Helvet. — Université de Fribourg. Autorités, professeurs et étudiants. Sem. d'été 1897. Sem. d'hiv. 1897/98.

Collectanea Friburgensia. Fasc. 6. 7. Friburgi Helv. 1896. 97.

Vierteljahrsschrift d. Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 41. Supplem. Jahrg. 42, H. 1. 2. Zürich 1896. 97.

Serbien.

Srpska kralj. Akademija. Glas. 51. 52. 54. Godišnjak. 9. (1895). — Srpski etnografski sbornik. 1896 — Spomenik. No. 32. — Poslovnik. 1895. Beograd 1896. 97.

Nordamerika.

Annual Report of the American Historical Association for the year 1895. Washington 1896.

Transactions of the American Philological Association. Vol. 27 (1896). Boston d. J.

Journal of the America Oriental Society. Vol. 18, No. 1. 2. Vol. 19, No. 1. New Haven 1897.

Bulletin of the Geological Society of America. Vol. 8. Rochester 1897.

Johns Hopkins University Circulars. No. 128—133. Baltimore 1896. 97.

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. 18, No. 3. 4. Vol. 19, No. 1—3. Baltimore 1896. 97.

American Journal of Philology. Vol. 17, No. 1—4. Baltimore 1896.

American chemical Journal. Vol. 18, No. 7—10. Vol. 19, No. 1—4. Baltimore 1896. 97.

Johns Hopkins University Studies in historical and political science. Ser. XIV, 8—12. Ser. XV, 1—5. Baltimore 1896. 97.

Memoirs of the American Academy of arts and sciences [Boston]. Vol. 12, No. 2. 3. Cambridge 1896.

Proceedings of the American Academy of arts and sciences. Vol. 31—33. Boston 1896. 97.

Proceedings of the Boston Society of natural history. Vol. 27, p. 75—330. Vol. 28, No. 1—5. Boston 1896. 97.

Bulletin of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 28, No. 2. 3. Vol. 30, No. 2—6. Vol. 31, No. 2—4. Cambridge, Mass. 1896. 97.

Memoirs of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 19, 2. Vol. 20—22. Vol. 23, 1. Cambridge, Mass. 1896. 97.

Annual Report of the Curator of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass., for 1895/96. 1896/97. Cambridge, Mass. 1896. 97.

The John Crerar Library. Annual Report. 1. 2. (1895. 96). Chicago 1897.

Field Columbian Museum. Publications. No. 16—20. Chicago 1896. 97.

Cincinnati Museum Association. 16. annual Report. Cincinnati 1896.

Colorado College Studies. Vol. 6. Colorado Springs 1896.

Jowa Geological Survey. Vol. 15. Des Moines 1895. Annual Report for 1895.

The Journal of comparative Neurology. Ed. by *C. L. Herrick*. Vol. 6, No. 3. Vol. 7, No. 1. 2. Granville 1896. 97.

The Proceedings and Transactions of the Nova Scotian Institute of science. Ser. II. Vol. 2, P. 2. Halifax 1896.

Catalogue of the Michigan Mining School. 1894—96. Houghton 1896.

Proceedings of the Indiana Academy of sciences 1894—95. Indianapolis 1895. 96.

The Journal of Physical Chemistry. Vol. 1, No. 2—7. Ithaca 1896. 97.

The Kansas University Quarterly. Vol. 6, No. 3. Lawrence 1897.

University of Nebraska. Bulletin of the Agricultural Experiment Station of Nebraska. Vol. 9, No. 47—49. Lincoln 1897.

Publications of the Washburn Observatory of the University of Wisconsin. Vol. 10, P. 1. Madison 1896.

Memorias de la Sociedad científica »Antonio Alzate«. T. 10, Cuad. 1—4. México 1896. 97.

Report for the year 1896/97, presented by the Board of Managers of the Observatory of Yale University to the President and Fellows. (New Haven o. J.)

Annals of the New York Academy of sciences. Vol. 9, No. 4—12. New York 1896.

Transactions of the New York Academy of sciences. Vol. 15. New York 1895/96.

Bulletin of the American Geographical Society. Vol. 28, No. 4. Vol. 29, No. 1—3. New York 1896. 97.

Bulletin of the American Museum of natural history. Vol. 8. New York 1896.

Annual Report of the American Museum of natural history 1896. New York 1897.

Proceedings and Transactions of the R. Society of Canada. Ser. II. Vol. 2. Ottawa 1896.

Geological Survey of Canada. Annual Report. N. S. Vol. 8 (1895). Maps No. 585—588. Ottawa 1896.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. 1896, P. 2. 3. 1896, P. 1. 2. Philadelphia d. J.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia. Vol. 35, No. 151—153. Vol. 36, No. 154. Philadelphia 1896. 97.

Transactions of the American Philosophical Society held at Philadelphia. N. S. Vol. 19, P. 1. Philadelphia 1896.

Observatorio meteorológico del Colegio del Estado de Puebla. Resumen correspondiente á cada día. Avril. 1896—Jun. 1897.

The Transactions of the Academy of science of St. Louis. Vol. 7, No. 4 —16. St. Louis 1895—97.

Occasional Papers of the California Academy of sciences. 5. San Francisco 1897.

Proceedings of the California Academy of sciences. Ser. II. Vol. 6. Ser. III. Vol. 1, No. 1. 2. 4. San Francisco 1897.

Papers printed to commemorate the incorporation of the University College of Sheffield. Sheffield 1897.

Proceedings of the Canadian Institute. N. S, Vol. 1 P. 1, No. 1. Toronto 1897.

Bureau of Education. Report of the Commissioner of education for the year 1894/95. Vol. 1. 2. 1895/96. Vol. 1. Washington 1896. 97.

14.—16. annual Report of the Bureau of Ethnology to the Secretary of the Smithsonian Institution. 1892/93—1894/95. Washington 1896. 97.

U. D. Department of Agriculture. North American Fauna. No. 3. — Farmers Bulletin. No. 54. — Yearbook of the U. D. Department of Agriculture 1896. Washington 1897.

Smithsonian Miscellaneous Collections. No. 1035. 1038. 1039. 1071—73. 1075. 1077. Washington 1896. 97.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution showing the operations, expenditures and conditions of the Institution to July 1894 and to July 1895. Washington 1895. 96. — Report of the N. S. National Museum f. 1895. 96.

Smithsonian Contributions to knowledge. No. 1034. Washington 1896.

Langley, S. P., Memoir of George Brown Goode 1851—1896. Washington 1897.

Report of the U. S. National Museum f. 1895. Washington 1896.

Bulletin of the U. S. National Museum. No. 47. Washington 1896.

Report of the Superintendent of the N. S. Naval Observatory for 1894. 1897. Washington 1895. 97.

United States Coast and Geodetic Survey. Bulletin No. 36. Washington 1897.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey, showing the progress during the fiscal year ending with June 1895, P. 1. 2. Washington 1896.

17. annual Report of the U. S. Geological Survey to the Secretary of the Interior. 1895/96, P. III. Washington.

Südamerika.

Anales de la Sociedad científica Argentina. T. 42, Entr. 6. T. 43. 44, Entr. 1—5. Buenos Aires 1896. 97.

Boletin de la Academia nacional de ciencias de la Republica Argentina. [Córdoba]. T. 15, Entr. 1—3. Buenos Aires 1896. 97.

Annuario publicado pelo Observatorio do Rio de Janeiro para o anno de 1897. (Anno 13.) Rio de Janeiro 1896.

Archivos do Museu nacional. Vol. 8. Rio de Janeiro 1892.

Verhandlungen des deutschen wissenschaftlichen Vereins zu Santiago Bd. 3, H. 3. 4. Santiago 1896.

Actes de la Société scientifique du Chili. T. 6, Livr. 4. 5. T. 7, Livr. 1—3. Santiago 1896. 97.

Asien.

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 34, Afl. 2—4. Batavia 1896. 97.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 39, Afl. 4—6. Batavia 1896.

Verhandelingen van het Batav. Genootschap van kunst. en wetensch. Deel 48, St. 3. Deel 49, St. 1. 2. Deel 50, St. 2. 3. Batavia, 's Hage 1896. 97.

Nederlandsch-Indie Plakatboek 1602—1811, door *J. A. van der Chijs*. Deel 15. Uitgegeven door het Batav. Genootschap van kunsten en wetenschappen. Batavia, 's Hage 1896.

Dagh-Register, gehouden int Casteel Batavia vant passerendsdaer ter plaetse als over gehad Nederlands-India anno 1668/69. Uitgeg. door het Batav. Genootsch. van kunsten en wetensch. med medemaking van de Nederlandsch-Indische Regeering en onder toetcht van J. A. van der Chijs. Batavia, 's Hage 1897.

Observations made at the magnetical and meteorological Observatory at Batavia. Publ. by order of the Government of Netherlands India. Vol. 18 (1895). Vol. 19 (1896). Batavia 1896. 97.

Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indie. Jaarg. 17 (1895). Jaarg. 18 (1896). Batavia 1896.

Wind and Weather, Currents, Tides and Tidal Streams in the East Indien Archipelago. Publish. by order of the Government of Netherlands India by *J. P. van der Stok*. Batavia 1897.

Die Triangulation von Java, ausgeführt vom Personal des geographischen Dienstes in Niederl. Ostindien. Abth. 5. Im Auftrag des Ministeriums der Kolonien bearb. von *J. A. C. Oudemans*. Haag 1897.

Verbeek, R. D. M. et *Fennema, R.*, Description géologique de Java et Madoura. T. 1. 2. (Text et Atlas) Amsterdam 1896.

Natuurkundige Tijdschrift voor Nederlandsch-Indie, uitgeg. door de Kon. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indie. Deel 56 (Ser. IX, Deel 5). Batavia 1897. — Alphabetisch Register op Deel 1—30, 31—50. ib. 1872. 94.

Journal of the College of science, Imperial University, Japan. Vol. 9, P. 2. Vol. 10, P. 2. Tōkyō 1897.

Annotationes Zoologiae japonensis. Vol. 1, P. 1—3. Tokyo 1897.

Australien.

Proceedings of the R. Society of Victoria. Vol. 8. 9. 10, P. I. Melbourne 1896. 97.

Journal and Proceedings of the R. Society of New South Wales. Vol. 30 (1896). Abstract of Proceedings. Mai—Oct. 1897. Sydney d. J.

Kosmopolan. No. 32—37. Sydney 1897.

2. Einzelne Schriften.

Balawelder, Anton, Abstammung des Allseins. Wien 1894.

Beck, M[l]., Étude experimentale sur l'électro-magnetisme. Paris 1897.

Caspar, F. R., Die Seele des Menschen, ihr Wesen und ihre Bedeutung. Dresden o. J.

Cayley, Arthur, The collected mathematical papers. Vol. 12. 13. Cambridge 1897.

Codex diplomaticus comitum Karolyi de Nagy-Károly. Köt. 5. Budapest 1897.

Comstock, Geo. C., Studies in spherical and pract. Astronomy. J.—A. 1895.

Elezović, F., Carmina. Belgradi 1897.

Fritsche, H., Ueber die Bestimmung der Coefficienten der Gaussischen allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus f. d. J. 1885. St. Petersburg 1897.

—— Observations magnétiques sur 509 lieux faites en Asie et en Europe 1867—1894. ib. 1897.

Ganser, Anton, Das Weltprincip und die transcendentale Logik. Leipzig 1897.

Hanssen, C. J. T., Reform chemischer und physikalischer Berechnungen. Kopenhagen 1897.

Helmert, F. R., Der Einfluss der Elasticität der Pendel bei absoluten Schwere bestimmungen. S.-A. 1897.

Hopkins, Thom. C., The building materials of Pennsylvania. I. s. l. 1896.

Hucke, Jul., Die Geldverrichtungen in der Preis-, Lohn- und Zinsgestaltung. Berlin 1897.

Lamprecht, Guido, Wetterperioden. (Progr.) Bautzen 1897.

Lee, F. J. J., Researches on the evolution of the stellar systems. Vol. 1. Lynn, Mass. 1896.

Lewis, Henr. Carvill, Papers and notes on the genesis and matrix on the diamond. London 1897.

Marcuse, A., Ueber die photographische Bestimmungsweise der Polhöhe. S.-A.

—— Bemerkungen zu dem Bericht der Herren Schnauder und Hecker über die am photographischen Zenithteleoskop erhaltenen Resultate. S.-A.

Ogilvie, Maria M., Microscopic and systematic Study of Madreporian Types of Corals. S.-A. London 1896.

Weinek, L., Ueber das feinere selenographische Detail der focalen Mondphotographien der Mt. Hamiltoner und Pariser Sternwarte. S.-A. 1877.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

C Soc. 1726. 9

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1897.

I. II.

MIT SIEBEN FIGUREN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1897.

Einzelpreis: 2 Mark.

SITZUNG VOM 11. JANUAR 1897.

Vortrag hielt:
Herr **F. Stohmann**, o. M.: Ueber den Wärmewerth der Amide und Anilide der ersten Glieder der Reihe der zweibasischen Säuren.

F. Stohmann, *Calorimetrische Untersuchungen.* Sechsunddreissigste Abhandlung.

Ueber den Wärmewerth der Amide und Anilide der ersten Glieder der Reihe der zweibasischen Säuren

von

F. Stohmann und E. Haussmann.

Diese Arbeit schliesst sich eng an die der Abhandlung XXXIV, welche von der Bildung der Amide und der Anilide der einbasischen Säuren handelt, an. Ihrer Natur nach haben wir hier aber mit weiteren Processen zu thun, insofern, als wir bei den zweibasischen Säuren zwischen den Amiden, resp. Aniliden noch ein Zwischenglied haben, welches bei jenen fehlt, nämlich das der Aminsäuren, resp. das der Anilsäuren.

Erster Theil.

Experimentelle Daten.

Bei der Untersuchung der meist schwierig in völliger Reinheit zu erhaltenden Stoffe sind wir mit ganz besonderer Sorgfalt verfahren, um die Zuverlässigkeit der zu erhaltenden Resultate zu sichern. Wie schon bei früherer Gelegenheit angegeben stellen wir die Präparate zunächst in einer solchen Reinheit dar, dass sie den in der Litteratur sich findenden Angaben ent-

sprechen und bestimmen dann ihren Wärmewerth. Darauf sind die zu untersuchenden Stoffe von Neuem umkrystallisirt worden, mehrfach unter Wiederholung derselben Reinigungsmethode, worauf eine neue Bestimmung ihres Wärmewerthes erfolgte. Als rein wurde das Präparat erst betrachtet, wenn beide Bestimmungen gleiche Resultate ergaben. Elementaranalysen haben wir nicht vorgenommen, weil die Methode der Bestimmung des Wärmewerthes schärfere Resultate liefert, als sie von der Elementaranalyse zu erwarten sind. Die in Nachstehendem verzeichneten Zahlen sind regelmässig auf diese Weise erhalten; die Uebereinstimmung der mit verschiedenen Proben gewonnenen Zahlen spricht am besten für deren Reinheit. Bei einzelnen Stoffen, deren Umkrystallisation einen Zerfall befürchten liess, wie bei den Ammonium- und Anilinsalzen, sind jedesmal Präparate verschiedener Darstellung untersucht worden.

Die Bestimmungen des Wärmewerthes geschahen meist in der Mahler'schen Bombe, deren Wasserwerth von Neuem bestimmt wurde. In einzelnen Fällen wurde auch die Berthelot'sche Bombe benutzt und zur weiteren Sicherung wurde in einem Falle ein Theil der Bestimmungen sowohl mit dem einen wie mit dem anderen Apparate vorgenommen. Die hierbei gewonnene völlige Uebereinstimmung der Resultate liefert den schlagendsten Beweis für die Gleichwerthigkeit beider Apparate. Die mehrfach ausgesprochene Behauptung, Mahler's Apparat sei wohl für technische Untersuchungen, bei denen es auf grösste Genauigkeit nicht ankomme, geeignet, während für wissenschaftliche Zwecke die Berthelot'sche Bombe nicht zu entbehren sei, ist, wie aus diesen und aus vielfältigen früheren, von uns ausgeführten Bestimmungen hervorgeht, durchaus hinfällig. Wir erzielen mit dem einen wie mit dem anderen Apparate völlig übereinstimmende Resultate. Freilich muss man mit den Apparaten, sowohl mit dem von Berthelot wie mit dem von Mahler, zu arbeiten verstehen, was allerdings nicht Jedermanns Sache ist.

In den folgenden Belegen finden sich verschiedene Angaben des Wasserwerthes der Apparate; für die Bombe von Mahler ist der Wasserwerth bald zu 2804,6, bald zu 2800 Gramm angegeben. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Bestimmung ersteren Werth ergeben hatte, während wir später eine Ab-

änderung der Wasserfüllung vorgenommen haben, um in der Zahl 2800 einen einfacheren Zahlenwerth für die Rechnung zu haben. Die Zahl 2502,9 Gramm bezieht sich auf den Apparat von Berthelot.

In einzelnen Fällen ist zur Sicherung der Entzündung der Substanz ein Zusatz von leicht brennbarer Materie gemacht. Als solche wählten wir entweder Campher, dessen Verbrennungswärme sehr genau bekannt ist, oder Nitrocellulose, erhalten durch Verdunstung von Collodium. Der Wärmewerth der letzteren ist allerdings nicht so sicher wie der des Camphers, schon aus dem Grunde, weil in dem Collodium vielleicht wechselnde Gemenge von Tri- und Penta-Nitrocellulose vorliegen können. Doch ist dies von sehr geringem Belang, da von dem Collodiumrückstande nur minimale Mengen zu verwenden sind, um den beabsichtigten Zweck zu erreichen, so dass selbst eine erhebliche Unrichtigkeit in der dafür angenommenen Verbrennungswärme durchaus ohne Einfluss auf das Resultat sein muss. Die Verbrennungswärme des Camphers wurde nach unseren früheren Bestimmungen zu 9291,6 cal., die des Collodiums, nach Bestimmungen von Berthelot, zu 2782 cal. für das Gramm angenommen.

Ganz vereinzelt ist eine geringfügige Menge von Kohle bei den Verbrennungen abgeschieden worden, welche aber kaum mehr als 0,001 Gramm, meist weniger, betrug. Sie setzte sich an dem zur Aufnahme der Substanz dienenden Gefässe ab und konnte mit Leichtigkeit quantitativ bestimmt werden. Da wo eine solche Abscheidung stattfand, ist dafür eine Correction von 8 cal. für jedes Milligramm in die Rechnung eingeführt worden.

Oxaminsäure. xv, 81.

$\begin{matrix} CO.NH_2 \\ COOH \end{matrix}$ $C_2H_3NO_3$ 89

Darstellung. Nach dem von Oelkers[1]) angegebenen Verfahren. Oxaminsäure-Aethylester (Oxamäthan) wurde in wässriger Lösung, unter zeitweiligem Zusatz von Ammoniak im Sieden erhalten, von ausgeschiedenem Oxamid filtrirt, das Product zur

1) Ber. chem. Ges. 22, 1569.

Krystallisation verdampft und das gebildete Ammoniumsalz der Oxaminsäure mit Salzsäure zersetzt. Die Säure wurde durch Umkrystallisiren aus verdünntem Alkohol weiter gereinigt. Schmelzpunkt der Krystalle 210°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Oxaminsäure Grm.	Zusatz Campher Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	1,0464	0,0274	17,3329	16,6841	0,6488	2804,6	1819,6
2.	0,9975	0,0549	17,8534	17,1372	0,7162	2804,6	2008,7
3.	1,1025	0,0153	17,5104	16,8706	0,6398	2804,6	1794,4
4.	1,0934	0,0086	18,3940	17,7823	0,6117	2804,6	1715,6

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	254,6	2,6	9,1	266,3
2.	510,1	3,7	9,1	522,9
3.	142,2	3,0	9,1	154,3
4.	79,9	2,0	9,1	91,0

Wärmewerth

	der Oxaminsäure cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	1557,3 [1]	1488,3	132,5	99,89
2.	1488,2 [2]	1491,9	132,8	100,13
3.	1643,3 [3]	1490,5	132,7	100,03
4.	1628,6 [4]	1489,5	132,6	99,97
	Mittel	1490,0	132,7	für constant. Volum
			132,0	» » Druck
			159,5	Bildungswärme.

1) Werth erhöht um 4,0 cal. wegen 0,0005 Grm. abgesch. Kohle.
2) Erhöht um 2,4 cal. 0,0003 Grm. Kohle.
3) 0,0004 Grm. Kohle = 3,2 cal. 4) 0,0005 Grm. Kohle = 4,0 cal.

Oxanilsäure, xv, 165.

$$\begin{matrix} CO.N\begin{matrix} H \\ C_6H_5 \end{matrix} \\ \cdot \\ COOH \end{matrix} \qquad C_8H_7NO_3 \quad . \; . \; . \quad 165.$$

Darstellung. Reiner Oxanilsäure-Aethylester wurde durch Kalihydrat zersetzt und die aus dem Kaliumsalz abgeschiedene Säure aus siedendem Benzol umkrystallisirt.

Schmelzpunkt der Krystalle 150°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Oxanilsäure Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	1,0879	—	18,6329	16,5925	2,0404	2800	5713,1
2.	0,9987	—	17,3093	15,4374	1,8719	2800	5241,3
3.	1,0609	—	17,4276	15,4374	1,9902	2800	5572,6
4.	1,0165	—	16,4974	14,5890	1,9084	2800	5343,5

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	13,7	9,1	22,8
2.	—	7,5	9,1	16,6
3.	—	12,0	9,1	21,1
4.	—	15,9	9,1	25,0

Wärmewerth

	der Oxanilsäure cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	5690,3	5230,6	863,0	99,98
2.	5224,7	5231,5	863,2	99,99
3.	5551,5	5232,8	863,4	100,02
4.	5318,5	5232,2	863,3	100,01
	Mittel	5231,8	863,2 für constant. Volum	
			863,1 » » Druck	
			130,4 Bildungswärme.	

Malonanilsäure, xv, 228.

$$CH_2<\begin{matrix}CON.<\begin{matrix}H\\C_6H_5\end{matrix}\\COOH\end{matrix} \qquad C_9H_9NO_3 \quad . \; . \; 179.$$

Darstellung. Nach Freund[1]) durch Kochen von Monophenyl-Malonamid mit überschüssiger Kalkmilch, Krystallisiren des entstehenden Kalksalzes und Zersetzen desselben mit der berechneten Menge von Oxalsäure.

Schmelzpunkt der Krystalle 132°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Malonanils. Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	1,0546	—	17,5804	15,1845	2,3959	2502,9	5996,7
2.	0,9009	—	17,5913	15,5457	2,0456	2502,9	5119,9
3.	0,9764	—	17,6948	15,7105	1,9843	2800	5556,0

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	18,6	9,1	27,7
2.	—	16,2	9,1	25,3
3.	—	12,9	9,1	22,0

Wärmewerth

	der Malonanils. cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	5969,0	5660,0	1013,1	99,98
2.	5094,6	5655,0	1012,2	99,90
3.	5534,0	5667,8	1014,5	100,12
	Mittel	5660,9	1013,3	für constant. Volum
			1013,4	» » Druck
			143,1	Bildungswärme.

1) Ber. chem. Ges. 17, 135.

Succinanilsäure, xv, 208.

$CH_2.CO.N<^{H}_{C_6H_5}$ $C_{10}H_{11}NO_3$ . . 193.
$CH_2.COOH$

Darstellung. Nach Menschutkin[1]), durch Kochen von Succinanil mit Barytwasser, wobei die Spaltung sehr rasch erfolgt. Die Säure wurde durch Salzsäure abgeschieden und aus siedendem Wasser umkrystallisirt.

Schmelzpunkt der Krystalle 147°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Succinanils. Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n-\vartheta_1)$ cal.
1.	1,0010	—	17,7340	15,5717	2,1623	2800	6054,4
2.	1,0780	—	18,0503	15,7156	2,3347	2800	6537,2
3.	0,8689	—	17,6783	15,7952	1,8831	2800	5272,7
4.	0,7994	—	17,8671	16,1331	1,7340	2800	4855,2

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	2,1	9,1	11,2
2.	—	11,6	9,1	20,7
3.	—	14,5	9,1	23,6
4.	—	14,8	9,1	23,9

Wärmewerth

	der Succinanils. cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6443,2	6037,2	1165,2	99,92
2.	6516,5	6045,0	1166,7	100,05
3.	5249,1	6041,1	1165,9	99,99
4.	4831,3	6043,7	1166,4	100,03
	Mittel	6044,8	1166,1	für constant. Volum
			1166,5	» » Druck
			153,0	Bildungswärme.

1) Ann. Chem. **162**, 176.

Phtalaminsäure, xv, 148.

$C_6H_4<^{CO.NH_2}_{CO.OH}$ $C_8H_7NO_3$ . . 165.

Darstellung. Nach ASCHAN's[1]) Angaben.
Schmelzpunkt der Krystalle 149°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Phtalamins. Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n-\vartheta_1)$ cal.
1.	0,9796	—	17,8289	16,0164	1,8125	2800	5075,0
2.	1,0558	—	16,7049	14,7553	1,9496	2804,6	5467,8
3.	0,9765	—	16,1369	14,3343	1,8026	2804,6	5055,6
4.	0,9878	—	17,3720	15,5497	1,8223	2804,6	5110,8

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	13,4	9,1	22,5
2.	—	12,0	9,1	21,1
3.	—	11,2	9,1	20,3
4.	—	12,1	9,1	21,2

Wärmewerth

	der Phtalamins. cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	5052,5	5157,7	851,0	100,03
2.	5446,7	5158,9	851,2	100,05
3.	5035,3	5156,5	850,8	100,00
4.	5089,6	5152,5	850,2	99,92
	Mittel	5156,4	850,8	für constant. Volum
			850,7	» » Druck
			142,8	Bildungswärme.

1) Ber. chem. Ges. 19, 1401.

xv, 169.

Phenylphtalamidsäure. Phtalanilsäure.

$C_6H_4<^{CO.N<^{H}_{C_6H_5}}_{COOH}$ $C_{14}H_{11}NO_3$ . . 241.

Darstellung. Phtalanil wurde mit 1 Mol. Kalihydrat in concentrirter wässriger Lösung zersetzt. Nach Zusatz von etwas Alkohol wurde mit Salzsäure angesäuert, wobei die in Wasser schwer lösliche Säure ausfällt. Ein Versuch, die Säure aus siedendem Alkohol umzukrystallisiren, schlug fehl, da dabei Uebergang in Phtalanil stattfindet. Die Säure schmilzt unter Zersetzung bei 167°, wobei die Schmelzprobe jedoch rasch in das sehr nahezu auf die Schmelztemperatur erhitzte Bad einzutauchen ist, da anderenfalls durch Uebergang der Säure in Phtalanil der Schmelzpunkt zu hoch gefunden wird.

0,8475 Grm. der Säure erforderten zur Neutralisation 0,1411 Grm. *NaOH*; ber. 0,1407 Grm.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Phtalanils. Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n-\vartheta_1)$ cal.
1.	0,9903	—	17,4699	15,1469	2,3230	2800	6504,4
2.	0,8659	—	16,8066	14,7733	2,0333	2800	5693,2
3.	0,8097	—	17,6895	15,7881	1,9014	2800	5323,9

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	16,0	9,1	25,1
2.	—	15,0	9,1	24,1
3.	—	14,0	9,1	23,1

Wärmewerth

	der Phtalanils. cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6479,3	6542,8	1576,8	99,96
2.	5669,1	6547,1	1577,9	100,02
3.	5300,8	6546,6	1577,7	100,02
	Mittel	6545,5	1577,5	für constant. Volum
			1577,9	» » Druck
			117,6	Bildungswärme.

Monophenylharnstoff.

xv, 226.

$$CO<\begin{matrix}N<\begin{matrix}H\\C_6H_5\end{matrix}\\NH_2\end{matrix} \qquad C_7H_8N_2O \quad . \quad . \quad 136.$$

Darstellung. Nach Weith[1]). Durch Umlagerung von 1 Mol. Anilinhydrochlorat mit der äquivalenten Menge von Kaliumcyanat.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Monophenylharnstoff Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,9957	—	17,4446	15,1341	2,3105	2800	6469,4
2.	1,0054	—	17,3812	16,0481	2,3331	2800	6532,6
3.	0,9980	—	17,7247	15,4082	2,3165	2800	6486,2
4.	0,9079	—	17,7100	15,6016	2,1084	2800	5903,5

Correctionen.

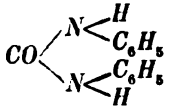
	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	21,3	9,1	30,4
2.	—	22,0	9,1	31,1
3.	—	20,3	9,1	29,4
4.	—	20,1	9,1	29,2

1) Ber. chem. Ges. 9, 820.

Wärmewerth

	des Monophenyl-harnstoffs	pro Grm.	pro Grm.-Mol.	Mittel = 100
	cal.	cal.	Cal.	
1.	6439,0	6466,9	879,5	99,98
2.	6501,5	6466,7	879,5	99,97
3.	6456,8	6469,7	879,9	100,02
4.	5874,3	6470,2	879,9	100,03
	Mittel	6468,4	879,7	für constant. Volum
			880,8	» » Druck
			54,0	Bildungswärme.

Symm. Diphenylharnstoff. Carbanilid. XV, 230.



$C_{13}H_{12}N_2O$ . . 212.

Darstellung. Nach dem Verfahren von HENTSCHEL[1]) wurde in Wasser vertheiltes Anilin mit Phosgengas behandelt, bis kein Anilin mehr wahrnehmbar war. Die ausgeschiedenen Krystalle wurden auf dem Saugtrichter von anhängender Flüssigkeit möglichst befreit, zur Entfernung von Anilin mit Salzsäure ausgekocht und destillirt; das Destillat wurde noch aus Alkohol umkrystallisirt.

Schmelzpunkt der Krystalle 238°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Symm. Diphenyl-harnstoff	Zusatz	ϑ_n (corr.)	ϑ_1	$\vartheta_n - \vartheta_1$	Wasser-werth W_a	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$
	Grm.	Grm.	Grad	Grad	Grad	Grm.	cal.
1.	0,8228	—	17,6330	15,3881	2,2449	2800	6285,7
2.	0,8669	—	17,9641	15,6026	2,3615	2800	6612,2
3.	0,9279	—	18,3006	15,7694	2,5312	2800	7087,4
4.	0,8625	—	18,6005	16,2501	2,3504	2800	6581,1

1) Journ. f. prakt. Chem. [2] 27, 498.

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	16,2	9,1	25,3
2.	—	17,7	9,1	26,8
3.	—	18,0	9,1	27,1
4.	—	17,3	9,1	26,4

Wärmewerth

	des Carbanilids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6260,4	7608,7	1613,0	100,07
2.	6585,4	7596,5	1610,5	99,91
3.	7060,3	7608,9	1613,1	100,07
4.	6554,7	7599,7	1611,1	99,95
	Mittel	7603,5	1611,9	für constant. Volum
			1612,8	» » Druck
			23,2	Bildungswärme.

Asymm. Diphenylharnstoff. xv, 214.

$$CO<\begin{matrix}N<\begin{matrix}C_6H_5\\C_6H_5\end{matrix}\\NH_2\end{matrix} \qquad C_{13}H_{12}N_2O \;.\;.\; 212.$$

Darstellung. Durch Erhitzen von Diphenyl-Harnstoffchlorid mit alkoholischem Ammoniak im geschlossenen Rohre auf 100°. Schmelzpunkt der Krystalle 189°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Asymm. Diphenylharnstoff Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1$ cal.
1.	1,0389	—	19,0307	16,1964	2,8343	2800	7936,0
2.	0,8318	—	18,4658	16,1944	2,2714	2800	6359,9
3.	0,9234	—	18,1482	15,6295	2,5187	2800	7052,4
4.	0,8205	—	17,7002	15,4615	2,2387	2800	6268,4

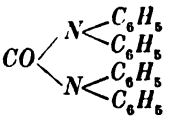
Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	20,5	9,1	29,6
2.	—	17,1	9,1	26,2
3.	—	18,0	9,1	27,1
4.	—	18,3	9,1	27,4

Wärmewerth

	des asymm. Diphenyl-harnstoffs cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	7906,4	7610,4	1613,4	100,01
2.	6333,7	7614,5	1614,3	100,06
3.	7025,3	7608,1	1612,9	99,98
4.	6241,0	7606,3	1612,5	99,95
	Mittel	7609,8	1613,3	für constant. Volum
			1614,2	» » Druck
			21,8	Bildungswärme.

Tetraphenylharnstoff. XV, 238.



$C_{25}H_{20}N_2O$ . . 364.

Darstellung. Nach dem von MICHLER[1]) angegebenen Verfahren. **Schmelzpunkt** der Krystalle 181°.

1) Ber. chem. Ges. **9**, 710.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Tetraphenylharnstoff Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,8840	—	18,8583	16,1835	2,6748	2800	7489,4
2.	0,8817	—	18,2702	15,6056	2,6646	2800	7460,9
3.	0,7998	—	18,2660	15,8459	2,4201	2800	6776,3
4.	0,7828	—	17,7310	15,3679	2,3631	2800	6616,7
5.	0,7269	—	17,7994	15,5966	2,2928	2800	6417,8

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	16,3	9,1	25,4
2.	—	18,3	9,1	27,4
3.	—	16,5	9,1	25,6
4.	—	2,5	9,1	11,6
5.	—	18,5	9,1	27,6

Wärmewerth

	des Tetraphenylharnstoffs cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	7464,0	8443,8	3073,5	100,02
2.	7443,2 [1]	8444,9	3072,9	100,00
3.	6750,7	8440,5	3072,3	99,98
4.	6605,1	8437,8	3071,4	99,95
5.	6140,2	8447,1	3074,7	100,06
	Mittel	8442,2	3073,0 für constant. Volum	
			3075,0 » » Druck	
			—35,0 Bildungswärme.	

1) Erhöht um 9,7 cal. für 1,2 Mgrm. Kohle.

Oxamid. xv, 52.

$CO.NH_2$
$CO.NH_2$ $C_2H_4N_2O_2$ . . 88.

Zur Darstellung wurde Oxalsäure-Aethylester mit Ammoniak geschüttelt und das entstehende Oxamid erst mit Wasser und Alkohol nach einander gewaschen, dann nach dem Trocknen mit Alkohol wiederholt gekocht, um alles darin Lösliche zu entfernen.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Oxamid Grm.	Zusatz[1] Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	1,0105	0,0091 (*Ca*)	16,7661	15,8926	0,8735	2804,6	2449,8
2.	0,9647	0,00935 (*Ca*)	16,4647	15,6285	0,8362	2804,6	2345,2
3.	1,0957	0,0077 (*Ca*)	16,0105	15,0765	0,9340	2804,6	2619,5
4.	1,0518	0,0031 (*Co*)	16,9888	16,1124	0,8764	2804,6	2458,0

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	84,5	8,9	9,1	102,5
2.	86,9	8,0	9,1	104,0
3.	71,6	10,0	9,1	90,7
4.	8,6	8,1	9,1	25,8

Wärmewerth

	des Oxamids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	2347,3	2322,9	204,4	100,27
2.	2241,2	2323,2	204,4	100,29
3.	2528,8	2307,9	203,1	99,62
4.	2432,2	2312,4	203,5	99,82
	Mittel	2316,6	203,9	für constant. Volum
			203,3	» » Druck
			122,7	Bildungswärme.

[1] Ca = Campher. Co = Collodium.

Phenyloxamid. XV, 184.

$$\begin{matrix} CO.N<^{H}_{C_6H_5} \\ CONH_2 \end{matrix} \qquad C_8H_8N_2O_2 \quad . \quad . \quad 164.$$

Darstellung. Aus Phenyloxaminsäure-Aethylester und Ammoniak. Aus Alkohol umkrystallisirt.

Schmelzpunkt der Krystalle 228,4°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Phenyl-oxamid Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasser-werth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,9680	—	17,3861	15,4001	1,9860	2800	5560,8
2.	1,0662	—	17,5744	15,3890	2,1854	2800	6119,1
3.	1,0566	—	17,7781	15,6086	2,1695	2800	6074,6
4.	1,0130	—	18,2312	16,1529	2,0783	2800	5819,2
5.	0,9890	—	17,9872	15,9606	2,0266	2800	5674,5
6.	1,0032	—	17,8746	15,8150	2,0596	2800	5766,9

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	16,0	9,1	25,1
2.	—	20,3	9,1	29,4
3.	—	21,3	9,1	30,4
4.	—	20,6	9,1	29,7
5.	—	16,0	9,1	25,1
6.	—	19,1	9,1	28,2

Wärmewerth

	des Phenyl-oxamids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	5535,7	5718,7	937,9	100,04
2.	6089,7	5711,6	936,7	99,91
3.	6044,2	5720,4	938,1	100,07
4.	5789,5	5715,2	937,3	99,98
5.	5649,4	5712,2	936,8	99,93
6.	5738,7	5720,4	938,1	100,07
	Mittel	5716,4	937,5	für constant. Volum
				und Druck
			90,5	Bildungswärme.

Oxanilid. XV, 56

$CO.N<^{H}_{C_6H_5}$
$CO.N<^{C_6H_5}_{H}$ $C_{14}H_{12}N_2O_2$ . . 240.

Darstellung. Durch Erhitzen von 1 Mol. wasserfreier Oxalsäure mit 2 Mol. Anilin und wiederholter Krystallisation aus Aceton.

Schmelzpunkt der Krystalle 245°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Oxanilid Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n-\vartheta_1)$ cal.
1.	0,9730	—	17,9730	15,5587	2,4143	2804,6	6771,1
2.	1,0627	—	18,3151	15,6755	2,6396	2804,6	7403,0
3.	1,0327	—	17,9415	15,3779	2,5636	2804,6	7189,9
4.	1,0225	—	19,0638	16,5266	2,5382	2804,6	7118,6
5.	1,0660	—	19,0657	16,4203	2,6454	2804,6	7419,3

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	17,0	9,1	26,1
2.	—	18,2	9,1	27,3
3.	—	18,9	9,1	28,0
4.	—	12,9	9,1	22,0
5.	—	16,9	9,1	26,0

Wärmewerth

	des Oxanilids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6745,0	6932,2	1663,7	99,94
2.	7375,7	6940,5	1665,7	100,05
3.	7161,9	6935,1	1664,4	99,98
4.	7096,6	6940,4	1665,9	100,05
5.	7393,3	6935,5	1664,5	99,98
	Mittel	6936,7	1664,8 für constant. Volum	
			1665,4 » » Druck	
			64,6 Bildungswärme.	

Malonamid. XV, 25.

$CH_2<^{CO.NH_2}_{CO.NH_2}$ $C_3H_6N_2O_2$ . . 102.

Das zu den Bestimmungen verwandte Präparat wurde von uns nach dem von Freund[1]) beschriebenen Verfahren dargestellt. Malonsäure-Aethylester wurde in dem angegebenen Verhältniss mit Ammoniak von 0,925 spec. Gew. gemischt und im Kolben stehen gelassen, bis die Bildung erfolgt war. Der sich ausscheidende Krystallbrei wurde an der Pumpe abgesaugt und aus heissem, wässrigem Alkohol umkrystallisirt. Das Malonamid bildet weisse Krystalle vom Schmelzpunkt 173°.

1) Ber. chem. Ges. 17, 133.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Malonamid Grm.	Zusatz Campher Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	1,0028	0,0102	17,3608	16,0604	1,3004	2804,6	3647,1
2.	1,0060	0,0040	16,8896	15,6036	1,2860	2804,6	3606,7
3.	1,0004	0,0041	16,6159	15,3386	1,2773	2804,6	3582,3

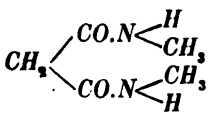
Correctionen.

	Campher cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	94,8	15,0	9,1	118,9
2.	37,2	14,0	9,1	60,3
3.	38,1	14,6	9,1	61,8

Wärmewerth

	des Malonamids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. cal.	Mittel = 100
1.	3528,2	3518,1	358,9	99,93
2.	3546,4	3525,3	359,6	100,12
3.	3520,5	3519,1	358,9	99,95
	Mittel 3520,9		359,1	für constant. Volum
			358,8	» » Druck
			130,2	Bildungswärme.

Symm. Dimethyl-Malonamid. XV, 29.



$C_5H_{10}N_2O_2$ . . 130.

Dargestellt nach dem Verfahren von FREUND[1]) durch Behand-

[1]) Ber. chem. Ges. 17, 134.

lung von Malonsäure-Aethylester mit concentrirter Lösung von Methylamin und Umkrystallisiren aus siedendem Benzol. Krystalle vom Schmelzpunkt 128°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Symm. Dimethyl-Malonamid	Zusatz	ϑ_n (corr.)	ϑ_1	$\vartheta_n - \vartheta_1$	Wasserwerth W_a	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$
	Grm.	Grm.	Grad	Grad	Grad	Grm.	cal.
1.	1,0457	—	17,5830	15,6056	1,9774	2804,6	5545,8
2.	1,06945	—	17,1379	15,1162	2,0217	2804,6	5670,1
3.	1,0145	—	17,6970	15,7760	1,9210	2804,6	5387,8

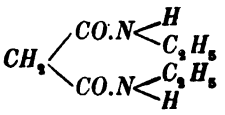
Correctionen.

	Zusatz	Salpetersäure	Eisen	Im Ganzen
	cal.	cal.	cal.	cal.
1.	—	24,0	9,1	33,1
2.	—	23,8	9,1	32,9
3.	—	21,5	9,1	30,6

Wärmewerth

	des Symm. Dimethyl-Malonamids	pro Grm.	pro Grm.-Mol.	Mittel = 100
	cal.	cal.	Cal.	
1.	5512,7	5271,8	685,3	99,95
2.	5637,2	5271,1	685,2	99,94
3.	5357,0	5280,5	686,5	100,11
	Mittel	5274,5	685,7	für constant. Volum
			686,0	» » Druck
			129,0	Bildungswärme.

Diaethyl-Malonamid. XV, 45.



$C_7H_{14}N_2O_2$ . . 158.

Darstellung nach WALLACH und KAMENSKI[1]) aus Malonsäure-Aethylester und Aethylamin. Aus heissem Benzol umkrystallisirt. Schmelzpunkt 149°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Diaethyl-Malonamid Grm.	Zusatz Collodium Grm.	ϑ_n(corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n-\vartheta_1)$ cal.
1.	0,7646	—	18,2259	16,5007	1,7252	2804,6	4838,5
2.	0,7957	—	18,6826	16,8913	1,7913	2804,6	5023,9
3.	0,5892	0,0010	17,2157	15,8836	1,3321	2804,6	3736,0
4.	1,0297	0,0015	16,6070	14,2811	2,3259	2804,6	6523,2

Correctionen.

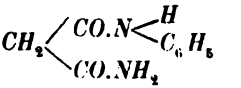
	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	16,9	9,1	26,0
2.	—	17,3	9,1	26,4
3.	2,8	12,5	9,1	24,4
4.	4,2	27,2	9,1	40,5

1) Ber. chem. Ges. 14, 470.

Wärmewerth

	des Diaethyl-Malonamids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	4812,5	6294,1	994,5	100,03
2.	4997,5	6280,6	992,3	99,81
3.	3741,6	6299,4	995,3	100,11
4.	6482,7	6295,7	994,7	100,05
	Mittel	6292,5	994,2 für constant. Volum	
			995,1 » » Druck	
			145,9 Bildungswärme.	

Monophenyl-Malonamid, wasserfrei. XV, 218.



$C_9H_{10}N_2O_2$. 178.

Darstellung. Nach dem Verfahren von FREUND[1]) durch Erhitzen von Malonamid und Anilin; aus siedendem Wasser umkrystallisirt und bei 104° getrocknet, wobei es $\frac{1}{2}$ Mol. Wasser verliert. Schmelzpunkt im wasserfreien Zustande 167,5°.

3,940 Grm. Substanz verloren beim Trocknen bei 104° 0,187 Grm. Wasser entsprechend 4,74 Proc.; berechnet 4,84 Proc.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Phenyl-Malonamid, wasserfrei Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,8141	—	17,3599	15,5736	1,7863	2800	5001,6
2.	0,8397	—	18,0621	16,2183	1,8438	2800	5162,6

1) Ber. chem. Ges. 17, 135.

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	15,6	9,1	24,7
2.	—	16,3	9,1	25,4

Wärmewerth

	des Phenyl-Malonamids, wasserfrei cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	4976,9	6113,4	1088,2	99,96
2.	5137,2	6117,9	1089,0	100,04
	Mittel	6115,7	1088,6	für constant. Volum
			1088,9	» » Druck
			102,1	Bildungswärme.

Monophenyl-Malonamid, aus Wasser krystallisirt. xv, 220.

$C_9H_{10}N_2O_2.0{,}5H_2O$ . . . . . 187.

Das aus Wasser krystallisirte Phenyl-Malonamid gab bei der Bestimmung des Wärmewerthes so anormale Werthe, dass nur zwei Möglichkeiten vorliegen konnten. Das Präparat konnte entweder in hohem Grade unrein sein oder es musste Wasser enthalten. Das Nichtvorhandensein von Verunreinigungen wurde durch Bestimmung des Wärmewerthes eines weiter umkrystallisirten Präparates, wobei derselbe Werth, wie vorher, gefunden wurde, erwiesen. Ein Versuch, bei welchem ermittelt werden sollte, ob beim Erwärmen auf wenig über 100°, genau auf 104°, ein Gewichtsverlust stattfände, ergab das oben verzeichnete Ergebniss, nach welchem das aus Wasser krystallisirte Präparat beim Trocknen im Exsiccator noch $\frac{1}{2}$ Mol. Wasser zurückhält.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Phenyl-Malonamid, krystallisirt	Zusatz Collodium	ϑ_n (corr.)	ϑ_1	$\vartheta_n - \vartheta_1$	Wasserwerth W_a	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1$
	Grm.	Grm.	Grad	Grad	Grad	Grm.	cal.
1.	1,1482	—	17,8643	15,4676	2,3967	2800	6710,7
2.	1,0050	—	17,8204	15,7196	2,1008	2800	5882,2
3.	0,9826	0,0043	18,0785	16,0253	2,0532	2800	5749,0

Correctionen.

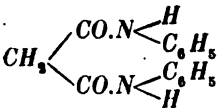
	Zusatz	Salpetersäure	Eisen	Im Ganzen
	cal.	cal.	cal.	cal.
1.	—	22,5	9,1	31,6
2.	—	20,8	9,1	29,9
3.	3,6	14,8	9,1	27,5

Wärmewerth

	des Phenyl-Malonamids, kryst.	pro Grm.	pro Grm.-Mol.	Mittel = 100
	cal.	cal.	Cal.	
1.	6679,1	5817,1	1087,7	99,93
2.	5852,3	5823,2	1088,8	100,04
3.	5721,5	5822,7	1088,7	100,03
	Mittel	5821,0	1088,4 für constant. Volum	
			1088,7 » » Druck	
			136,8 Bildungswärme.	

Symm. Diphenyl-Malonamid, Malonanilid.

xv, 38.



$C_{15}H_{14}N_2O_2$. . 254.

Darstellung nach dem Verfahren von FREUND [1]) durch Kochen von Malonsäure-Aethylester mit Anilin. Nach dem Umkrystallisiren aus heissem Alkohol bildet das Anilid weisse Nadeln vom Schmelzpunkt 223°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Malonanilid Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	1,0151	—	18,4371	15,8340	2,6031	2804,6	7300,7
2.	1,0342	—	18,3154	15,6635	2,6519	2804,6	7437,5
3.	1,0305	—	17,9385	15,2983	2,6402	2804,6	7404,7
4.	1,0959	—	18,1575	15,3557	2,8018	2804,6	7857,9
5.	0,7184	—	18,3508	16,5117	1,8391	2804,6	5157,9
6.	1,0193	—	17,9775	15,3689	2,6086	2804,6	7316,1
7.	0,7860	—	17,5666	15,5557	2,0109	2804,6	5639,8

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	21,0	9,1	30,1
2.	—	20,5	9,1	29,6
3.	—	20,5	9,1	29,6
4.	—	22,0	9,1	31,1
5.	—	12,0	9,1	21,1
6.	—	14,6	9,1	23,7
7.	—	11,8	9,1	20,9

1) Ber. chem. Ges. 17, 134.

Wärmewerth

	des Malonanilids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	7270,6	7162,4	1819,2	100,12
2.	7407,9	7162,9	1819,4	100,13
3.	7375,1	7156,8	1817,8	100,04
4.	7826,8	7141,9	1814,0	99,83
5.	5136,8	7150,4	1816,2	99,95
6.	7292,4	7154,3	1817,1	100,01
7.	5618,9	7148,7	1815,8	99,93
	Mittel	7153,9	1817,1 für constant. Volum	
			1818,0 » » Druck	
			75,0 Bildungswärme.	

Succinamid. xv, 68.

$$\begin{matrix} CH_2.CO.NH_2 \\ CH_2.CO.NH_2 \end{matrix} \qquad C_4H_8N_2O_2 \ldots 116.$$

Darstellung. Bernsteinsäure-Aethylester wurde mit wässrigem Ammoniak geschüttelt; die sich ausscheidenden Krystalle wurden aus siedendem Wasser umkrystallisirt. Schmelzpunkt der Krystalle 242°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Succinamid Grm.	Zusatz[1] Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	1,0863	0,0015 (*Co*)	17,3132	15,5996	1,7136	2804,6	4806,0
2.	0,9738	0,0102 (*Ca*)	18,5579	16,9886	1,5693	2804,6	4401,3
3.	1,0241	0,0017 (*Co*)	18,2041	16,5885	1,6156	2804,6	4331,1
4.	1,0341	0,0049 (*Co*)	18,0515	16,4163	1,6352	2804,6	4586,1

1) *Co* = Collodium, *Ca* = Campher.

Correctionen.

	Substanz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	4,2	19,3	9,1	32,6
2.	94,8	18,2	9,1	122,1
3.	4,8	18,0	9,1	31,9
4.	13,7	18,5	9,1	41,3

Wärmewerth

	des Succinamids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	4773,4	4394,1	509,7	100,00
2.	4279,2	4394,3	509,7	100,00
3.	4499,2	4393,3	509,6	99,98
4.	4544,7	4394,9	509,8	100,02
	Mittel	4394,2	509,7 für constant. Volum und Druck	
			142,3 Bildungswärme.	

Monophenyl-Succinamid. XV, 203.

$$\begin{matrix} CH_2.CO.N<^{H}_{C_6H_5} \\ CH_2.CO.NH_2 \end{matrix} \qquad C_{10}H_{12}N_2O_2 \;.\; 192.$$

Darstellung. Nach dem Verfahren von Menschutkin[1]) durch Erhitzen von Succinanil mit alkoholischem Ammoniak im zugeschmolzenen Rohr bei 100° und Umkrystallisiren aus siedendem Wasser. Schmelzpunkt 182°.

---

1) Ann. Chem. 162, 182.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Phenyl-Succinamid	Zusatz Campher	ϑ_n (corr.)	ϑ_1	$\vartheta_n - \vartheta_1$	Wasserwerth W_a	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$
	Grm.	Grm.	Grad	Grad	Grad	Grm.	cal.
1.	1,0477	—	18,4737	16,0402	2,4335	2800	6813,8
2.	1,0710	—	18,3167	15,8290	2,4877	2800	6965,6
3.	1,0611	—	18,5603	16,0935	2,4668	2800	6907,0
4.	0,9935	—	17,9934	15,6844	2,3090	2800	6465,2
5.	0,7748	0,0070	18,2305	16,4063	1,8242	2800	5107,8

Correctionen.

	Zusatz	Salpetersäure	Eisen	Im Ganzen
	cal.	cal.	cal.	cal.
1.	—	18,5	9,1	27,6
2.	—	17,7	9,1	26,8
3.	—	17,3	9,1	26,4
4.	—	19,0	9,1	28,1
5.	65,0	16,0	9,1	90,1

Wärmewerth

	des Phenyl-succinamids	pro Grm.	pro Grm.-Mol.	Mittel = 100
	cal.	cal.	Cal.	
1.	6786,2	6477,3	1243,6	99,97
2.	6938,8	6478,8	1243,9	99,99
3.	6880,6	6484,4	1245,0	100,08
4.	6437,1	6479,3	1244,0	100,00
5.	5017,7	6476,1	1243,4	99,95
	Mittel	6479,2	1244,0 für constant. Volum	
			1244,6 » » Druck	
			109,1 Bildungswärme.	

Succinanilid. xv, 194.

$$CH_2.CO.N<^{H}_{C_6H_5} \qquad C_{16}H_{16}N_2O_2 \;.\; 268.$$
$$CH_2.CO.N<^{C_6H_5}_{H}$$

Darstellung. Bernsteinsäure wurde kurze Zeit mit Anilin erhitzt und das sich ausscheidende Succinanilid mit Wasser ausgekocht, um zugleich entstehendes Succinanil zu entfernen. Zur weiteren Reinigung wurde das Succinanilid mit alkoholischer Kalilösung gekocht, nach dem Verfahren von Menschutkin[1]), wobei es sich löst und beim Erkalten krystallisirt. Es wurde aus siedendem Alkohol umkrystallisirt. Schmelzpunkt 230,5°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Succinanilid Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n(corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n-\vartheta_1)$ cal.
1.	1,0481	—	17,5438	14,7872	2,7566	2800	7718,5
2.	1,0158	—	17,8860	15,2094	2,6766	2800	7494,5
3.	0,9650	—	18,7102	16,1667	2,5435	2800	7121,8
4.	0,9231	—	18,8542	16,4212	2,4330	2800	6812,4
5.	0,8395	—	17,8589	15,6455	2,2134	2800	6197,5

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	10,0	9,1	19,1
2.	—	21,0	9,1	30,1
3.	—	12,6	9,1	21,7
4.	—	16,0	9,1	25,1
5.	—	17,4	9,1	26,5

1) Ann. Chem. **162**, 187.

Wärmewerth

	des Succinanilids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	7699,8	7346,0	1968,7	99,93
2.	7464,4	7348,3	1969,3	99,96
3.	7400,1	7357,6	1971,8	100,09
4.	6787,3	7352,7	1970,5	100,02
5.	6471,0	7350,8	1970,0	100,00
	Mittel	7351,1	1970,1	für constant. Volum
			1971,3	» » Druck
			84,7	Bildungswärme.

Phtalamid. XV, 136.

$C_6H_4{<}^{CO.NH_2}_{CO.NH_2}$ $C_8H_8N_2O_2$ . . . 164.

Darstellung. Durch Behandlung von Phtalimid mit concentrirtem Ammoniak nach ASCHAN[1]). Mikroskopische Krystalle vom Schmelzpunkt 221°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Phtalamid Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	1,0462	-	17,2182	15,1161	2,1021	2804,6	5895,5
2.	1,1324	-	18,0764	15,7992	2,2772	2804,6	6386,6
3.	0,9278	---	17,0858	15,2193	1,8665	2804,6	5234,8
4.	0,9915	---	18,0186	16,0233	1,9953	2804,6	5596,0
5.	1,0354	—	17,5134	15,4253	2,0881	2800,0	5846,7

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	15,5	9,1	24,6
2.	—	14,5	9,1	23,6
3.	—	12,5	9,1	21,6
4.	—	15,0	9,1	24,1
5.	—	14,3	9,1	23,4

1) Ber. chem. Ges. **19**, 1399.

Wärmewerth

	des Phtalamids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	5878,9 [1])	5619,3	921,6	99,98
2.	6363,0	5619,1	921,5	99,98
3.	5213,2	5618,9	921,5	99,98
4.	5571,9	5619,7	921,6	99,99
5.	5823,3	5624,2	922,4	100,07
	Mittel	5620,2	921,7 für constant. Volum und Druck	
			106,3 Bildungswärme.	

Phenylphtalamid. xv, 191.

$$C_6H_4\begin{cases} CO.NH_2 \\ CO.N\begin{cases} H \\ C_6H_5 \end{cases} \end{cases} \quad C_{14}H_{12}N_2O_2 \; . \; . \; 240.$$

Darstellung. Aus Phtalanil mit alkoholischem Ammoniak. Schmelzpunkt 226°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Phenyl-phtalamid Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasser-werth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,9630	—	17,7898	15,4142	2,3756	2800	6651,7
2.	0,9710	—	18,1497	15,7569	2,3928	2800	6699,8
3.	0,9491	—	17,3051	14,9639	2,3412	2800	6555,4

Correctionen.

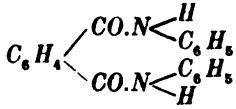
	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	16,5	9,1	25,6
2.	—	17,5	9,1	26,6
3.	—	18,2	9,1	27,3

1) Erhöht um 8 cal. für 0,001 Grm. Kohle.

Wärmewerth

	des Phenyl-phtalamids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6626,1	6880,7	1651,4	100,05
2.	6673,2	6872,5	1649,4	99,93
3.	6528,1	6878,2	1650,8	100,02
	Mittel	6877,1	1650,5 für constant. Volum	
			1651,1 » » Druck	
			78,9 Bildungswärme.	

Phtalsäure-Anilid. XV, 487.



$C_{20}H_{16}N_2O_2$. 316.

Darstellung. Zu 75 Grm. Anilin, in Benzol gelöst, wurden 19 Grm. Phtalylchlorid in kleinen Antheilen hinzugefügt, wobei sich das Anilid in Form eines krystallinischen Niederschlages abscheidet. Nach der Filtration und dem Trocknen wurde es mit Wasser, Alkohol und Aether gewaschen und mit siedendem Alkohol behandelt. Es bildet feine Nädelchen vom Schmelzpunkt 230°. In sämmtlichen gebräuchlichen Lösungsmitteln unlöslich, wird es nur von siedendem Eisessig in geringer Menge aufgenommen. Die zur Bestimmung des Wärmewerthes benutzten Präparate wurden aus heissem Eisessig umkrystallisirt.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Phtalsäure-Anilid Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	1,0659	—	18,1143	15,2331	2,8812	2800	8067,4
2.	0,8815	—	17,9392	15,5587	2,3805	2800	6665,4
3.	0,7642	—	17,9008	15,8369	2,0639	2800	5778,9

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	18,0	9,1	27,1
2.	—	12,0	9,1	21,1
3.	—	13,0	9,1	22,1

Wärmewerth

	des Phtalsäure-Anilids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	8040,3	7543,2	2383,7	100,07
2.	6644,3	7537,5	2381,9	99,99
3.	5756,8	7533,1	2380,5	99,94
	Mittel	7537,9	2382,0 für constant. Volum	
			2383,2 » » Druck	
			48,8 Bildungswärme.	

Succinimid, wasserfrei. xv, 72.

$$\begin{matrix} CH_2.CO \\ CH_2.CO \end{matrix}\!\!>\!NH \qquad C_4H_5NO_2 \;..\; 99.$$

Darstellung. Käufliches Succinimid wurde aus wasserfreiem Aceton umkrystallisirt und bei 100° entwässert.

Schmelzpunkt 126°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Succinimid Grm.	Zusatz Collodium Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	1,1751	0,0034	17,9778	16,1074	1,8704	2804,6	5245,7
2.	0,9968	0,0027	18,2750	16,6901	1,5849	2804,6	4445,0
3.	1,0287	0,0003	18,0457	16,7140	1,6317	2804,6	4576,3
4.	1,0968	0,0012	18,7045	16,9647	1,7428	2804,6	4887,9

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,5	17,4	9,1	36,0
2.	7,6	14,5	9,1	31,2
3.	0,8	15,5	9,1	25,4
4.	3,4	18,0	9,1	30,5

Wärmewerth

	des Succinimids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	5209,7	4433,4	438,9	100,11
2.	4413,8	4428,0	438,4	99,99
3.	4550,9	4423,9	438,0	99,90
4.	4857,4	4428,7	438,4	100,00
	Mittel	4428,5	438,4	für constant. Volum
			438,1	» » Druck
			110,4	Bildungswärme.

Phenyl-Succinimid. Succinanil. xv, 199.

$$\begin{matrix} CH_2.CO \\ CH_2.CO \end{matrix}\!\!>\!N.C_6H_5 \qquad C_{10}H_9NO_2 \;\ldots\; 175.$$

Darstellung. Nach dem von Menschutkin[1]) angegebenen Verfahren. Schmelzpunkt 154,5°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Succinimid Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n-\vartheta_1$ cal.
1.	1,0039	—	18,2898	15,8886	2,4012	2800	6723,4
2.	1,2929	—	19,1039	16,0114	3,0925	2800	8659,0
3.	1,0399	—	18,7015	16,2133	2,4882	2800	6967,0
4.	1,0233	—	19,0040	16,5546	2,4494	2800	6858,3

1) Ann. Chem. **162**, 166.

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	12,7	9,1	21,8
2.	—	20,5	9,1	29,6
3.	—	17,0	9,1	26,1
4.	—	18,6	9,1	27,7

Wärmewerth

	des Succinanils cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6701,6	6675,6	1168,2	100,01
2.	8629,4	6674,5	1168,0	99,99
3.	6948,9	6674,6	1168,1	99,99
4.	6830,6	6675,1	1168,1	100,00
	Mittel	6675,0	1168,1 für constant. Volum	
			1168,5 » » Druck	
			82,0 Bildungswärme.	

Phtalimid. xv, 132.

$C_6H_4\langle\begin{matrix}CO\\CO\end{matrix}\rangle NH$ $C_8H_5NO_2$ . . 147.

Von Dr. König, Leipzig, bezogenes Handelsproduct, mehrfach von uns aus Eisessig umkrystallisirt. Schmelzpunkt der Krystalle 233°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

Substanz Phtalimid Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n-\vartheta_1)$ cal.
0,9890	—	17,1763	15,1281	2,0482	2804,6	5744,4
1,0258	—	17,5591	15,4374	2,1217	2804,6	5950,5
1,0542	—	18,0286	15,8469	2,1817	2804,6	6118,8
0,9368	—	16,0938	14,1527	1,9411	2804,6	5444,0

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	13,1	9,1	22,2
2.	—	13,5	9,1	22,6
3.	—	12,5	9,1	21,6
4.	—	11,7	9,1	20,8

Wärmewerth

	des Phtalimids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	5722,2	5785,8	850,5	100,01
2.	5927,9	5778,8	849,5	99,90
3.	6097,2	5783,7	850,2	99,99
4.	5423,2	5789,1	851,0	100,08
	Mittel	5784,4	850,3	für constant. Volum
			850,2	» » Druck
			74,3	Bildungswärme.

Phenyl-Phtalimid, Phtalanil.

xv, 173.

$C_6H_4<\begin{matrix}CO\\CO\end{matrix}>N.C_6H_5$ $C_{14}H_9NO_2$. 223

Darstellung. Nach der Angabe von Piutti[1]), durch Erhitzen von Phtalimid mit Anilin.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Phtalanil Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n-\vartheta_1)$ cal.
1.	1,1094	—	17,7223	14,9100	2,8123	2800	7874,4
2.	1,0745	—	17,4709	14,7464	2,7245	2800	7628,6
3.	1,0529	—	18,8827	16,2143	2,6684	2800	7471,5
4.	1,0767	—	17,7647	15,0327	2,7320	2800	7649,6
5.	1,0794	—	18,1499	15,4102	2,7397	2800	7671,2
6.	1,0722	—	19,0443	16,3239	2,7204	2800	7617,1
7.	0,9519	—	18,3236	15,9085	2,4151	2800	6762,3

1) Ber. chem. Ges. 16, 1822.

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	17,0	9,1	26,1
2.	—	17,8	9,1	26,9
3.	—	13,8	9,1	22,9
4.	—	15,7	9,1	24,8
5.	—	14,5	9,1	23,6
6.	—	10,2	9,1	19,3
7.	—	14,5	9,1	23,6

Wärmewerth

	des Phtalanils cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	7848,3	7074,4	1577,6	99,93
2.	7601,7	7074,6	1577,6	99,93
3.	7448,6	7074,4	1577,6	99,93
4.	7624,8	7081,6	1579,2	100,03
5.	7647,6	7085,0	1580,0	100,08
6.	7597,8	7086,2	1580,2	100,10
7.	6738,7	7079,2	1578,7	100,00
	Mittel	7079,3	1578,7	für constant. Volum
			1579,1	» » Druck
			47,1	Bildungswärme.

Neutrales oxalsaures Ammonium, xv, 79.
wasserfrei.

$$\begin{matrix} CO.ONH_4 \\ CO.ONH_4 \end{matrix} \qquad C_2H_8N_2O_4 \ldots 124.$$

Darstellung. Die Krystalle des neutralen Salzes wurden im Exsiccator vom Krystallwasser befreit.

Bestimmung des Wärmewerthes.

Substanz oxalsaures Ammonium Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1,0021	0,0717	17,3704	16,5686	0,8015	2804,6	2247,9
1,1059	0,0828	16,9895	16,0946	0,8949	2804,6	2509,8

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	666,2	2,5	9,1	677,8
2.	769,3	3,2	9,1	784,6

Wärmewerth

	des oxalsauren Ammoniums cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	1571,7[1])	1568,4	194,5	100,06
2.	1732,2[1])	1566,4	194,2	99,94
	Mittel	1567,4	194,4 für constant. Volum	
			193,8 » » Druck	
			270,2 Bildungswärme.	

Malonsaures Ammonium, neutrales. XV, 249.

$CH_2<\begin{matrix}CO.ONH_4\\CO.ONH_4\end{matrix}$ $C_3H_{10}N_2O_4$ . . 138.

Darstellung. Aus der mit Ammoniak im Ueberschusse versetzten Lösung der Säure durch Alkohol gefällt.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz malonsaures Ammonium Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n-$ cal.
1.	1,0764	0,0105	16,5109	15,4958	1,0151	2800	2842,3
2.	1,1162	0,0062	16,6850	15,6485	1,0365	2800	2902,2
3.	1,1303	0,0070	17,6726	16,6196	1,0530	2800	2948,4

1) Der Werth ist in beiden Bestimmungen, wegen Spuren abgeschiedener Kohle, um 1,6 resp. 4,0 cal. erhöht.

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	97,6	6,7	9,1	113,4
2.	57,6	6,9	9,1	73,6
3.	65,0	6,5	9,1	80,6

Wärmewerth

	des malonsauren Ammoniums cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	2728,9	2535,2	349,9	99,99
2.	2828,6	2534,1	349,7	99,94
3.	2867,8	2537,2	350,1	100,07
	Mittel	2535,5	349,9	für constant. Volum
			349,6	» » Druck
			277,1	Bildungswärme.

Neutrales bernsteinsaures Ammonium. xv, 76.

$$\begin{matrix} CH_2.CO.ONH_4 \\ CH_2.CO.ONH_4 \end{matrix} \quad C_4H_{12}N_2O_4 \ldots 152.$$

Darstellung. Die Bereitung des neutralen Salzes bietet insofern Schwierigkeit, als dasselbe nicht allein beim Verdampfen seiner Lösung, sondern schon beim Stehen an der Luft rasch Ammoniak verliert und dann saure Reaction annimmt. Um diesen Uebelstand zu umgehen, wurde ätherische Bernsteinsäurelösung mit überschüssigem alkoholischem Ammoniak versetzt, die sich ausscheidenden Krystalle wurden rasch abfiltrirt, durch möglichst kurzes Absaugen im Luftstrome thunlichst von Aether und Alkohol befreit und schliesslich über gebranntem Kalk in einer Ammoniak-Atmosphäre getrocknet. Die Bestimmung des Wärmewerthes wurde mit ganz frischem Präparate ausgeführt. Das dazu verwandte Salz zeigte neutrale Reaction.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz bernsteins. Ammonium Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,8912	0,0047	18,1435	17,0709	1,0726	2804,6	3008,2
2.	1,0176	0,0097	16,4351	15,1976	1,2375	2804,6	3470,7
3.	0,9736	0,00945	18,2266	17,0392	1,1874	2804,6	3330,2

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	43,7	7,8	9,4	60,6
2.	90,4	8,6	9,4	107,8
3.	87,8	8,7	9,4	105,6

Wärmewerth

	des bernsteinsauren Ammoniums cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	2947,6	3307,5	502,7	99,98
2.	3362,9	3304,7	502,3	99,90
3.	3324,6	3312,0	503,4	100,12
	Mittel	3308,1	502,8	für constant. Volum und Druck
			287,2	Bildungswärme.

Phtalsaures Ammonium, neutrales. XV, 252.

$C_6H_4{<}^{CO.ONH_4}_{CO.ONH_4}$ $C_8H_{12}N_2O_4$ . . 200.

Darstellung. Phtalsäure wurde in überschüssigem Ammoniak gelöst und das Salz durch Zusatz von Alkohol ausgeschieden.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz phtalsaures Ammonium Grm.	Zusatz Campher Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	1,0878	0,0072	16,4409	14,6162	1,8247	2800	5109,2
2.	0,9194	0,0037	17,1183	15,5826	1,5357	2800	4300,0
3.	1,1450	0,0128	18,2971	16,3581	1,9390	2800	5429,2

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	66,9	14,9	9,1	90,7
2.	34,4	13,0	9,1	56,5
3.	118,9	15,0	9,1	143,0

Wärmewerth

	des phtalsauren Ammoniums cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	5018,5	4613,4	922,7	99,96
2.	4243,5	4615,5	923,0	100,01
3.	5286,2	4616,8	923,4	100,03
	Mittel	4615,2	923,0	für constant. Volum und Druck
			243,0	Bildungswärme.

Anilin-Oxalat, neutrales. XV, 141.

$CO.ONH_2.C_6H_5$
$CO.ONH_2.C_6H_5$ $C_{14}H_{16}N_2O_4$ . . . 276.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Anilin-Oxalat Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,9877	—	17,1105	14,9809	2,1296	2804,6	5972,7
2.	0,9831	—	16,6435	15,5267	2,1168	2804,6	5936,8
3.	1,0142	—	17,8072	15,6236	2,1836	2804,6	6124,1
4.	1,0137	—	17,3087	15,1231	2,1856	2800	6119,7
5.	0,9887	—	17,8376	15,7004	2,1372	2800	5984,2
6.	0,9092	—	17,3504	15,3870	1,9634	2800	5497,5
7.	0,9507	—	17,6529	15,5996	2,0533	2800	5749,2

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	14,0	9,1	23,1
2.	—	13,9	9,1	23,0
3.	—	14,0	9,1	23,1
4.	—	12,7	9,1	21,8
5.	—	14,0	9,1	23,1
6.	—	13,2	9,1	22,3
7.	—	13,5	9,2	22,7

Wärmewerth

	des Anilin-Oxalats cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	5949,6	6023,7	1662,5	100,05
2.	5913,8	6015,4	1660,3	99,91
3.	6101,0	6015,6	1660,3	99,92
4.	6097,9	6015,5	1660,3	99,91
5.	5961,1	6029,2	1664,1	100,14
6.	5475,2	6022,0	1662,1	100,02
7.	5726,5	6023,5	1662,5	100,05
	Mittel	6020,7	1661,7	für constant. Volum
			1662,3	» » Druck
			205,7	Bildungswärme.

Carbaminsäure-Aethylester. xx, 1.

Urethan.

$$CO<\begin{matrix}NH_2\\OC_2H_5\end{matrix} \quad C_3H_7NO_2 \ldots\ldots 89.$$

Von Kahlbaum bezogenes, sehr reines Präparat, von welchem zunächst zwei Bestimmungen des Wärmewerthes vorgenommen wurden. Darauf wurde das Urethan in Alkohol gelöst und die völlig klare Lösung in Petroläther gegossen, wodurch glänzende, kleine Krystalle gefällt wurden, die an der Saugpumpe von anhängender Flüssigkeit befreit, im Exsiccator getrocknet und wieder verbrannt wurden. Der Wärmewerth dieses Präparates war dem vorigen völlig gleich. Schmelzpunkt der Krystalle scharf bei 50°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Urethan Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,9092	—	16,4918	14,9829	1,5089	2700	4074,0
2.	0,9256	—	16,7221	15,1805	1,5416	2700	4162,3
3.	1,10235	—	16,7760	14,9460	1,8300	2700	4941,0
4.	1,0701	—	16,1439	14,3684	1,7755	2700	4793,8

Correctionen.

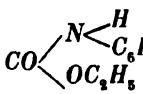
	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	10,0	9,1	19,1
2.	—	14,3	9,1	23,4
3.	—	13,4	9,1	22,5
4.	—	15,0	9,1	24,1

Wärmewerth

	des Urethans cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	4054,9	4459,8	396,9	99,94
2.	4138,9	4471,4	398,0	100,20
3.	4918,5	4461,8	397,1	99,98
4.	4769,7	4457,3	396,7	99,88
	Mittel	4462,6	397,4 für constant. Volum	
			397,5 » » Druck	
			126,2 Bildungswärme.	

Phenylcarbaminsäure-Aethylester. xv, 245.

Phenyl-Urethan.



$C_9H_{10}NO_2$ . . 165.

Von Dr. König, Leipzig, bezogenes Präparat, von uns aus unterhalb 50° siedendem Petroläther umkrystallisirt. Schmelzpunkt 51°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Phenyl-Urethan Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	1,0875	—	17,9050	15,2410	2,6640	2800	7459,2
2.	1,1056	—	17,8602	15,1519	2,7083	2800	7583,2
3.	1,0862	—	18,2106	15,5487	2,6619	2800	7453,3
4.	1,1516	—	18,5190	15,6964	2,8226	2800	7903,3

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	19,8	9,1	28,9
2.	—	22,6	9,1	31,7
3.	—	18,0	9,1	27,1
4.	—	22,0	9,1	31,1

Wärmewerth

	des Phenyl-Urethans cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	7430,3	6832,4	1127,3	99,98
2.	7551,5	6830,2	1127,0	99,95
3.	7426,2	6836,8	1128,1	100,04
4.	7872,2	6835,9	1127,9	100,03
	Mittel	6833,8	1127,6	für constant. Volum
			1128,3	» » Druck
			62,7	Bildungswärme.

Oxaminsäure-Methylester. xv, 61.

Oxamethylan.

$$\begin{matrix} CO.NH_2 \\ CO.OCH_3 \end{matrix} \qquad C_3H_5NO_3 \ldots . \ 103.$$

Darstellung. Oxalsäure-Methylester wurde in alkoholfreiem Aether gelöst und mit 1 Mol. methylalkoholischem Ammoniak versetzt und verdunstet. Der Rückstand wurde aus heissem Methylalkohol umkrystallisirt.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Oxaminsäure-Methyl Grm.	Zusatz Campher Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	1,02655	0,0012	17,3922	16,2987	1,0935	2804,6	3066,8
2.	1,0822	0,0017	17,2837	16,1332	1,1505	2804,6	3226,7
3.	1,1445	0,0018	18,3631	17,1453	1,2178	2804,6	3415,4
4.	1,0821	0,0019	18,2653	17,1110	1,1543	2804,6	3237,3
5.	1,0648	0,0010	17,9373	16,8056	1,1317	2804,6	3174,0
6.	0,9949	0,0013	17,6637	16,6056	1,0581	2804,6	2967,5
7.	1,0978	0,0019	16,3823	15,2134	1,1689	2804,6	3278,3

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	3,4	10,0	9,1	22,5
2.	4,8	11,0	9,1	24,9
3.	5,0	12,1	9,1	26,2
4.	5,3	11,3	9,1	25,7
5.	2,8	10,3	9,1	22,2
6.	3,6	10,4	9,1	23,1
7.	5,3	11,6	9,1	26,0

Wärmewerth

	des Oxaminsäure-Methyl cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	3044,3	2965,6	305,5	100,11
2.	3201,8	2958,6	304,7	99,88
3.	3389,2	2961,3	305,0	99,97
4.	3211,6	2968,0	305,7	100,20
5.	3151,8	2960,0	304,9	99,93
6.	2944,1	2959,5	304,8	99,91
7.	3252,3	2962,6	305,1	100,01
	Mittel	2962,2	305,1	für constant. Volum
			304,7	» » Druck
			149,8	Bildungswärme.

Oxaminsäure-Aethylester. XV, 49. 243.

Oxamaethan.

$C_2O_2\begin{matrix}NH_2\\OC_2H_5\end{matrix}$ $C_4H_7NO_3$ . . . 117.

Darstellung nach dem Verfahren von WEDDIGE [1]), durch Vermischen von 1 Mol. Oxalsäure-Aethylester in alkoholischer Lösung mit einer alkoholischen Lösung von 1 Mol. Ammoniak, bei einer Temperatur von 0°. Die ausgeschiedenen Krystalle wurden aus heissem Alkohol umkrystallisirt.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Oxaminsäure-Aethyl Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n-\vartheta_1)$ cal.
1.	1,0498	0,0039 (*Ca*)	18,1849	16,6994	1,4855	2804,6	4166,2
2.	1,07795	0,00345 »	17,5794	16,0561	1,5233	2804,6	4272,2
3.	1,0662	0,0049 (*Co*)	17,6219	16,1223	1,4996	2804,6	4205,8
4.	1,0372	—	16,6796	15,2203	1,4593	2800	4086,0
5.	0,9722	—	16,7234	15,3558	1,3676	2800	3829,3

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	36,2	14,9	9,1	60,2
2.	29,3	17,5	9,1	55,9
3.	13,6	14,9	9,1	37,6
4.	—	15,5	9,1	24,6
5.	—	15,0	9,1	24,1

1) Journ. f. prakt. Chem. [2] **10**, 196.

Wärmewerth

	des Oxaminsäure-Aethylesters cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	4106,0	3911,3	457,6	99,97
2.	4216,3	3911,4	457,6	99,97
3.	4168,2	3909,4	457,4	99,92
4.	4061,4	3915,8	458,1	100,09
5.	3805,2	3914,0	457,9	100,04
	Mittel	3912,4	457,8 für constant. Volum	
			457,7 » » Druck	
			459,8 Bildungswärme.	

Phenyl-Oxaminsäure-Aethylester. XV, 212.

Oxanilsäure-Aethylester.

$$\begin{matrix} CO.N<^{H}_{C_6H_5} \\ CO.OC_2H_5 \end{matrix} \qquad C_{10}H_{11}NO_3 \ldots 193.$$

Darstellung. Nach dem Verfahren von KLINGER[1]), durch Erhitzen von 1 Mol. Oxalsäure-Aethylester mit 1 Mol. Anilin am Rückflusskühler und Trennung von gleichzeitig gebildetem Oxanilid durch Alkohol. Zur Reinigung wurde der erhaltene Oxanilsäureester in Aether gelöst und aus der Lösung durch Petroläther gefällt. Schmelzpunkt 66°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Oxanilsäure-Aethylester Grm.	Zusatz Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	1,0745	—	18,2579	15,8336	2,3743	2800	6648,0
2.	1,0647	—	18,3788	16,0233	2,3555	2800	6595,4
3.	1,1230	—	18,5777	16,0945	2,4832	2800	6953,0
4.	0,9993	—	18,0779	15,8657	2,2122	2800	6194,2
5.	1,0220	—	18,4367	16,1756	2,2611	2800	6331,1

1) Ann. Chem. 184, 263.

Correctionen.

	Zusatz cal.	Salpetersäure cal.	Eisen cal.	Im Ganzen cal.
1.	—	9,5	9,1	18,6
2.	—	17,0	9,1	26,1
3.	—	15,8	9,1	24,9
4.	—	18,6	9,1	27,7
5.	—	17,1	9,1	26,2

Wärmewerth

	des Oxanilsäure-Aethylesters cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6629,7	6169,8	1190,8	100,00
2.	6569,3	6170,1	1190,8	100,00
3.	6928,1	6169,2	1190,7	99,99
4.	6466,5	6170,8	1191,0	100,02
5.	6204,9	6169,2	1190,7	99,99
	Mittel	6169,8	1190,8 für constant. Volum	
			1191,2 » » Druck	
			128,3 Bildungswärme.	

Anilin, Phenylamin. xv, 85.

$C_6H_5.NH_2$ C_6H_7N . . . . . 93.

Der Wärmewerth des Anilins ist bereits mehrfach ermittelt. Petit[1]) fand für das Gramm 8794 cal., für das Gramm-Molekül und constantes Volum 817,8 Cal., woraus sich für constanten Druck 818,5 Cal. ergiebt. Später wurde in unserem Laboratorium eine neue Bestimmung von Kleber ausgeführt, bei welcher die Zahlen 8731,6 cal. für das Gramm, 812,0 Cal. für constantes Volum und 812,7 Cal. für constanten Druck gefunden wurden.

Berücksichtigt man die Schwierigkeiten, welche die Rein-

1) Annales de Chim. et de Physique [6], 18, 149.

darstellung eines bei so hoher Temperatur siedenden Körpers bietet und die Möglichkeit einer, wenn auch nur geringen Verunreinigung, welche sehr erheblich das Resultat der Bestimmung beeinflussen muss, so sind obige Zahlen nicht allzu weit von einander entfernt. Man hätte sich bei vielen anderen Verbindungen daher mit einer aus diesen Bestimmungen abzuleitenden Durchschnittszahl vielleicht beruhigen können, wenn nicht gerade dem Anilin, als Ausgangsmaterial für alle Anilide und zahlreiche sonstige Verbindungen, eine besondere Wichtigkeit zukäme.

Dies bestimmte uns neue Bestimmungen vorzunehmen, um eine, soweit wie möglich, vollkommen zuverlässige Zahl zu erhalten. Dazu dienten uns verschiedene, von uns selbst gereinigte Präparate, die sämmtlich vor der Verbrennung sorgfältig mit Kalihydrat entwässert wurden.

Präparat A. Reinstes Anilin, von König, Leipzig, bezogen, wurde fractionirt und der constant bei 182,4° übergehende Antheil zu den Bestimmungen verwandt. Bestimmung 1 bis 4.

Präparat B. Das vorige wurde nochmals destillirt, wobei der Siedepunkt unverändert blieb. Bestimmung 5 und 6.

Präparat C. Durch Zersetzung von Oxanilid dargestellt. Siedepunkt 182,3°. Bestimmung 7 bis 9.

Präparat D. Reinstes Anilin, welches uns gütigst von den Höchster Farbwerken zur Verfügung gestellt wurde, wurde von uns nochmals über Kalihydrat getrocknet und fractionirt, bis dasselbe constant bei 182,4° unter einem Drucke von 760 mm überging. Bestimmung 10 bis 18.

Präparat E. Das vorige wieder von neuem destillirt. Bestimmung 19 bis 23.

Um das Zahlenmaterial nicht übermässig zu vermehren, mag es gestattet sein, in diesem Falle von der Wiedergabe der einzelnen Beläge abzusehen und nur die Resultate hier anzuführen.

Präparat A.

Wärmewerth pro Gramm:	1.	8698,8 cal.
	2.	8694,6 »
	3.	8696,3 »
	4.	8697,8 »
Mittel		8696,9 cal.

Wärmewerth pro Grm.-Mol. 808,8 Cal. für const. Vol.
809,5 Cal. für const. Druck.

Präparat B.

Wärmewerth pro Gramm: 5. 8698,0 cal.
6. 8722,5 »

Mittel 8710,2 cal.

Wärmewerth für Grm.-Mol. 810,0 Cal. für const. Vol.
810,7 Cal. für const. Druck.

Präparat C.

Wärmewerth pro Gramm: 7. 8721,0 cal.
8. 8725,8 »
9. 8720,1 «

Mittel 8722,3 cal.

Wärmewerth pro Grm.-Mol. 811,2 Cal. für const. Vol.
811,9 Cal. für const. Druck.

Präparat D.

Wärmewerth pro Gramm: 10. 8701,7 cal.
11. 8696,0 »
12. 8702,3 »
13. 8708,5 »
14. 8709,6 »
15. 8694,9 »
16. 8720,8 »
17. 8704,8 »
18. 8713,1 »

Mittel 8705,8 cal.

Wärmewerth pro Grm.-Mol. 809,7 Cal. für const. Vol.
810,4 Cal. für const. Druck.

Präparat E.

Wärmewerth pro Gramm: 19. 8712,0 cal.
20. 8716,8 »
21. 8715,1 »
22. 8721,8 »
23. 8709,9 »

Mittel 8715,1 cal.

Wärmewerth pro Grm.-Mol. 810,5 Cal. für const. Vol.
811,2 Cal. für const. Druck.

Hiernach ergiebt sich der allgemeine Durchschnitt:

	pro Gramm cal.	pro Grm.-Mol. const. Vol. Cal.	const. Druck Cal.
Präparat A.	8696,9	808,8	809,5
B.	8710,2	810,0	810,7
C.	8722,3	811,2	811,9
D.	8705,8	809,7	810,4
E.	8715,1	810,5	811,2
Hauptdurchschnitt	8710,0	810,0	810,7
		Bildungswärme	— 5,2

Die hier aus 23 Beobachtungen abgeleitete Zahl 810,7 Cal. für constanten Druck glauben wir als den richtigen Wärmewerth des Anilins betrachten zu dürfen und werden denselben allen späteren Berechnungen zu Grunde legen.

In Abhandlung XXXIV[1]), bei der Bildung der Anilide der einbasischen Säuren aus Anilin und Säuren, hatten wir als Werth des Anilins die Zahl 809,3 Cal. benutzt. Der geringe sich hieraus ergebende Fehler ist dementsprechend zu verbessern, wie es von uns schon in der im Journal für praktische Chemie[2]) erfolgten Veröffentlichung eines Auszuges derselben Arbeit geschehen ist.

1) Diese Berichte 1895, S. 35.
2) [2] 52, 71.

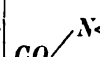
Zweiter Theil.

Abgeleitete Resultate.

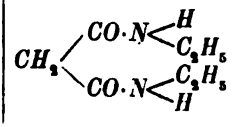
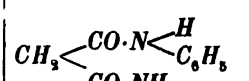
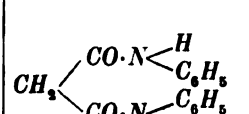
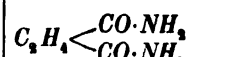
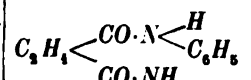
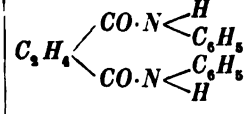
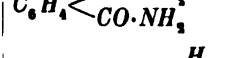
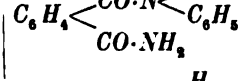
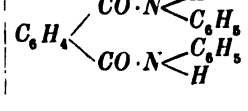
Uebersicht.

			Mol.-Gew. Grm.	Wärmewerth const. Druck Cal.	Bildungswärme Cal.
		A. Säuren.			
Oxalsäure[1])	$\begin{matrix}COOH\\COOH\end{matrix}$	$C_2H_2O_4$	90	60,2	196,8
Malonsäure[2])	$CH_2<\begin{matrix}COOH\\COOH\end{matrix}$	$C_3H_4O_4$	104	207,3	212,7
Bernsteinsäure[3]) . .	$C_2H_4<\begin{matrix}COOH\\COOH\end{matrix}$	$C_4H_6O_4$	118	356,8	226,2
Phtalsäure (Ortho)[4])	$C_6H_4<\begin{matrix}COOH\\COOH\end{matrix}$	$C_8H_6O_4$	166	771,6	187,4
Oxaminsäure	$\begin{matrix}CO\cdot NH_2\\COOH\end{matrix}$	$C_2H_3NO_3$	89	132,0	159,5
Oxanilsäure	$\begin{matrix}CO\cdot N<\begin{matrix}H\\C_6H_5\end{matrix}\\COOH\end{matrix}$	$C_8H_7NO_3$	165	863,1	130,4
Malonanilsäure. . . .	$CH_2<\begin{matrix}CO\cdot N<\begin{matrix}H\\C_6H_5\end{matrix}\\COOH\end{matrix}$	$C_9H_9NO_3$	179	1013,4	143,1
Succinanilsäure . . .	$C_2H_4<\begin{matrix}CO\cdot N<\begin{matrix}H\\C_6H_5\end{matrix}\\COOH\end{matrix}$	$C_{10}H_{11}NO_3$	193	1166,5	153,0
Phtalaminsäure . . .	$C_6H_4<\begin{matrix}CO\cdot NH_2\\COOH\end{matrix}$	$C_8H_7NO_3$	165	850,7	142,8
Phtalanilsäure	$C_6H_4<\begin{matrix}CO\cdot N<\begin{matrix}H\\C_6H_5\end{matrix}\\COOH\end{matrix}$	$C_{14}H_{11}NO_3$	241	1577,9	147,6

1) Journ. f. prakt. Chem. [2], **40**, 202.
2) Journ. f. prakt. Chem. [2], **40**, 206.
3) Journ. f. prakt. Chem. [2], **40**, 206.
4) Journ. f. prakt. Chem. [2], **40**, 188.

			Mol.-Gew. Grm.	Wärmewärth const. Druck Cal.	Bildun wärn Cal.
B. Amide und Anilide.					
Harnstoff[1])		CH_4N_2O	60	152,2	79
Monophenyl-Harnstoff		$C_7H_8N_2O$	136	880,0	54
Sym.Diphenyl-Harnstoff		$C_{13}H_{12}N_2O$	212	1612,8	23
Asym. Diphenyl-Harnstoff		$C_{13}H_{12}N_2O$	212	1614,2	21
Tetraphenyl-Harnstoff		$C_{26}H_{20}N_2O$	364	3075,0	— 35
Oxamid		$C_2H_4N_2O_2$	88	203,3	12
Phenyloxamid		$C_8H_8N_2O_2$	164	937,5	9
Oxanilid		$C_{14}H_{12}N_2O_2$	240	1665,4	6
Malonamid		$C_3H_6N_2O_2$	102	358,8	13
Dimethyl-Malonamid		$C_5H_{10}N_2O_2$	130	686,0	12

[1]) Journ. f. prakt. Chem. [2], 44, 387.

			Mol.-Gew. Grm.	Wärmewerth const. Druck Cal.	Bildungswärme Cal.
Diäthyl-Malonamid.		$C_7H_{14}N_2O_2$	158	995,1	145,9
Monophenyl-Malonamid, wasserfrei		$C_9H_{10}N_2O_2$	178	1088,9	102,1
Monophenyl-Malonamid, krystallisirt		$C_9H_{10}N_2O_2 \cdot \frac{1}{2}H_2O$	187	1088,7	136,8
Diphenyl-Malonamid		$C_{15}H_{14}N_2O_2$	254	1818,0	75,0
Succinamid.		$C_4H_8N_2O_2$	116	509,7	142,3
Monophenyl-Succinamid.		$C_{10}H_{12}N_2O_2$	192	1244,6	109,4
Succinanilid		$C_{16}H_{16}N_2O_2$	268	1971,3	84,7
Phtalamid.		$C_8H_8N_2O_2$	164	921,7	106,3
Phenylphtalamid . .		$C_{14}H_{12}N_2O_2$	240	1651,1	78,9
Diphenylphtalamid		$C_{20}H_{16}N_2O_2$	316	2383,2	48,8

			Mol.-Gew. Grm.	Wärmewerth const. Druck Cal.	Bildungswärme Cal.
		C. Imide.			
Succinimid	$C_2H_4<\begin{matrix}CO\\CO\end{matrix}>NH$	$C_4H_5NO_2$	99	438,1	110,
Phenyl-Succinimid.	$C_2H_4<\begin{matrix}CO\\CO\end{matrix}>N.C_6H_5$	$C_{10}H_9NO_2$	175	1168,5	82,
Phtalimid	$C_6H_4<\begin{matrix}CO\\CO\end{matrix}>NH$	$C_8H_5NO_2$	147	850,2	74,
Phenyl-Phtalimid. .	$C_6H_4<\begin{matrix}CO\\CO\end{matrix}>N.C_6H_5$	$C_{14}H_9NO_2$	223	1579,1	47,
		D. Ammonium- und Anilinsalze.			
Oxalsaures Ammonium.	$C_2O_2<\begin{matrix}ONH_4\\ONH_4\end{matrix}$	$C_2H_8N_2O_4$	124	493,8	270,
Malonsaures Ammonium. . , ...	$CH_2<\begin{matrix}CO.ONH_4\\CO.ONH_4\end{matrix}$	$C_3H_{10}N_2O_4$	138	349,6	277,
Bernsteinsaures Ammonium.	$C_2H_4<\begin{matrix}CO.ONH_4\\CO.ONH_4\end{matrix}$	$C_4H_{12}N_2O_4$	152	502,8	287,
Phtalsaures Ammonium.	$C_6H_4<\begin{matrix}CO.ONH_4\\CO.ONH_4\end{matrix}$	$C_8H_{12}N_2O_4$	200	923,0	243,
Oxalsaures Anilin .	$C_2O_2<\begin{matrix}ONH_3.C_6H_5\\ONH_3.C_6H_5\end{matrix}$	$C_{14}H_{16}N_2O_4$	276	1662,3	205,
		E. Ester.			
Carbaminsäure-Aethylester	$CO<\begin{matrix}NH_2\\OC_2H_5\end{matrix}$	$C_3H_7NO_2$	89	397,5	126
Phenylcarbaminsäure-Aethylester	$CO<\begin{matrix}N<\begin{matrix}H\\C_6H_5\end{matrix}\\OC_2H_5\end{matrix}$	$C_9H_{11}NO_2$	165	1128,3	62
Oxaminsäure-Methylester	$C_2O_2<\begin{matrix}NH_2\\OCH_3\end{matrix}$	$C_3H_5NO_3$	103	304,7	149

			Mol.-Gew. Grm.	Wärmewerth const. Druck cal.	Bildungswärme cal.
Oxaminsäure-Aethylester	$C_2O_2\langle^{NH_2}_{OC_2H_5}$	$C_4H_7NO_3$	117	457,7	159,8
Phenyl-Oxaminsäure-Aethylester	$C_2O_2\langle^{N\langle^{H}_{C_6H_5}}_{OC_2H_5}$	$C_{10}H_{11}NO_3$	193	1191,2	128,3
F. Ammoniak und Anilin.					
Ammoniak (Gas) [1] .	NH_3	NH_3	17	90,6	12,9
» (flüssig) [1]	NH_3	NH_3		85,2	18,3
Anilin.	$N\langle^{H_2}_{C_6H_5}$	C_6H_7N	93	810,7	— 5,2

Isomerie.

Unter unseren Verbindungen haben wir drei Paare von Isomeren, von denen jedes gleiche empirische Zusammensetzung, aber sehr verschiedenen Wärmewerth besitzt. Es sind dies:

Oxanilsäure	$C_8H_7NO_3$	. . . .	863,1 Cal.
Phtalaminsäure		. . . .	850,7 Cal.
Phenyloxamid	$C_8H_8N_2O_2$	. . . .	937,5 Cal.
Phtalamid		. . . .	921,7 Cal.
Oxanilid	$C_{14}H_{12}N_2O_2$	. . . .	1665,4 Cal.
Phenyl-Phtalamid		. . . .	1651,1 Cal.

Für die beiden ersten Säuren erklärt sich die Verschiedenheit auf einfachste Weise durch ihre Stärke, d. i. durch ihren verschiedenen Gehalt an chemischer Energie. Während die Oxanilsäure eine starke Säure ist, so ist Phtalaminsäure eine sehr viel schwächere Säure. Die Constante des elektrischen Leitvermögens ist bei beiden nach Ostwald [2])

1) Ber. Kön. Ges. d. Wiss. 1894,8.
2) Zeitschr. f. physik. Chem. 3, 387, 397.

	K
Oxanilsäure	1,21
Phtalaminsäure	0,016.

Die Oxanilsäure ist daher 76 mal stärker als die Phtalaminsäure und enthält also auch ungleich mehr chemische Energie als diese, wodurch deren Gesammtenergie erhöhet werden muss, wie mehrfach von uns nachgewiesen worden ist.

Ausserdem kommen bei sämmtlichen Verbindungen noch gemeinschaftliche Constitutionsverschiedenheiten in Betracht, wie sich aus folgender Zusammenstellung ergiebt.

Verbindungen mit hohem Wärmewerth:

Oxanilsäure . . . $C_2O_2\begin{cases} N<\begin{matrix}H\\C_6H_5\end{matrix} \\ OH \end{cases}$

Phenyloxamid . . $C_2O_2\begin{cases} N<\begin{matrix}N\\C_6H_5\end{matrix} \\ NH_2 \end{cases}$

Oxanilid . . . . . $C_2O_2\begin{cases} N<\begin{matrix}H\\C_6H_5\end{matrix} \\ N<\begin{matrix}C_6H_5\\H\end{matrix} \end{cases}$

Verbindungen mit geringem Wärmewerth:

Phtalaminsäure . $C_6H_4<\begin{matrix}CO.NH_2\\COOH\end{matrix}$

Phtalamid . . . . $C_6H_4<\begin{matrix}CO.NH_2\\CO.NH_2\end{matrix}$

Phenyl-Phtalamid $C_6H_4\begin{cases} CO.N<\begin{matrix}H\\C_6H_5\end{matrix} \\ CO.NH_2 \end{cases}$

Die hier in Betracht kommenden isomeren Verbindungen von hohem Wärmewerthe unterscheiden sich daher dadurch von denen von geringem Wärmewerthe, dass erstere ausnahmslos die durch Phenyl substituirte Amidgruppe enthalten; diese kommt zwar im Phenyl-Phtalamid ebenfalls vor, aber das ihm isomere Oxanilid enthält diese Gruppe zweimal, während sie im Phenyl-Phtalamid nur einmal auftritt.

Auf den Einfluss, welchen der Eintritt der negativen Phenylgruppe auf die elektrische Leitfähigkeit ausübt, ist bereits mehr-

fach von Ostwald hingewiesen worden. Da die elektrische Leitfähigkeit aber nur ein Ausdruck für die Aviditätsgrösse der Säuren ist, und da die Aviditätsgrösse wieder nur durch die Menge von chemischer Energie der betreffenden Verbindung bedingt ist, und da die chemische Energie nur ein Theil der Gesammtenergie einer Verbindung ist, so muss alles, was zur Steigerung der Energie beiträgt, auch eine Erhöhung des Wärmewerthes, der nur ein Maass der Energie ist, bedingen. Wir haben in Früherem vielfach Gelegenheit gehabt, auf den innigen Zusammenhang zwischen dem Gehalte an chemischer Energie und Wärmewerth hinzuweisen.

Vielleicht kommt aber in noch höherem Maasse in Betracht, dass die sämmtlichen Körper, deren Wärmewerth ein hoher ist, Derivate der Oxalsäure, während die anderen Derivate der Ortho-Phtalsäure sind. Die Ortho-Phtalsäure, obgleich selbst eine recht starke Säure, ist doch viel schwächer als die Oxalsäure; die Constanten des elektrischen Leitvermögens beider verhalten sich wie 10,0 : 0,121 oder wie 82 : 1. Da nun der Energiegehalt zweier Verbindungen, wie vielfach gezeigt ist, in unmittelbarem Zusammenhange mit dem Wärmewerthe steht, und da dieser sich auch in den Derivaten, wiewohl im abgeschwächten Verhältniss noch wiederfindet, wie sich aus Späterem ergiebt, so wird auch der hohe Werth der Derivate der Oxalsäure verständlich.

Ausserdem haben wir noch zwei Isomere: den symmetrischen und den asymmetrischen Diphenyl-Harnstoff, von denen der erstere einen Wärmewerth von 1612,8 Cal., der letztere einen Wärmewerth von 1614,2 Cal. hat. Unbedeutend wie diese Verschiedenheiten sind, so entsprechen sie doch der früher schon erkannten Gesetzmässigkeit, nach welcher isomere Körper sich in ihrem Wärmewerthe umgekehrt wie in ihren Schmelzpunkten verhalten. Dies trifft auch hier zu, wie folgende Zahlen beweisen:

	Schmelzpunkt	Wärmewerth
Symmetrischer Diphenyl-Harnstoff	238°	1612,8 Cal.
Asymmetrischer Diphenyl-Harnstoff	189°	1614,2 Cal.

Homologie.

Die Anfangsglieder der Oxalsäurereihe: Oxalsäure, Malonsäure und Bernsteinsäure, nehmen in thermischer Beziehung

eine besondere Stellung ein, insofern als sie nicht die bei den anderen Säuren beobachteten Verschiedenheiten des Wärmewerthes von 156,6 Cal., sondern weit geringere Differenzen zeigen, worauf schon in den Abhandlungen XIX [1]) und XXX [2]) aufmerksam gemacht ist. Die drei Säuren haben nämlich folgende Wärmewerthe und zeigen folgende Differenzen:

Oxalsäure	60,2 Cal.	147,1 Cal.
Malonsäure	207,3 »	149,5 »
Bernsteinsäure	356,8 »	

Eine Erklärung für diese scheinbare Anomalie haben wir darin gefunden, dass der Wärmewerth dieser Säuren durch ihre grosse chemische Energie beeinflusst ist, insofern als die Oxalsäure eine viel stärkere Säure ist als die Malonsäure und diese wieder die Bernsteinsäure bedeutend übertrifft; genauer steht das elektrische Leitvermögen, das Maass für die Grösse der chemischen Energie, bei den drei Säuren im Verhältniss wie 10 : 0,158 : 0,00665 oder wie 1500 : 24 : 1.

Indem diese Säuren in die Anilsäuren übergeführt werden, wird zugleich deren elektrisches Leitvermögen, also auch ihre chemische Energie, erheblich abgeschwächt. Wenn daher unsere Annahme: es stehe der anormale Wärmewerth der Oxal-, Malon- und Bernsteinsäure in Beziehung zu ihrem hohen Gehalt an chemischer Energie, richtig ist, so muss der Wärmewerth der entsprechenden Anilsäuren sich mehr dem Normalen nähern. Wie weit dieses der Fall ist, ergiebt sich aus folgender Zahlenreihe, welche den Wärmewerth der drei hierher gehörenden Anilsäuren umfasst:

Oxanilsäure	863,1 Cal.	150,3 Cal.
Malonanilsäure	1013,4 »	153,1 »
Succinanilsäure	1166,5 »	

In dem Maasse wie die chemische Energie abgeschwächt wird, nähern sich daher die Differenzen der Wärmewerthe auch den Normalen, wodurch unsere früheren Vermuthungen bestätigt werden.

Ein Gleiches findet statt bei der Umwandlung der betreffenden Säuren in deren Amide, Anilide und Ammoniumsalze:

---

1) Journ. f. prakt. Chem. [2], 40, 219.

2) Ber. kön. Ges. d. W. 1893, S. 641; Journ. f. prakt. Chem. [2], 49, 108.

Oxamid	203,5 Cal.		
Malonamid	358,8 »	. . . . .	155,5 Cal.
Succinamid	509,7 »	. . . . .	150,9 »
Oxanilid	1665,4 Cal.		
Malonanilid	1818,0 »	. . . . .	152,6 Cal.
Succinanilid	1971,3 »	. . . . .	153,3 »
Phenyl-Oxamid	937,5 Cal.		
Phenyl-Malonamid	1088,9 »	. . . . .	151,4 Cal.
Phenyl-Succinamid	1244,6 »	. . . . .	155,7 »
Ammonium-Oxalat	193,8 Cal.		
Ammonium-Malonat	349,6 »	. . . . .	155,8 Cal.
Ammonium-Succinat	502,8 »	. . . . .	153,2 »

Wir haben daher hier überall eine Annäherung an die normalen Werthe, ohne diese aber ganz zu erreichen. Ja, der Einfluss des eigenthümlichen Charakters der Säure macht sich in gewissem Grade noch geltend bei der Substitution von Alkylradicalen in der Amidgruppe. Nach Früherem haben wir den Werth für die Substitution eines Methyls, wenn dieses an Stickstoff gebunden ist, von 166,6 Cal. zu erwarten[1]), für die Substitution eines Methyls, bei der Bindung an Kohlenstoff, von 156,6 Cal. Demnach würde der Werth eines an Stickstoff gebundenen Aethyls 166,6 + 156,6, also 323,2 Cal. betragen.

Wie weit dieses hier zutrifft, ergiebt sich aus der Vergleichung des Malonamids mit dem Dimethyl-Malonamid und mit dem Diaethyl-Malonamid:

Malonamid	358,8 Cal.		
Dimethyl-Malonamid	686,0 »	. . . .	2 · 163,6 Cal.
Malonamid	358,8 Cal.		
Diaethyl-Malonamid	995,1 »	. . . .	2 · 318,15 Cal.
Dimethyl-Malonamid	686,0 Cal.		
Diaethyl-Malonamid	995,1 »	. . . .	2 · 154,5 Cal.

Wir finden daher für

die Bindung eines Methyls an Kohlenstoff 154,5 statt 156,6 Cal.;
die Bindung eines Methyls an Stickstoff 163,6 statt 166,6 Cal.;
die Bindung eines Aethyls an Stickstoff 318,15 statt 323,2 Cal.

Die beobachteten Abweichungen sind allerdings nicht sehr

1) Ber. kön. Ges. d. W. 1895, S. 82; Journ. f. prakt. Chem. [2], 52, 68.

gross, aber doch ausserhalb der Grenze der Beobachtungsfehler liegend und sie gewinnen dadurch, dass sie immer im gleichen Sinne sich bewegen, sehr an Bedeutung.

Auch bei dem Methyl- und Aethylester der Oxaminsäure kommt nicht der volle Werth der substituirten Methylgruppe zur Geltung, denn wir finden:

Oxaminsäure-Methylester . .	304,7 Cal.	. . 153,0 Cal.
Oxaminsäure-Aethylester . .	457,7 »	

Bei den Amiden und Aniliden der einbasischen Säuren kommen die Abweichungen bei den Homologen, mit Ausnahme des ersten Gliedes der Reihe, nicht vor, wie aus den Zusammenstellungen in Abhandlung XXXIV [1]) hervorgeht.

Bildung der Aminsäuren und der Amide.

Bei den zweibasischen Säuren erfolgt die Amidirung in zwei auf einander folgenden Stadien. Im ersten lagert sich, unter Abspaltung der Elemente von 1 Mol. Wasser, 1 Mol. Ammoniak an die Säure, wobei eine Aminsäure entsteht; im zweiten Stadium wiederholt sich der gleiche Process, unter Bildung eines Amides. So geht die Oxalsäure nacheinander in Oxaminsäure und in Oxamid über, nach folgenden Gleichungen:

$$C_2H_2O_4 + NH_3 = C_2H_3NO_3 + H_2O$$
$$C_2H_3NO_3 + NH_3 = C_2H_4N_2O_2 + H_2O\,.$$

Dabei erfahren die Producte des Processes folgende Erhöhung ihres Wärmewerthes:

Oxalsäure	60,2 Cal.	. . . 71,8 Cal.
Oxaminsäure	132,0 »	. . . 71,3 »
Oxamid	203,3 »	
Phtalsäure	771,6 Cal.	. . . 79,1 Cal.
Phtalaminsäure	850,7 »	. . . 71,0 »
Phtalamid	921,7 »	

Die Malonaminsäure ist nicht bekannt, die Succinaminsäure fehlt uns leider; dagegen verfügen wir über die ganze Reihe der Anilsäuren und deren Amide. Bei diesen haben wir folgenden Zuwachs der Wärmewerthe:

---

1) Ber. kön. Ges. d. W. 1895, S. 25; Journ. f. prakt. Chem. [2], 52, 64.

Oxanilsäure	863,1 Cal.	
Phenyl-Oxamid	937,5 »	74,4 Cal.
Malonanilsäure	1013,4 Cal.	
Phenyl-Malonamid	1088,9 »	75,5 Cal.
Succinanilsäure	1166,5 Cal.	
Phenyl-Succinamid	1244,6 »	78,1 Cal.
Phtalanilsäure	1577,9 Cal.	
Phenyl-Phtalamid	1651,1 »	73,2 Cal.

Von der Malon- und Bernsteinsäure können wir die Wärmetönung beim Uebergange zu deren Amiden berechnen, wenn wir von den uns fehlenden Zwischenstufen absehen und den Werth der betreffenden Amide von den Säuren und 2 Mol. Ammoniak, unter Abspaltung von 2 Mol. Wasser, ableiten:

Malonsäure	207,3 Cal.	
Malonamid	358,8 »	$2 \cdot 75{,}75$ Cal.
Bernsteinsäure	356,8 Cal.	
Succinamid	509,7 »	$2 \cdot 76{,}45$ Cal.

Der mittlere Zuwachs des Wärmewerthes beim Uebergange der zweibasischen Säuren in deren Amide beträgt daher zweimal 74,9 Cal. Bei den einbasischen Säuren hatten wir für die gleiche Reaction 75,9 Cal. gefunden[1]). Abhandlung XXXIV.

Wenn hiernach der mittlere Werth der Bildung der Amide aus den zweibasischen Säuren sich zu $2 \cdot 74{,}9$ Cal. ergiebt, so würde man den wahrscheinlichen Wärmewerth der Kohlensäure aus dem bekannten Werthe ihres Amides, des Carbamids oder Harnstoffs, ableiten können. Der Wärmewerth des Harnstoffs ist 152,2 Cal. Da nun die Amide der zweibasischen Säuren einen um $2 \cdot 74{,}9$ Cal. höheren Wärmewerth als deren Säuren besitzen, so würde hiernach der Wärmewerth der zweibasischen Kohlensäure $152{,}2 - 74{,}9 \cdot 2 = 2{,}4$ Cal. betragen. Wir haben diesen Werth bereits vor langer Zeit, als noch wenig Bestimmungen vorlagen, auf gleiche Weise berechnet und denselben damals negativ zu 5,0 Cal. gefunden. Abhandlung XXV[2]).

Für die Wärmetönung der oben angeführten Gesammtprocesse ergeben sich folgende Werthe, wenn der Werth des flüssigen Ammoniaks mit 85,2 Cal. in die Gleichungen eingeführt

1) Ber. kön. Ges. d. W. 1895, S. 33; Journ. f. prakt. Chem. [2], 52, 69.
2) Journ. f. prakt. Chem. [2], 44, 398.

wird. Wir verwenden den Werth für flüssiges Ammoniak, um einen besseren Vergleich mit den unten zu besprechenden Aniliden zu haben.

Oxalsäure $C_2H_2O_4 + NH_3 = C_2H_3NO_3 + H_2O \cdots + 13{,}4$ Cal.
$60{,}2 + 85{,}2 = 132{,}0$

Oxaminsäure $C_2H_3NO_3 + NH_3 = C_2H_4N_2O_2 + H_2O \cdots + 13{,}9$ Cal.
$132{,}0 + 85{,}2 \quad 203{,}3$

Phtalsäure $C_8H_6O_4 + NH_3 = C_8H_7NO_3 + H_2O \cdots + 6{,}1$ Cal.
$774{,}6 + 85{,}2 \quad 850{,}7$

Phtalaminsäure $C_8H_7NO_3 + NH_3 = C_8H_8N_2O_2 + H_2O \cdots + 14{,}2$ Cal.
$850{,}7 + 85{,}2 \quad 924{,}7$

Oxanilsäure $C_8H_7NO_3 + NH_3 = C_8H_8N_2O_2 + H_2O \cdots + 10{,}8$ Cal.
$863{,}1 + 85{,}2 \quad 937{,}5$

Malonanilsäure $C_9H_9NO_3 + NH_3 = C_9H_{10}N_2O_2 + H_2O \cdots + 9{,}7$ Cal.
$1013{,}4 + 85{,}2 \quad 1088{,}9$

Succinanilsäure $C_{10}H_{11}NO_3 + HN_3 = C_{10}H_{12}N_2O_2 + H_2O \cdots + 7{,}1$ Cal.
$1166{,}5 + 85{,}2 \quad 1244{,}6$

Phtalanilsäure $C_{14}H_{11}NO_3 + NH_3 = C_{14}H_{12}N_2O_2 + H_2O \cdots + 12{,}0$ Cal.
$1577{,}9 + 85{,}2 \quad 1651{,}1$

Malonsäure $C_3H_4O_4 + 2NH_3 = C_3H_6N_2O_2 + 2H_2O + 2 \cdot 9{,}45$ Cal.
$207{,}3 + 2 \cdot 85{,}2 \quad 358{,}8$

Bernsteinsäure $C_4H_6O_4 + 2NH_3 = C_4H_8N_2O_2 + 2H_2O \cdots + 2 \cdot 8{,}25$ Cal.
$356{,}8 + 2 \cdot 85{,}2 \quad 509{,}7$

Der Process verläuft daher in allen Fällen exotherm, unter Freiwerden einer Wärmemenge von durchschnittlich 10,2 Cal.

Bei der Berechnung der Bildungswärme der Amide der einbasischen Säuren hatten wir mit gasförmigem Ammoniak vom Wärmewerthe 90,6 Cal. gerechnet und als mittlere Wärmetönung den Werth von 15,2 Cal. gefunden[1]). Abhandlung XXXIV. Reduciren wir dieses auf flüssiges Ammoniak, so ergiebt sich die mittlere Wärmetönung zu 9,8 Cal.; wir kommen also fast genau zu demselben Werth, welcher sich aus den Amiden der zweibasischen Säuren ableitet.

Bildung der Anilsäuren und der Anilide.

Die Bildung dieser Verbindungen erfolgt auf ganz gleiche Weise, wie die der Aminsäuren und die der Amide, indem sich

1) Ber. kön. Ges. d. W. 1895, S. 34; Journ. f. prakt. Chem. [2], 52, 70.

an 1 Mol. der zweibasischen Säure zuerst 1 Mol. Anilin unter Bildung einer Anilsäure, und dann ein zweites Mol. Anilin, unter Bildung eines Anilids, jedesmal unter Austritt der Elemente von 1 Mol. Wasser, anlagert, nach folgenden Gleichungen:

$$C_2H_2O_4 + C_6H_7N = C_8H_7NO_3 + H_2O$$
$$C_8H_7NO_3 + C_6H_7N = C_{14}H_{12}N_2O_2 + H_2O.$$

Die dabei eintretende Wärmetönung beträgt:

Oxalsäure	60,2 Cal.		
Oxanilsäure	863,1 »	. . .	802,9 Cal.
Oxanilid	1665,4 »	. . .	802,3 »
Malonsäure	207,3 Cal.		
Malonanilsäure	1013,4 »	. . .	806,1 Cal.
Malonanilid	1818,0 »	. . .	804,6 »
Bernsteinsäure	356,8 Cal.		
Succinanilsäure	1166,5 »	. . .	809,7 Cal.
Succinanilid	1971,3 »	. . .	804,8 »
Phtalsäure	771,6 Cal.		
Phtalanilsäure	1577,9 »	. . .	806,3 Cal.
Phtalanilid	2383,2 Cal.	. . .	805,3 »
Oxaminsäure	132,0 Cal.		
Phenyl-Oxamid	937,5 »	. . .	805,5 Cal.
Phtalaminsäure	850,7 Cal.		
Phenyl-Phtalamid	1654,1 »	. . .	800,4 Cal
Kohlensäure	2,4 Cal.		
Symm. Diphenyl-Harnstoff	1612,8 »	. .	2·805,2 Cal.

Der mittlere Zuwachs des Wärmewerthes beträgt daher bei den zweibasischen Säuren bei dem Uebergange derselben zu den Anilsäuren und den Aniliden je 804,9 Cal. Bei den einbasischen Säuren hatten wir für den Uebergang der Säuren in ihre Anilide einen Zuwachs von 804,6 Cal., also wesentlich den gleichen Werth gefunden[1]).

Für die Wärmetönung der oben angeführten Gesammtprocesse ergeben sich folgende Werthe:

$$\underset{60,2}{\text{Oxalsäure } C_2H_2O_4} + \underset{+\ 810,7}{C_6H_7N} = \underset{863,1}{C_8H_7NO_3} + H_2O \cdots + 7,8 \text{ Cal.}$$

1) Ber. kön. Ges. d. W. 1895, S. 85; Journ. f. prakt. Chem. [2], 52, 70.

Oxanilsäure $C_8H_7NO_3 + C_6H_7N = C_{14}H_{12}N_2O_2 + H_2O \cdots + 8{,}4$ Cal.
863,1 + 840,7 1665,4

Malonsäure $C_3H_4O_4 + C_6H_7N = C_9H_9NO_3 + H_2O \cdots + 4{,}6$ Cal.
207,8 + 840,7 1043,4.

Malonanilsäure $C_9H_9NO_3 + C_6H_7N = C_{15}H_{14}N_2O_2 + H_2O \cdots + 6{,}1$ Cal.
1043,4 + 840,7 1848,0

Bernsteinsäure $C_4H_6O_4 + C_6H_7N = C_{10}H_{11}NO_3 + H_2O \cdots + 1{,}0$ Cal.
356,8 + 840,7 1466,5

Succinanilsäure $C_{10}H_{11}NO_3 + C_6H_7N = C_{16}H_{16}N_2O_2 + H_2O \cdots + 5{,}9$ Cal.
1466,5 + 840,7 1971,3

Phtalsäure $C_8H_6O_4 + C_6H_7N = C_{14}H_{11}NO_3 + H_2O \cdots + 4{,}4$ Cal.
771,6 + 840,7 1577,9.

Phtalanilsäure $C_{14}H_{11}NO_3 + C_6H_7N = C_{20}H_{16}N_2O_2 + H_2O \cdots + 5{,}4$ Cal.
1577,9 + 840,7 2383,2

Oxaminsäure $C_2H_3NO_3 + C_6H_7N = C_8H_8N_2O_2 + H_2O \cdots + 5{,}2$ Cal.
132,0 + 840,7 937,5

Phtalaminsäure $C_8H_7NO_3 + C_6H_7N = C_{14}H_{12}N_2O_2 + H_2O \cdots + 10{,}3$ Cal.
850,7 + 840,7 1651,1

Kohlensäure $CH_2O_3 + 2C_6H_7N = C_{13}H_{12}N_2O + 2H_2O \cdots + 2 \cdot 5{,}5$ Cal.
2,4 + 2 · 840,7 1642,8

Die Wärmetönung ist hier ebenfalls exotherm und beträgt durchschnittlich 5,8 Cal. Bei der Bildung der Anilide der einbasischen Säuren hatten wir 6,0 Cal. gefunden. Abhandlung XXXIV [1]).

Die durchschnittliche Wärmetönung bei der Bildung der Aminsäuren und der Amide haben wir zu 10,2 Cal. gefunden. (S. S. 64.) Sie liegt daher bei den Anilsäuren und Aniliden um 4,4 Cal. tiefer als bei diesen.

Bildung der Amide und Anilide aus den Ammonium- resp. Anilinsalzen.

Die Bildung der Amide und Anilide der zweibasischen Säuren erfolgt aus deren Ammonium- resp. Anilinsalzen unter Abspaltung der Elemente von je 2 Mol. Wasser, wofür folgende Bildungsgleichungen einen Ausdruck geben:

---

1) Journ. f. prakt. Chem. [2]. **52**, 71.

Bildung des Oxamids.

$$\underset{198,8}{C_2H_8N_2O_4} = \underset{202,3}{C_2H_4N_2O_2} + 2H_2O \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot - 2 \cdot 4{,}75 \text{ Cal.}$$

Bildung des Malonamids.

$$\underset{349,6}{C_3H_{10}N_2O_4} = \underset{358,8}{C_3H_6N_2O_2} + 2H_2O \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot - 2 \cdot 4{,}6 \text{ Cal.}$$

Bildung des Succinamids.

$$\underset{502,8}{C_4H_{12}N_2O_4} = \underset{509,7}{C_4H_8N_2O_2} + 2H_2O \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot - 2 \cdot 3{,}95 \text{ Cal.}$$

Bildung des Phtalamids.

$$\underset{923,0}{C_8H_{12}N_2O_4} = \underset{924,7}{C_8H_8N_2O_2} + 2H_2O \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + 2 \cdot 0{,}65 \text{ Cal.}$$

Bildung des Oxanilids.

$$\underset{1662,3}{C_{14}H_{16}N_2O_4} = \underset{1665,4}{C_{14}H_{12}N_2O_2} + 2H_2O \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot - 1{,}55 \text{ Cal.}$$

Mit einer Abspaltung der Elemente des Wassers haben wir es ebenfalls bei der Bildung der Aminsäuren und Amide, bei der Bildung der Anilsäuren und Anilide aus den betreffenden Säuren zu thun, aber es verlaufen jene Processe regelmässig unter Freiwerden von Energie, unter Wärmeentwickelung, also exotherm, während die Bildung der Amide und Anilide aus den Ammonium- und aus den Anilinsalzen, mit Ausnahme des Phtalamids, unter Aufnahme von Energie, unter Bindung von Wärme, also endotherm, erfolgt.

Die endotherme Reaction ist der normale Vorgang.

Die Aufnahme von Wasser seitens einer wasserfreien Verbindung ist exotherm. Bei der Aufnahme von Krystallwasser wird Wärme frei, bei allen hydrolytischen Vorgängen geht Energie verloren. Werden diese Processe aber umgekehrt, geht eine Krystallwasser enthaltende Verbindung in den wasserfreien Zustand über, wird ein Alkohol in den zugehörigen Aether verwandelt, werden die durch hydrolytische Processe gespaltenen Producte in die Ausgangsstoffe zurückgeführt, so erfolgt dies stets unter Vermehrung des Wärmewerthes, unter Aufspeicherung von Energie, endotherm.

Die bei der Bindung von Krystallwasser und bei den hydrolytischen Processen eintretende Wärmetönung haben wir schon in Abhandlung XXVI[1]) erwiesen. Auch hier haben wir einen

1) Journ. f. prakt. Chem. [2], 45, 342.

neuen Beweis für dieselbe in dem Monophenyl-Malonamid, welches einmal wasserfrei und das andere Mal krystallisirt, mit ½ Mol. Wasser verbunden, untersucht wurde. Sind die Differenzen hier auch verschwindend klein, in das Bereich der Beobachtungsfehler fallend, so treten sie doch hervor.

Wenn wir nun bei der Bildung der Amide u. s. w. aus den Säuren, trotzdem dabei eine Abspaltung der Elemente des Wassers erfolgt, eine exotherme Reaction eintreten sehen, so haben wir nach der Ursache dieser Erscheinung zu forschen. Diese ist dadurch begründet, dass die Bildung der Amide u. s. w. aus den Säuren kein einfacher Vorgang ist, sondern sich zusammensetzt aus der Entstehung der Ammonium- resp. Anilinsalze, wobei die in Reaction tretenden Säuren ihre gesammte chemische Energie verlieren, während im zweiten Stadium die Ammonium- resp. Anilinsalze erst bei der Umwandlung zur Wasserabspaltung und zur Bildung der Amide kommen.

Für jedes Molekül Ammoniak, welches sich mit Oxalsäure verbindet, gehen, wie S. 72 gezeigt wird, 18,4 Cal. verloren, für jedes Ammoniak, welches in Malonsäure eintritt, 14,05 Cal., bei der Bernsteinsäure beträgt der Energieverlust 12,2 Cal. u. s. f. Es muss daher beim weiteren Verlauf des Processes, bei der Bildung der Amide und Anilide, ein Zutritt von Energie erfolgen, um die Bildung der Amide und Anilide zu ermöglichen und dadurch kommt der normale Bildungsprocess zur Geltung.

Die, allerdings geringfügige, Ausnahme von der allgemeinen Regel, welche sich beim Phtalamid zeigt, vermögen wir nicht zu erklären.

Beziehungen der Amide zu den Aniliden.

Die Amide unterscheiden sich von den Aniliden dadurch, dass in letzteren 1 At. Wasserstoff durch die Phenylgruppe ersetzt ist. Bei dem Studium der Amide und Anilide der einbasischen Säuren hatten wir gefunden[1]), dass mit dem Uebergange der einen Körpergruppe in die andere ein Energiezuwachs von durchschnittlich 729,3 Cal. (Minimum 728,1, Maximum 732,0 Cal.) verbunden ist.

Die vorliegende Arbeit bietet uns Gelegenheit, die gleiche

1) Ber. kön. Ges. d. W. 1895, S. 27; Journ. f. prakt. Chem. [2], 52, 64.

Reaction weiter zu verfolgen und zwar nicht allein bei den eigentlichen Amiden und Aniliden, sondern auch bei einigen hierher gehörenden Säuren, ferner bei Imiden und bei Ammonium- und Anilinsalzen. Es gewährt daher diese Arbeit weiteren Aufschluss über den Vertretungswerth der Phenylgruppe in sehr verschiedenen Verbindungen, welche jedoch sämmtlich das Gemeinsame haben, dass in den hier in Frage kommenden Stoffen das Phenyl ausnahmslos an Stickstoff gebunden ist.

Das einfachste in Betracht zu ziehende Beispiel wird durch das Ammoniak einerseits und durch das Anilin andererseits gegeben, da beide sich ja nur dadurch unterscheiden, dass im Ammoniak, indem es in Anilin übergeht, ein Wasserstoffatom durch die Phenylgruppe ersetzt wird. Der Wärmewerth beider ist:

Ammoniak (flüssig)	85,2 Cal.	. . . 725,5 Cal.
Anilin	840,7 »	

Zum Vergleich musste hier der Wärmewerth des Ammoniaks im flüssigen Zustande gewählt werden, um dasselbe mit dem flüssigen Anilin vergleichbar zu machen. Wenngleich dadurch dem Aggregatzustande beider Rechnung getragen ist, so ist doch noch zu berücksichtigen, dass Ammoniak und Anilin sich nicht allein durch ihren Aggregatzustand, sondern auch dadurch unterscheiden, dass ersteres eine höhere Menge von chemischer Energie gegenüber dem letzteren enthält. Hierdurch wird aber seine Gesammtenergie und also sein Wärmewerth beeinflusst und zwar in dem Sinne einer Erhöhung desselben. Wäre diesem Rechnung zu tragen, so würde der Unterschied des Energiegehaltes zwischen Ammoniak und Anilin grösser ausfallen, als er sich bei directer Vergleichung ergeben hat.

Bei den Amin- und den Anilsäuren beträgt der Werth der gleichen Reaction:

Oxaminsäure.	132,1 Cal.	. . . 731,0 Cal.
Oxanilsäure	863,1 »	
Phtalaminsäure	850,7 Cal.	. . . 727,2 Cal.
Phtalanilsäure	1577,9 »	

Bei den Amiden und Aniliden kommen folgende Werthe vor:

Harnstoff	152,2 Cal.	. . . 727,8 Cal.
Monophenyl-Harnstoff	880,0 »	

Monophenyl-Harnstoff . . . . 880,0 Cal. Symm. Diphenyl-Harnstoff . 1612,8 »	. . .	732,8 Cal.
Diphenyl-Harnstoff. . . . . 1612,8 Cal. Tetraphenyl-Harnstoff. . . . 3075,0 »	. . 2 ·	731,1 Cal.
Oxamid. . . . . 203,3 Cal. Phenyl-Oxamid. . . . . 937,5 »	. . .	734,2 Cal.
Phenyl-Oxamid. . . . . 937,5 Cal. Oxanilid . . . . . 1665,8 »	. . .	727,9 Cal.
Malonamid . . . . . 358,8 Cal. Monophenyl-Malonamid . . . 1088,9 »	. . .	730,1 Cal.
Monophenyl-Malonamid . . . 1088,9 Cal. Diphenyl-Malonamid. . . . . 1818,0 »	. . .	729,1 Cal.
Succinamid. . . . . 509,7 Cal. Monophenyl-Succinamid . . 1244,6 »	. . .	734,9 Cal.
Monophenyl-Succinamid. . . 1244,6 Cal. Succinanilid . . . . . 1971,3 »	. . .	726,7 Cal.
Phtalamid . . . . . 921,7 Cal. Phenyl-Phtalamid . . . . . 1651,1 »	. . .	729,4 Cal.
Phenyl-Phtalamid . . . . . 1651,1 Cal. Diphenyl-Phtalamid . . . . . 2383,2 »	. . .	732,1 Cal.

Bei den Imiden beträgt die Differenz:

Succinimid. . , ... 438,1 Cal. Phenyl-Succinimid. . . . . 1168,5 »	. . .	730,4 Cal.
Phtalimid. . . . . 850,2 Cal. Phenyl-Phtalimid . . . . . 1579,1 »	. . .	728,9 Cal.

Bei den Ammonium- und den Anilinsalzen findet sich folgende Differenz:

Ammonium-Oxalat. . . . . 193,8 Cal. Anilin-Oxalat . . . . . 1662,3 »	. . 2 ·	734,2 Cal.
Ammonium-Formiat . . . . . 129,5 Cal. Anilin-Formiat . . . . . 864,3 »	. . .	734,8 Cal.

Aus vorstehender Zahlenreihe ergiebt sich zunächst, dass keine regelmässig auftretende Verschiedenheit zu bemerken ist, gleichviel ob ein oder zwei Wasserstoffatome in im Uebrigen gleichen Verbindungen durch Phenyl vertreten werden. Einzeln scheint eine Verschiedenheit in dieser Beziehung obzuwalten, derart, dass das erste Wasserstoffatom von dem zweiten durch einen höheren oder geringeren Vertretungswerth sich unter-

scheidet, um im nächsten Falle aber die vorkommende Differenz in umgekehrtem Sinne erscheinen zu lassen. Ebenso kommen keine ausgesprochenen Verschiedenheiten in der Reihe der zweibasischen gegenüber den einbasischen Säuren vor. Bei den Amiden und den Aniliden der einbasischen Säuren lag die Differenz zwischen den Werthen 728,1 und 732,0 Cal., hier bewegen sich die Zahlen zwischen den Werthen 726,7 und 734,9 Cal., letzterer Werth kommt jedoch in 25 Fällen nur dreimal vor.

Es erscheint demnach statthaft, aus sämmtlichen Zahlen, sowohl der einbasischen Säuren der Amide und Anilide, wie der hier untersuchten Verbindungen ein allgemeines Mittel abzuleiten, welches die Zahl

730,1 Cal.

als Vertretungswerth von einem Atom Wasserstoff, bei der Bindung an Stickstoff, durch eine Phenylgruppe ergiebt.

Bildung der Imide aus Aminsäuren und Anilsäuren.

Die Imide kann man als aus den Amin- und den Anilsäuren hervorgehend betrachten, wobei eine Abspaltung der Elemente von 1 Mol. Wasser erfolgt. Hiernach ist zu erwarten, dass der Process der Umwandlung, unter Aufspeicherung von Energie, also endotherm verlaufe. Wieweit dies zutrifft, ergiebt sich aus folgenden Gleichungen:

Bildung des Phtalimids aus Phtalaminsäure.

$$\underset{850,7}{C_8H_7NO_3} = \underset{850,2}{C_8H_5NO_2} + H_2O \ldots\ldots\ldots + 0{,}5 \text{ Cal.}$$

Bildung des Phenyl-Succinimids aus Succinanilsäure.

$$\underset{1166,5}{C_{10}H_{11}NO_3} = \underset{1168,5}{C_{10}H_9NO_2} + H_2O \ldots\ldots\ldots - 2{,}0 \text{ Cal.}$$

Bildung des Phenyl-Phtalimids aus Phtalanilsäure.

$$\underset{1577,9}{C_{14}H_{11}NO_3} = \underset{1579,1}{C_{14}H_9NO_2} + H_2O \ldots\ldots\ldots - 1{,}2 \text{ Cal.}$$

Die gleiche Ausnahme von der allgemeinen Regel, welche sich bei der Bildung des Phtalamids (S. 67) zeigt, findet sich daher hier auch wieder, während die Bildung der beiden anderen Imide, wie zu erwarten war, endotherm verläuft.

Bildung der neutralen Ammonium- und Anilinsalze.

Vom chemischen Standpunkte ist die Bildung der hier in Frage stehenden Salze ein rein additiver Process, in welchem sich je 2 Mol. Ammoniak, resp. Anilin an 1 Mol. der zweibasischen Säuren anlagern und so zur Entstehung der betreffenden Salze Veranlassung geben. Wenn der thermochemische Process auf gleiche Weise verliefe, so müsste man zu einem gleichen Werthe für das in die Salze eintretende Ammoniak, resp. Anilin kommen, wenn man den Wärmewerth der betreffenden Säure von dem des Salzes in Abzug bringt, wie es von uns bei der Berechnung des im Ammonium-Formiat[1]) enthaltenen Ammoniaks geschehen ist.

Auf gleiche Weise berechnet ergiebt sich hier der Werth des Ammoniaks im:

Oxalat zu	66,8 Cal.
Malonat	71,15 »
Succinat	78,0 »
Phtalat	75,7 »

der des Anilins im

Oxalat	804,05 Cal.

Die Bildungswärme der Ammoniumsalze beruht aber nicht auf einem additivem Processe, sondern es ist dabei dem Verlust an chemischer Energie Rechnung zu tragen und dieser ergiebt sich, indem von der Summe der Wärmewerthe der Säuren und des Ammoniaks der Wärmewerth des entstehenden Salzes in Abzug gebracht wird.

Aus Zweckmässigkeitsgründen, um einen Vergleich mit dem flüssigen Anilin zu ermöglichen, empfiehlt es sich dabei den Wärmewerth, wie auch im Vorstehenden immer geschehen ist, des flüssigen Ammoniaks der Rechnung zu Grunde zu legen; dieser ist nach obiger Uebersicht 85,2 Cal.

Der Betrag an chemischer Energie, welcher bei der Salzbildung frei wird, ergiebt sich demnach für die einzelnen Salze folgendermassen:

Ammonium-Oxalat	2·18,4 Cal.
Ammonium-Malonat	2·14,05 »
Ammonium-Succinat	2·12,2 »

1) Ber. kön. Ges. d. W. 1895, S. 33; Journ. f. prakt. Chem. [2], **52**, 68.

Ammonium-Phtalat	2·	9,5 Cal.
Ammonium-Formiat.		14,7 »
Anilin-Formiat.		5,4 »
Anilin-Oxalat	2·	9,65 »

Die vorstehenden Zahlen drücken also die im positivem Sinne verlaufende Wärmetönung aus, welche sich ergiebt, wenn flüssiges Ammoniak, resp. Anilin mit festen Säuren sich zu festen neutralen Ammonium- resp. Anilinsalzen verbindet.

Esterbildung.

Die Ester entstehen aus den Säuren und Alkoholen unter Abspaltung von Wasser und zwar verläuft der dabei stattfindende Process in sehr vielen Fällen endotherm, d. h. unter Aufnahme von Energie, wofür in unserer Abhandlung XX[1]) zahlreiche Beispiele erbracht worden sind.

Bei den uns hier beschäftigenden Estern ergeben sich ganz gleiche Verhältnisse.

Bildung des festen Oxaminsäure-Methylesters, Oxamethylan.

$$\underset{132,0}{C_2H_3NO_3} + \underset{170,6}{CH_4O} = \underset{304,7}{C_3H_5NO_3} + H_2O - 2{,}1 \text{ Cal.}$$

Bildung des festen Oxaminsäure-Aethylesters, Oxamaethan.

$$\underset{132,0}{C_2H_3NO_3} + \underset{325,7}{C_2H_6O} = \underset{457,7}{C_4H_7NO_3} + H_2O \pm 0{,}0 \text{ Cal.}$$

Bildung des festen Phenyl-Oxaminsäure-Aethylesters, Oxanilsäure-Aethylester.

$$\underset{863,1}{C_8H_7NO_3} + \underset{325,7}{C_2H_6O} = \underset{1191,2}{C_{10}H_{11}NO_3} + H_2O - 2{,}4 \text{ Cal.}$$

Nimmt man hiernach den mittleren Werth für die Esterbildung zu —1,5 Cal., so lässt sich der Werth der im freien Zustande nicht bekannten Phenyl-Carbaminsäure oder Carbanilsäure aus den Wärmetönungen des Phenyl-Carbaminsäure-Aethylesters, oder des Phenyl-Urethans, berechnen. Der Wärmewerth dieses Esters ist 1128,3 Cal., es ergiebt sich demnach der Werth der freien Phenyl-Carbaminsäure zu:

$$1128{,}3 - 325{,}7 - 1{,}5 = 801{,}1 \text{ Cal.}$$

Hieraus lässt sich wieder der Werth der, ebenfalls nicht

1) Journ. f. prakt. Chem. [2], 40, 354.

im freien Zustande bekannten Carbaminsäure, oder der Amidoameisensäure, durch Rechnung ableiten, wenn der Werth des an Stickstoff gebundenen Phenyls in Abzug gebracht wird. Dieser Werth ist nach S. 71 730,1 Cal. Darnach ist der Wärmewerth der Carbaminsäure:

$$804{,}1 - 730{,}1 = 74{,}0 \text{ Cal.}$$

Zu einem fast ganz gleichen Werthe für die Carbaminsäure kommt man, wenn der Wärmewerth des Carbaminsäure-Aethylesters als Ausgangspunkt der Berechnung gewählt wird. Der Wärmewerth des Carbaminsäure-Aethylesters oder des Urethans ist 397,5 Cal. Setzen wir diesen in die Rechnung ein, so erhalten wir den Werth für die Carbaminsäure, oder das erste Amid der Kohlensäure:

$$397{,}5 - 325{,}7 - 1{,}5 = 70{,}3 \text{ Cal.}$$

Würde man nun andererseits die beiden Amide der Kohlensäure untereinander vergleichen, also das Monamid oder die Carbaminsäure und das Diamid oder den Harnstoff, so würden sich folgende Werthe ergeben:

Harnstoff	152,5	82,2 Cal.
Carbaminsäure. . . .	70,3	

Bei der Bildung der Amide aus den Aminsäuren hatten wir oben als höchsten Werth eine Zunahme des Wärmewerthes von 78,1 Cal. beim Uebergange der Succinanilsäure in Phenyl-Succinamid beobachtet, also eine Zahl, die der hier beobachteten nicht gleich kommt. Diese Differenz erklärt sich aber wahrscheinlich dadurch, dass das Carbamid, der Harnstoff, bei seiner Bildung wieder eine gewisse Menge chemischer Energie aufnimmt. Während alle sonstigen Amide durch Indifferenz gegen Säuren sich auszeichnen, verbindet sich der Harnstoff mit einigen Säuren zu recht festen Verbindungen, verhält sich daher wie eine Base.

SITZUNG VOM 1. FEBRUAR 1897.

Vorträge hielt:

Herr **W. Scheibner**, o. M.: Ueber eine von O. STAUDE-Rostock eingesandte Abhandlung unter dem Titel: »Die Gleichung der Ellipsoide und Hyperboloide als Resolvente der biquadratischen Gleichung der gebrochenen Focaldistanzen«.

Derselbe: Ueber »die gestörte elliptische Bewegung: HANSEN's ideale Coordinaten«.

Otto Staude in Rostock: *Die Gleichung der Ellipsoide und Hyperboloide als Resolvente der biquadratischen Gleichung der gebrochenen Focaldistanzen.* Mit einer Figur.

§ 1.

Gegenstand der Mittheilung.

Die Focaleigenschaften der Ellipse und Hyperbel beruhen nach einer Bemerkung von CLEBSCH[1]) auf dem Bestehen der identischen Gleichung:

$$(1) \qquad -a^2(a^2-e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-e^2}-1\right\}$$
$$=\left(a-\frac{r+r'}{2}\right)\left(a+\frac{r+r'}{2}\right)\left(a-\frac{r-r'}{2}\right)\left(a+\frac{r-r'}{2}\right).$$

Hier bedeuten a^2 und e^2 gegebene Constanten und sind r und r' die Entfernungen des laufenden Punktes x, y von den beiden festen Punkten (»Brennpunkten«) $x=\pm e$, $y=0$, also:

$$r=\sqrt{(x-e)^2+y^2}, \qquad r'=\sqrt{(x+e)^2+y^2}.$$

---

1) Vgl. Vorlesungen über Geometrie von ALFRED CLEBSCH, herausgeg. von LINDEMANN, I. Band, Leipzig 1876, S. 6—7.

Zufolge der Gleichung (1) hat der Kegelschnitt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1$$

eine der beiden Eigenschaften:

$$\frac{r + r'}{2} = \pm a$$

oder

$$\frac{r - r'}{2} = \pm a .$$

In der vorliegenden Mittheilung, deren weitere Ausführung ich einer anderen Gelegenheit vorbehalte, werde ich auf directem Wege zeigen, dass auch die Gleichung der Ellipsoide und Hyperboloide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} = 1 ,$$

als Gleichung 6. Grades für a aufgefasst, sechs Linearfactoren besitzt, die den vier auf der rechten Seite der Gleichung (1) stehenden nach Form und Bedeutung vollkommen analog sind (vgl. unten § 7, 18).

§ 2.

Begriff der gebrochenen Focaldistanzen.

In der xy-Ebene eines gewöhnlichen räumlichen Coordinatensystems $Oxyz$ sei die Ellipse (»Focalellipse«):

$$\frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{f^2} = 1 \qquad (e > f) \tag{2}$$

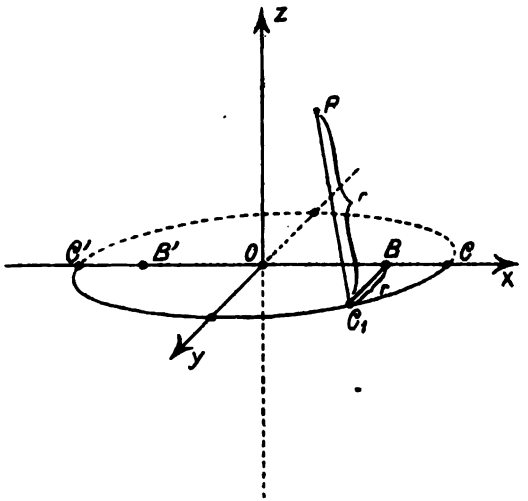
gegeben. Ihre halbe Brennweite d und ihre Halbaxen e, f sind durch die Gleichung

$$d^2 - e^2 + f^2 = 0 \qquad (e > d) \tag{3}$$

mit einander verbunden. Ihre Brennpunkte seien mit B, B' und ihre Scheitelpunkte mit C, C' bezeichnet (vgl. die Figur).

Wir verbinden einen beliebigen festen Punkt $P = x, y, z$ des Raumes, der nicht gerade der Ellipse (2) angehört, geradlinig mit einem laufenden Punkte C_1 der Ellipse (2) und diesen geradlinig mit dem Brennpunkte $B = d, 0, 0$. Indem wir die

Länge r der so entstandenen gebrochenen Linie PC_1B, die Summe der *absoluten* Längen der Strecken PC_1 und C_1B, als Function des »Knickpunktes« C_1 betrachten, suchen wir ihr Maximum und ihr Minimum. Dass es *wenigstens* ein Maximum und ein Minimum giebt, schliessen wir daraus, dass, während C_1



die ganze Ellipse durchläuft, einerseits jede der beiden Strecken PC_1 und C_1B eine endliche Länge behält und andererseits keine dieser beiden Strecken verschwinden kann. Dass es *nur* ein Maximum und ein Minimum giebt, beweisen wir in § 5. Auf den nur für besondere Lagen des festen Punktes P (vgl. § 3, 7) eintretenden Fall, dass die Länge PC_1B von C_1 überhaupt unabhängig ist, gehen wir hier der Kürze wegen nicht näher ein.

Wir bezeichnen mit r_1 den kleinsten und mit r_2 den grössten Werth von $r = PC_1B$. In gleicher Weise betrachten wir die Länge r' der gebrochenen Linie $PC_1'B'$, die von P über einen Punkt C_1' der Ellipse (2) nach dem andern Brennpunkt $B' = -d, 0, 0$ führt und bezeichnen mit r_1' ihren kleinsten und mit r_2' ihren grössten Werth.

Die so eingeführten kleinsten und grössten gebrochenen Entfernungen r_1, r_2, r_1', r_2' des Punktes P von den beiden Brennpunkten B und B' über die Focalellipse (2) nennen wir *die vier gebrochenen Focaldistanzen des Punktes P.*

§ 3.

Darstellung der vier gebrochenen Focaldistanzen.

Bezeichnen wir für die auf den Brennpunkt $B = d, 0, 0$ bezügliche gebrochene Entfernung $r = PC_1B$ die Coordinaten des Knickpunktes C_1 mit $x_1, y_1, 0$, so ist zunächst:

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2} + \sqrt{(x_1 - d)^2 + y_1^2},$$

wo die doppelt gestrichenen Quadratwurzeln deren absolute Werthe bedeuten. Der Punkt $x_1, y_1, 0$ ist mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichung:

$$\frac{x_1^2}{e^2} + \frac{y_1^2}{f^2} = 1$$

so zu bestimmen, dass r ein Minimum oder Maximum wird. Indem wir dieser Bedingungsgleichung durch die Substitution:

$$(4) \qquad x_1 = e \cos u, \quad y_1 = f \sin u$$

mit dem Parameter u genügen, gewinnen wir den Vortheil, dass sich die zweite Quadratwurzel in r ausziehen lässt. Es ist nämlich nach (3):

$$\sqrt{(e \cos u - d)^2 + f^2 \sin^2 u} = e - d \cos u,$$

was nach (3) positiv ist. Damit erhalten wir:

$$(5) \quad r = \varrho + e - d \cos u, \text{ mit: } \varrho = \sqrt{(x - e\cos u)^2 + (y - f \sin u)^2 + z^2}$$

und haben nun u der Bedingung: $\frac{dr}{du} = 0$ zu unterwerfen, welche entwickelt lautet:

$$(6) \quad \frac{ex \sin u - fy \cos u - d^2 \sin u \cos u}{\varrho} + d \sin u = 0.$$

Die entsprechenden Gleichungen für die auf den andern Brennpunkt $B' = -d, 0, 0$ bezügliche gebrochene Entfernung $PC_1'B'$ ergeben sich, wenn wir den Parameter von C_1' ebenfalls mit u bezeichnen, durch Veränderung des Vorzeichens von d und lauten daher:

$$(5') \quad r' = \varrho + e + d \cos u, \text{ mit: } \varrho = \sqrt{(x - e\cos u)^2 + (y - f \sin u)^2 + z^2}$$

$$(6') \quad \frac{ex \sin u - fy \cos u - d^2 \sin u \cos u}{\varrho} - d \sin u = 0.$$

Wir könnten nun durch Multiplication der beiden Gleichungen (6) und (6′) die rationale Gleichung:

$$(ex\sin u - fy\cos u - d^2\sin u\cos u)^2 - d^2\varrho^2\sin^2 u = 0$$

herstellen, welcher die Parameter u aller vier Knickpunkte C_1, C_1' der vier gebrochenen Focaldistanzen genügen müssen. Sie würde in der That im Allgemeinen vier Werthe von u (zwischen 0 und 2π) liefern. Sie könnte aber im Besonderen auch identisch in u gelten, was wirklich eintritt, wenn der Punkt P den Bedingungen:

$$\frac{x^2}{d^2} - \frac{z^2}{f^2} = 1\,, \quad y = 0 \tag{7}$$

genügt. Wir wollen aber an dieser Stelle auf die Gleichung für u nicht näher eingehen, sondern vielmehr durch Elimination von u aus (5) und (6), bezüglich aus (5′) und (6′), eine Gleichung für r und r' herstellen.

§ 4.

Bildung der biquadratischen Gleichung der gebrochenen Focaldistanzen.

Zunächst folgt durch Elimination von ϱ aus (5) und (6):

$$(ex\sin u - fy\cos u - d^2\sin u\cos u) + (r - e + d\cos u)\,d\sin u = 0$$

oder:

$$\{ex + d(r - e)\}\sin u - fy\cos u = 0 \tag{8}$$

und entsprechend aus (5′) und (6′):

$$\{ex + d(e - r')\}\sin u - fy\cos u = 0\,. \tag{8′}$$

Daneben schreiben wir die Gleichungen (5) und (5′) in der Form:

$$(r - e) + d\cos u - \varrho = 0\,, \tag{9}$$

$$(e - r') + d\cos u + \varrho = 0\,, \tag{9′}$$

worin beidemal:

$$\varrho = \sqrt{(x - e\cos u)^2 + (y - f\sin u)^2 + z^2}\,.$$

Führen wir jetzt für $r - e$ und $e - r'$ die gemeinsame Benennung $4s$ ein:

$$(10) \qquad s = \begin{cases} \dfrac{r-e}{4} \\ \dfrac{e-r'}{4}, \end{cases}$$

so nehmen die Gleichungen (8) und (8') die gemeinsame Form:

$$(11) \qquad (ex + 4ds)\sin u - fy\cos u = 0$$

an und lauten die Gleichungen (9) und (9') bezüglich:

$$(4s + d\cos u) - \varrho = 0\,, \qquad (4s + d\cos u) + \varrho = 0\,.$$

Werden aber diese beiden Gleichungen durch Multiplication mit einander rational gemacht, so vereinigen sie sich ihrerseits zu einer einzigen Gleichung:

$$(4s + d\cos u)^2 - \varrho^2 = 0$$

oder mit Einsetzung des Werthes von ϱ:

$$(x - e\cos u)^2 + (y - f\sin u)^2 + z^2 - (4s + d\cos u)^2 = 0$$

oder nach § 2, 3 reducirt:

$$(12) \quad fy\sin u + (ex + 4ds)\cos u = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + f^2}{2} - 8s^2\,.$$

Zwischen jeder der Grössen s in (10) und dem Parameterwerthe u des zugehörigen Knickpunktes bestehen also die beiden Gleichungen (11) und (12).

Indem wir aus diesen $\sin u$ und $\cos u$ berechnen und die Quadratsumme der gefundenen Werthe $= 1$ setzen, erhalten wir die von u freie Gleichung:

$$(ex + 4ds)^2 + f^2y^2 = \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 + f^2}{2} - 8s^2\right)^2.$$

Bei diesem Eliminationsverfahren ist allerdings der Factor:

$$(ex + 4ds)^2 + f^2y^2$$

beim Uebergang zur letzten Gleichung weggelassen worden, was die Voraussetzung einschliesst, dass nicht gleichzeitig

$$ex + 4ds = 0 \quad \text{und} \quad y = 0$$

ist. Diese Gleichungen bestehen aber für eine allgemeine Lage des Punktes $P = x, y, z$, auf die wir uns in dieser vorläufigen Mittheilung beschränken, ersichtlich nicht, sondern führen auf den schon § 3, 7 ausgeschlossenen Fall zurück, wo die dortige Gleichung für u identisch in u erfüllt ist.

Wir entwickeln schliesslich die erhaltene Gleichung für s und gewinnen damit den Satz:

Sind r_1, r_2, r_1', r_2' die vier gebrochenen Focaldistanzen des Punktes x, y, z, so sind die Differenzen:

$$(13)\quad s_1 = \frac{r_1 - e}{4},\quad s_2 = \frac{r_2 - e}{4},\quad s_1' = \frac{e - r_1'}{4},\quad s_2' = \frac{e - r_2'}{4}$$

die Wurzeln der biquadratischen Gleichung in s:

$$(14)\quad s^4 - \tfrac{1}{8}(x^2 + y^2 + z^2 + d^2 + e^2)\, s^2 - \tfrac{1}{8} dex \cdot s + \tfrac{1}{256}\{(x^2 + y^2 + z^2 + f^2)^2 - 4e^2x^2 - 4f^2y^2\} = 0\,.$$

Wir nennen diese Gleichung kurz »*die biquadratische Gleichung der gebrochenen Focaldistanzen*«.

§ 5.

Folgerungen aus der biquadratischen Gleichung.

Nach § 2 beziehen sich r_1' und r_2' ebenso auf den Brennpunkt $B' = -d, 0, 0$, wie r_1 und r_2 auf den Brennpunkt $B = d, 0, 0$. Während also die Gleichung (14) in der erhaltenen Form die Wurzeln (13) hat, würde sie nach Umkehrung des Vorzeichens von d in dem Coefficienten von s^1 die entgegengesetzten Wurzeln:

$$(13')\qquad \frac{r_1' - e}{4},\quad \frac{r_2' - e}{4},\quad \frac{e - r_1}{4},\quad \frac{e - r_2}{4}$$

bekommen.

Da die Gleichung (14) vom 4. Grade ist, kann es, wie in § 2 vorausbemerkt, nicht mehr als eine kleinste und eine grösste gebrochene Entfernung des Punktes P von jedem einzelnen der beiden Brennpunkte B und B' über die Focalellipse (2) geben. Dass die Wurzeln der Gleichung (14) alle vier reell sind, werden wir am Schluss von § 6 nachweisen. Mit jeder Wurzel s der Gleichung (14) ist aber nicht nur die Länge einer der vier gebrochenen Focaldistanzen r_1, r_2, r_1', r_2', sondern sind auch die Coordinaten $x_1 = e\cos u$, $y_1 = f\sin u$ (vgl. § 3, 4) ihres Knickpunktes C_1, C_1' bestimmt, da aus (11) und (12) $\cos u$ und $\sin u$ rational in s erhalten werden.

Das Fehlen des Coefficienten von s^3 in der Gleichung (14) hat nach (13) die Beziehung:

$$(15)\qquad r_1 + r_2 - r_1' - r_2' = 0$$

und damit den Satz zur Folge:

Die Summe der kürzesten und weitesten Entfernung des Punktes O von dem einen Brennpunkte B über die Focalellipse ist gleich der Summe seiner kürzesten und weitesten Entfernung von dem andern Brennpunkte B'.

§ 6.

Die Resolvente der biquadratischen Gleichung.

Die Resolvente einer biquadratischen Gleichung von der Form:

$$s^4 + qs^2 + ms + n = 0$$

ist:

$$S^6 + 8q \cdot S^4 + 16(q^2 - 4n)\, S^2 - 64\, m^2 = 0\,.$$ [1])

Die Anwendung dieses Satzes auf die Gleichung (14) giebt als deren Resolvente:

$$S^6 - \{x^2 + y^2 + z^2 + d^2 + e^2\}\, S^4$$
$$+ \{(d^2 + e^2)\, x^2 + e^2 y^2 + d^2 z^2 + d^2 e^2\}\, S^2 - d^2 e^2 x^2 = 0\,,$$

wobei nur die Darstellung des Coefficienten von S^2 eine einfache Reduction mit Benutzung der Beziehung § 2, 3 erfordert.

Die Resolvente ist von dem Vorzeichen des Coefficienten von s^1 in (14) unabhängig. Sie kann ferner ohne weitere Rechnung in die folgende Gestalt versetzt werden, wo die Unbekannte S mit a bezeichnet ist:

$$(16) \qquad -(a^2 - d^2)(a^2 - e^2)\, x^2 - a^2(a^2 - e^2)\, y^2$$
$$- a^2(a^2 - d^2)\, z^2 + a^2(a^2 - d^2)(a^2 - e^2) = 0$$

oder:

$$(17) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} = 1\,,$$

was die Gleichung des Mittelpunktsflächen 2. Ordnung ist. Also:

Die vereinigte Gleichung der Ellipsoide und Hyperboloide (17) ist, als Gleichung 6. Grades in a betrachtet, die Resolvente der biquadratischen Gleichung (14) der gebrochenen Focaldistanzen.

Dass die Gleichung (16) für a^2 drei reelle Wurzeln zwischen den Grenzen 0 und d^2, d^2 und e^2, e^2 und $+\infty$ hat, ist bekannt und damit die Realität der vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung (14) bewiesen.

---

1) Vgl. SERRET, Handbuch der höheren Algebra, übers. von WERTHEIM, 2. Aufl., Bd. II, S. 396, Formel (5).

§ 7.

Zerlegung der Gleichung der Mittelpunktsflächen in sechs Linearfactoren.

Die sechs Wurzeln der Resolvente (16) drücken sich bekanntlich durch die vier Wurzeln s_1, s_2, s_1', s_2' der biquadratischen Gleichung (14) in folgender Weise aus:

$$\begin{cases} \pm (s_1 + s_2 - s_1' - s_2') \\ \pm (s_1 - s_2 - s_1' + s_2') \\ \pm (s_1 - s_2 + s_1' - s_2') . \end{cases}$$

Daraus folgt aber mit Rücksicht auf die Bezeichnung § 4, 13 das Bestehen der identischen Gleichung:

$$\begin{aligned} (18)\quad & -a^2(a^2-d^2)(a^2-e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}+\frac{z^2}{a^2-e^2}-1\right\} \\ &= \left(a-\frac{r_1+r_2+r_1'+r_2'-4e}{4}\right)\left(a+\frac{r_1+r_2+r_1'+r_2'-4e}{4}\right) \\ &\times \left(a-\frac{r_1-r_2+r_1'-r_2'}{4}\right)\left(a+\frac{r_1-r_2+r_1'-r_2'}{4}\right) \\ &\times \left(a-\frac{r_1-r_2-r_1'+r_2'}{4}\right)\left(a+\frac{r_1-r_2-r_1'+r_2'}{4}\right), \end{aligned}$$

mit der man die Gleichung § 1, 1 vergleiche.

Zufolge dieser Gleichung hat die Fläche (17) eine der drei Eigenschaften:

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{r_1+r_2+r_1'+r_2'}{4} - e = \pm a \\ \text{oder:} \quad \dfrac{r_1-r_2+r_1'-r_2'}{4} = \pm a \\ \text{oder:} \quad \dfrac{r_1-r_2-r_1'+r_2'}{4} = \pm a \end{cases}$$

vgl. § 1). Vermöge der unter § 5, 15 erwähnten Relation:

$$r_1 + r_2 - r_1' - r_2' = 0$$

kann jede dieser drei Gleichungen (19) bezüglich in zwei äquivalenten kürzeren Formen geschrieben werden:

$$(20)\quad \begin{cases} r_1 + r_2 - 2e = \pm 2a \quad \text{und} \quad r_1' + r_2' - 2e = \pm 2a \\ r_1 - r_2' = \pm 2a \quad \text{»} \quad r_2 - r_1' = \pm 2a \\ r_1 - r_1' = \pm 2a \quad \text{»} \quad r_2 - r_2' = \pm 2a. \end{cases}$$

§ 8.

Beziehung zur Theorie der elliptischen Coordinaten.

Die Gleichungen (20) enthalten die Focaleigenschaften der drei Mittelpunktsflächen 2. Ordnung, wie ich sie in meinem Buche[1]) mittels der elliptischen Coordinaten bewiesen habe. Jedoch habe ich diejenigen beiden gebrochenen Focaldistanzen r_2 und r_2', welche in der vorliegenden Mittheilung (in § 2) als *Maxima* der gebrochenen Entfernungen des Punktes P von den Brennpunkten B und B' eingeführt und daher *labile* Gleichgewichtslagen eines von P nach B oder B' über die Focalellipse laufenden Fadens sind, in dem Buche durch *stabile* Gleichgewichtslagen eines von P über die Focalhyperbel nach C und C' laufenden Fadens ersetzt. Den hier gebrauchten Bezeichnungen

$$a, \quad d, \quad e, \quad r_1, \; r_2 - d - e, \; r_1', \; r_2' - d - e$$

entsprechen in dem Buche die Bezeichnungen:

$$\sqrt{\alpha - \tau}, \quad \sqrt{\alpha - \beta}, \quad \sqrt{\alpha - \gamma}, \quad r_0, \quad s_0', \quad r_0', \quad s_0 .$$

Durch Einführung der letzteren in die Gleichung (17) nimmt diese die Form an

$$\frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} = 1 .$$

Dann ist sie aber, als Gleichung 3. Grades in τ mit den Wurzeln λ, μ, ν aufgefasst, die Definitionsgleichung der elliptischen Coordinaten λ, μ, ν. Wir können daher den Satz des § 6 auch so aussprechen:

Die Definitionsgleichung der drei elliptischen Coordinaten ist die Resolvente der biquadratischen Gleichung der vier gebrochenen Focaldistanzen.

Die elliptischen Coordinaten, auf welche ich in meinem Buche die eingehendere Theorie der gebrochenen Focaldistanzen gegründet habe, sind also nicht nur ein zweckmässiges, sondern das *nothwendige* analytische Hilfsmittel dieser Theorie.

Rostock, 16. Januar 1897.

---

1) Die Focaleigenschaften der Flächen 2. Ordnung, Leipzig 1896.

W. Scheibner, *Die gestörte elliptische Bewegung. Hansen's ideale Coordinaten.* **Mit 4 Figuren.**

Ich bin aufgefordert worden, auf Grund einer zuerst im Jahre 1857 gehaltenen und von meinem damaligen Zuhörer, dem späteren Professor Hermann Hankel ausgearbeiteten Vorlesung über das Problem der drei Körper einige Capitel zu veröffentlichen. Dieser Ursprung mag die Mängel der zum Theil elementaren, zum Theil aphoristischen Darstellung erklären, für welche ich um Nachsicht bitte. Mein Wunsch geht vorzugsweise dahin, jüngeren Astronomen das Studium der Originalarbeiten meines berühmten Lehrers Hansen einigermassen zu erleichtern, denn die Fortschritte der *Mécanique céleste* in den letzten Decennien haben in der Praxis die auch mathematisch interessanten und von ihrem Autor glänzend erprobten Hansen'schen Methoden noch keineswegs überflüssig gemacht. Einiges Bedenken hat mir die Wahl der Bezeichnungen verursacht, da Hansen selbst in seinen Schriften damit öfters gewechselt hat. Ich habe mich zwar den Hansen'schen Bezeichnungen anzuschliessen gesucht, bin aber davon abgewichen, wo diess die Uebersichtlichkeit oder das Verständniss zu erleichtern schien. Wenn ich dem Einen zu viel, dem Anderen zu wenig geändert haben sollte, so dürfte ich vielleicht hoffen, die richtige Mitte eingehalten zu haben.

1.

Die ungestörte elliptische Bewegung zweier Massenpunkte $m = (\xi\,\eta\,\zeta)$ und $m_1 = (\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ vom Abstande r entspricht den sechs Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$m\xi'' = \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{k^2 m m_1}{r}, \quad m\eta'' = \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{k^2 m m_1}{r}, \quad m\zeta'' = \frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{k^2 m m_1}{r}$$

$$m_1\xi_1'' = \frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{k^2 m m_1}{r}, \quad m_1\eta_1'' = \frac{\partial}{\partial\eta_1}\frac{k^2 m m_1}{r}, \quad m_1\zeta_1'' = \frac{\partial}{\partial\zeta_1}\frac{k^2 m m_1}{r}$$

mit der Gauss'schen Constante k. Wenn auf der rechten Seite die kleinen Glieder $A B \Gamma$ und $A_1 B_1 \Gamma_1$ hinzutreten, so erhält man die Gleichungen der gestörten elliptischen Bewegung.

Sei für $M = m + m_1$

$$M\Xi = m\xi + m_1\xi_1, \quad MH = m\eta + m_1\eta_1, \quad MZ = m\zeta + m_1\zeta_1,$$

sei ferner

$$\xi - \xi_1 = x, \quad \eta - \eta_1 = y, \quad \zeta - \zeta_1 = z,$$

wo also $\Xi H Z$ die Coordinaten des gemeinschaftlichen Schwerpunktes, $x y z$ die relativen Coordinaten von m in Bezug auf m_1 bedeuten, so kann man die absoluten Coordinaten von m und m_1 eliminiren und erhält wegen

$$\xi = \Xi + \frac{m_1 x}{M}, \quad \eta = H + \frac{m_1 y}{M}, \quad \zeta = Z + \frac{m_1 z}{M}$$

$$\xi_1 = \Xi - \frac{m x}{M}, \quad \eta_1 = H - \frac{m y}{M}, \quad \zeta_1 = Z - \frac{m z}{M}$$

$$m\xi'' + m_1\xi_1'' = M\Xi'' = A + A_1, \quad MH'' = B + B_1, \quad MZ'' = \Gamma + \Gamma_1$$

$$x'' + \frac{k^2 M x}{r^3} = \frac{A}{m} - \frac{A_1}{m_1},$$

$$y'' + \frac{k^2 M y}{r^3} = \frac{B}{m} - \frac{B_1}{m_1},$$

$$z'' + \frac{k^2 M z}{r^3} = \frac{\Gamma}{m} - \frac{\Gamma_1}{m_1},$$

wofür wir

$$\Xi'' = \delta\Xi, \quad H'' = \delta H, \quad Z'' = \delta Z$$

und

$$x'' + \frac{\mu x}{r^3} = \delta X, \quad y'' + \frac{\mu y}{r^3} = \delta Y, \quad z'' + \frac{\mu z}{r^3} = \delta Z$$

also $\mu = k^2 M$, schreiben wollen.

Die relativen Schwerpunktscoordinaten sind durch

$$\Xi - \xi_1 = \frac{m x}{M}, \quad H - \eta_1 = \frac{m y}{M}, \quad Z - \zeta_1 = \frac{m z}{M}$$

gegeben. Der Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts erfordert zu seiner Geltung die Gleichungen

$$A + A_1 = B + B_1 = \Gamma + \Gamma_1 = 0$$

wodurch

$$\delta X = \frac{M}{m m_1} A, \quad \delta Y = \frac{M}{m m_1} B, \quad \delta Z = \frac{M}{m m_1} \Gamma$$

werden.

2.

Ein System Differentialgleichungen von der Form

$$dt : d\Xi : dH : dZ : dx : dy : dz : d\Xi' : dH' : dZ' : dx' : dy' : dz'$$
$$= 1 : \Xi' : H' : Z' : x' : y' : z' : \Xi : H : Z : X : Y : Z,$$

wo die Grössen $\Xi H Z X Y Z$ in beliebiger Weise von sämmtlichen Variabeln $t\, \Xi H Z x y z \Xi' H' Z' x' y' z'$ abhängen können, besitzt zwölf unabhängige Invarianten

$$i_n = F_n(t\, \Xi H Z x y z \Xi' H' Z' x' y' z'),$$

wenn der Name erlaubt ist, da die Werthe dieser Ausdrücke ungeändert bleiben, während die Variabeln irgendwelche, den gegebenen Differentialgleichungen entsprechende Werthe durchlaufen. Setzt man diese Invarianten willkürlichen Constanten oder Elementen e_n gleich, so erhält man die Integralgleichungen des Systems.

Wenn wir im ungestörten Problem voraussetzen dürfen, dass die stattfindende Bewegung ungeändert bleiben soll, sobald man die Zeit um eine Constante ändert, also den Anfangspunkt für die Zählung der Zeit beliebig verschiebt, so wird

$$t - \tau = f(\Xi H Z x y z \Xi' H' Z' x' y' z')$$

eine Integralgleichung mit dem invarianten Elemente τ sein müssen: die Kraftcomponenten $\Xi H Z X Y Z$, und mithin auch die übrigen Invarianten werden im ungestörten Problem die Zeit nicht explicite enthalten. In diesem Falle kann die Zeit unabhängig von den übrigen Integralgleichungen am Schlusse durch eine Quadratur gefunden werden. Uebrigens brauchen wir den möglichen Fall nicht auszuschliessen, dass die Componenten $\Xi H Z X Y Z$ auch von den zweiten Differentialquotienten der Coordinaten abhängen, weil die Gleichungen

$$\frac{d\Xi'}{dt} = \Xi, \ldots \frac{dx'}{dt} = X \ldots,$$

nach $\Xi'' \cdot \cdot x'' \cdot \cdot$ aufgelöst, Differentialgleichungen von derselben Form liefern, deren rechte Seiten die zweiten Differentialquotienten nicht mehr enthalten. Wir werden bei der Betrachtung des WEBER'schen Gesetzes auf einen derartigen Fall geführt werden.

3.

Wir beginnen mit der Aufsuchung der Invarianten des ungestörten Systems.

Alsdann erhält man zunächst sechs die Trägheitsbewegung des Schwerpunkts bestimmende invariante Elemente $a\,b\,c\,a_0\,b_0\,c_0$, für welche

$$a=\Xi',\ b=H',\ c=Z',\ a_0=\Xi-t\Xi',\ b_0=H-tH',\ c_0=Z-tZ'$$

oder

$$\Xi=at+a_0,\quad H=bt+b_0,\quad Z=ct+c_0.$$

Ferner hat man im ungestörten Problem

$$x'':y'':z''=x:y:z$$

und damit vermöge des Flächensatzes die drei Invarianten

$$i_1=yz'-zy',\quad i_2=zx'-xz',\quad i_3=xy'-yx'$$

nebst der Gleichung der invariabeln Bahnebene

$$i_1x+i_2y+i_3z=0.$$

Weiter ist[1])

$$i_2z''-i_3y''+\mu\frac{i_2z-i_3y}{r^3}=0$$

und weil identisch

$$\frac{(zx'-xz')z-(xy'-yx')y}{r^3}=\left(\frac{x}{r}\right)',$$

so folgt

$$i_2z'-i_3y'+\mu\frac{x}{r}+i_4=0$$

$$i_3x'-i_1z'+\mu\frac{y}{r}+i_5=0$$

$$i_1y'-i_2x'+\mu\frac{z}{r}+i_6=0.$$

---

1) CLAUSEN bedient sich der Gleichungen $w''+\frac{\mu w}{r^3}=0$, $w=rr'$, Astr. Nachr. Nr. 404. Man vergl. auch JACOBI's Abhandlung *de motu puncti singularis*, Crelle's Journ. Bd. 24, S. 21 (1842).

Man erhält so die Gleichung einer Oberfläche zweiten Grades

$$\mu r + i_4 x + i_5 y + i_6 z = i_1^2 + i_2^2 + i_3^2 ,$$

welche in Verbindung mit der Gleichung der Bahnebene die Brennpunktsgleichung des Kegelschnittes liefert. Die Invarianten $i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6$ sind nicht ganz unabhängig von einander, sondern erfüllen die Relation

$$i_4 i_4 + i_2 i_5 + i_3 i_6 = 0 ,$$

so dass die der Gleichung

$$i_4 x + i_5 y + i_6 z = 0$$

entsprechende Ebene zur Bahnebene senkrecht steht.

Wir schreiben jetzt

$$i_1 = \Delta \cos\alpha \ , \quad i_2 = \Delta \cos\beta \ , \quad i_3 = \Delta \cos\gamma$$
$$i_4 = E \cos\alpha_1 , \quad i_5 = E \cos\beta_1 , \quad i_6 = E \cos\gamma_1 .$$

Dadurch wird die Gleichung der Bahnebene

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = 0$$

und die Brennpunktsgleichung des Kegelschnitts

$$\mu r + E(x \cos\alpha_1 + y \cos\beta_1 + z \cos\gamma_1) = \Delta^2$$

oder für

$$\Delta^2 = \mu p , \quad E = \mu e$$

$$r + e(x \cos\alpha_1 + y \cos\beta_1 + z \cos\gamma_1) = p .$$

Hier bedeuten

$$\sqrt{\mu p} = \Delta \ ^1)$$

die doppelte Flächengeschwindigkeit des Radiusvectors, $i_1 i_2 i_3$ die Projectionen derselben auf die drei Coordinatenebenen, p den halben Parameter, e die Excentricität des Kegelschnitts,

---

1) Hansen bezeichnet in seinen Schriften den Quotienten

$$\frac{\mu}{\Delta} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} = \frac{\Delta}{p}$$

durch den Buchstaben h. Während

$$h = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}, \quad \text{ist} \quad \Delta = a^2 n \sqrt{1-e^2},$$

a die halbe grosse Axe der Ellipse.

während von den beiden durch die Winkel $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ definirten Richtungen die erste senkrecht zur Bahnebene, die zweite in der Apsidenaxe nach dem Perihel gerichtet ist. Denn da im Durchschnitt der beiden senkrechten Ebenen

$$x = r\cos\alpha_1\,, \quad y = r\cos\beta_1\,, \quad z = r\cos\gamma_1\,,$$

so folgt

$$p = (1+e)r \text{ mit der Periheldistanz } r_0 = \frac{p}{1+e}\,.$$

Die wahre Anomalie bezeichnet den Winkel, welchen der Radiusvector r mit der Richtung nach dem Perihel bildet, mithin wird für

$$x = r\cos\lambda\,, \quad y = r\cos\mu\,, \quad z = r\cos\nu$$

$$\cos f = \cos\lambda\cos\alpha_1 + \cos\mu\cos\beta_1 + \cos\nu\cos\gamma_1$$

und

$$p = r(1+e\cos f)$$

die Polargleichung des Kegelschnitts.

4.

Um die letzte unabhängige Invariante zu finden, kommt es nur auf die Ausführung einer Quadratur an, da z. B.

$$dt = \frac{dx}{x'} = \frac{dr}{r'}$$

integrirt werden kann, sobald x' als Function von x oder r' von r bestimmt worden ist, und dazu reichen die bisherigen Invarianten- oder Integralgleichungen aus. Bilden wir die Summen

$$i_1^2 + i_2^2 + i_3^2 = \mu p \quad \text{und} \quad i_4^2 + i_5^2 + i_6^2 = \mu^2 e^2\,,$$

so führt eine leichte Rechnung zu den Werthen

$$\begin{aligned}\mu p = \Delta^2 &= (yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2 \\ &= (rx' - xr')^2 + (ry' - yr')^2 + (rz' - zr')^2 \\ &= r^2(x'^2 + y'^2 + z'^2 - r'^2) = r^2(s'^2 - r'^2)\,,\end{aligned} \tag{A}$$

wo zur Abkürzung $s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ geschrieben ist, und weiter

$$\mu^2 e^2 = \left(i_2 z' - i_3 y' + \mu\frac{x}{r}\right)^2 + \left(i_3 x' - i_1 z' + \mu\frac{y}{r}\right)^2 + \left(i_1 y' - i_2 x' + \mu\frac{z}{r}\right)^2$$

$$= (i_1^2 + i_2^2 + i_3^2)\left(s's' - \frac{2\mu}{r}\right) + \mu^2 \qquad \text{(B)}$$

$$= \Delta^2\left(r'r' + \frac{\Delta^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r}\right) + \mu^2 = \Delta^2 r'^2 + \mu^2\left(\frac{p}{r} - 1\right)^2$$

oder

$$r' = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\Delta^2}{r^2} - \frac{\mu^2}{\Delta^2}(1 - e^2)}\,.$$

Der Integration dieser Gleichung stehen keine Schwierigkeiten entgegen. Man kann aber auf directerem Wege zu der eben abgeleiteten Formel gelangen, wenn man die Excentricität e durch die Invariante h der lebendigen Kraft ersetzt. Hierzu bilde man *entweder* die Gleichung

$$xx'' + yy'' + zz'' + \frac{\mu}{r} = 0\,,$$

welche, da identisch

$$rr'' + r'r' = xx'' + yy'' + zz'' + s's'\,,$$

also wegen (A)

$$xx'' + yy'' + zz'' = rr'' + \frac{\Delta^2}{r^2}\,,$$

übergeht in

$$rr'' - \frac{\Delta^2}{r^2} + \frac{\mu}{r} = 0$$

und integrirt in

$$\tfrac{1}{2}r'r' + \frac{\Delta^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} = h\,.$$

Oder man berechne

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' + \frac{\mu r'}{r^2} = 0\,,$$

integrirt

$$\tfrac{1}{2}s's' = \frac{\mu}{r} + h = \tfrac{1}{2}\left(r'r' + \frac{\Delta^2}{r^2}\right).$$

Der Vergleich mit (B) zeigt, dass

$$\mu^2 e^2 = \mu^2 + 2h\Delta^2\,,$$

wo die Invariante

$$h = \tfrac{1}{2}s's' - \frac{\mu}{r}, \quad \text{während } \Delta^2 = r^2(s'^2 - r'^2).$$

Es findet also eine einfache Bedingungsgleichung zwischen den drei invarianten Elementen Δ, h und e statt.

Durch Einführung der wahren Anomalie f wird wegen (B)

$$e\cos f = \frac{p}{r} - 1, \quad e\sin f = \frac{\Delta}{\mu}r'$$

und da

$$e\sin f\frac{df}{dt} = \frac{p}{r^2}r',$$

so folgt

$$\frac{df}{dt} = \frac{\Delta}{r^2} = \frac{\mu^2}{\Delta^3}(1 + e\cos f)^2.$$

Schreibt man

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{2\left(\frac{\mu}{r} + h\right) - \frac{\Delta^2}{r^2}}} = \frac{\Delta^3}{\mu^2}\frac{df}{(1 + e\cos f)^2},$$

so ergibt sich die neue Invariante

$$i_0 = t - \int_{r_0}^{r}\frac{r\,dr}{\sqrt{2hr^2 + 2\mu r - \Delta^2}} = t - \frac{\Delta^3}{\mu^2}\int_0^f\frac{df}{(1 + e\cos f)^2},$$

wo die Ausführung der Quadraturen bekanntlich durch Einführung der sogenannten excentrischen Anomalie ε erleichtert wird.

5.

Es kommt dabei auf das Vorzeichen des Elementes h an. Für die elliptische Bewegung ($h < 0$, $e < 1$) schreibe man

$$a = -\frac{\mu}{2h} = \frac{\Delta^2}{\mu(1 - e^2)} = \frac{p}{1 - e^2}$$

und setze

$$r = a(1 - e\cos\varepsilon) \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}f,$$

wodurch auch

$$\frac{r}{a}\cos f = \cos\varepsilon - e, \qquad \frac{p}{r}\cos\varepsilon = \cos f + e$$

$$\frac{r}{a}\sin f = \sqrt{1-e^2}\sin\varepsilon, \qquad \frac{p}{r}\sin\varepsilon = \sqrt{1-e^2}\sin f$$

werden, während a die halbe grosse Axe der Ellipse bedeutet. Damit erhält man

$$(1 - e\cos\varepsilon)\,d\varepsilon = n\,dt,$$

wenn die mittlere Bewegung n durch die Gleichung

$$a^3n^2 = \mu \quad \text{oder} \quad n = \frac{\mu^2}{\Delta^3}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}$$

eingeführt wird. Weiter folgt

$$i_0 = t - \frac{1}{n}(\varepsilon - e\sin\varepsilon),$$

und für

$$g = \varepsilon - e\sin\varepsilon = n(t-\tau)$$

wird g die mittlere Anomalie und

$$i_0 = t - \frac{g}{n} = \tau$$

der einfachste Ausdruck für die Invariante der Perihelzeit τ.

Für $h > 0$ ergibt sich die hyperbolische Bewegung, bei welcher die reelle Halbaxe

$$a = \frac{\mu}{2h} = \frac{p}{e^2-1}$$

zu setzen und die Excentricität $e > 1$ ist. Schreibt man dann

$$r = a\,(e\sec\varepsilon - 1) \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}f,$$

während

$$\frac{r}{a}\cos f = e - \sec\varepsilon, \qquad \frac{p}{r}\sec\varepsilon = e + \cos f$$

$$\frac{r}{a}\sin f = \sqrt{e^2-1}\operatorname{tg}\varepsilon, \qquad \frac{p}{r}\operatorname{tg}\varepsilon = \sqrt{e^2-1}\sin f,$$

so folgt

$$\frac{e\sec\varepsilon - 1}{\cos\varepsilon}\,d\varepsilon = n\,dt$$

mit der mittleren Bewegung

$$n = \frac{\mu^2}{\Delta^3}(e^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \text{ resp. } a^3 n^2 = \mu,$$

$$i_0 = t - \frac{1}{n}\left\{e \operatorname{tg}\varepsilon + \log \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right\} = \tau$$

oder

$$g = n(t - \tau) = e \operatorname{tg}\varepsilon + \log \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right).$$

Die parabolische Bewegung endlich entspricht den Werthen $h = 0$, $e = 1$, womit sich ohne Weiteres ergibt

$$i_0 = t - \int_{r_0}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{2\mu r - \Delta^2}} = t - \frac{\Delta^3}{4\mu^2}\int_0^f \frac{df}{\cos^4 \frac{1}{2} f}$$

oder wegen

$$r = \frac{\Delta^2}{2\mu \cos^2 \frac{1}{2} f}, \quad r_0 = \frac{\Delta^2}{2\mu} = \tfrac{1}{2} p:$$

$$i_0 = t - \frac{r + p}{3\sqrt{\mu}}\sqrt{2r - p} = t - \frac{\Delta^3}{2\mu^2} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} f(1 + \tfrac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} f) = \tau,$$

also

$$\frac{2\mu^2}{\Delta^3}(t - \tau) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} f(1 + \tfrac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} f).$$

Für Excentricitäten, welche der Einheit sehr nahe liegen, kann es bequem sein, die Periheldistanz

$$r_0 = \frac{p}{1 + e} = \frac{\Delta^2}{\mu(1 + e)}$$

als Element einzuführen und n durch die sogenannte mittlere parabolische Bewegung ν, für welche

$$r_0^3 \nu^2 = \mu,$$

zu ersetzen. Alsdann wird neben

$$n = \frac{\mu^2}{\Delta^3}(1 - e^2)^{\frac{3}{2}} \text{ resp. } n = \frac{\mu^2}{\Delta^3}(e^2 - 1)^{\frac{3}{2}}, \quad \nu = \frac{\mu^2}{\Delta^3}(1 + e)^{\frac{3}{2}}$$

erhalten, also für $e = 1$

$$\nu(t - \tau) = \sqrt{2} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} f(1 + \tfrac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} f).$$

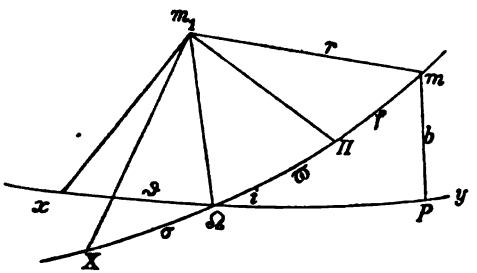
In der bekannten Barker'schen Tafel ist $\nu = 75\sqrt{\frac{\mu}{2r_0^3}}$ gesetzt, also der Factor $\frac{75}{\sqrt{2}}$ der bequemeren Rechnung halber hinzugefügt.

Im Folgenden werden wir uns auf die elliptische Bewegung beschränken.

6.

Von den gefundenen zwölf unabhängigen Invarianten bestimmen $a\ b\ c$ die Geschwindigkeitscomponenten der Schwerpunktsbewegung, $a_0 b_0 c_0$ die Schwerpunktscoordinaten für $t = 0$, $i_1 i_2 i_3$ oder $p\ \alpha\ \beta\ \gamma$ den Parameter des Kegelschnitts und die Lage der Bahnebene, $i_4 i_5 i_6$ oder $e\ \alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ die Excentricität und die Lage des Perihels, endlich i_0 oder τ die Perihelzeit.

Zur Bestimmung der Lage der Bahnebene und des Perihels führen wir jetzt ein (siehe die beistehende Figur)



$$u = f + \varpi$$
$$v = f + \chi = u + \sigma$$
$$\chi = \varpi + \sigma$$
$$l = xP,\ b = mP$$

1) die Neigung $i = \gamma$ der Bahn gegen die xy-Ebene,

2) die Knotenlänge $\vartheta = x\Omega$ oder den Winkel des aufsteigenden Knotens mit der x-Axe, wodurch

$$\cos\alpha = \sin\vartheta \sin i, \qquad \cos\beta = -\cos\vartheta \sin i$$

und 3) den Abstand $\varpi = \Omega\Pi$ des Perihels vom Knoten.

Nennt man $u = \Omega m$ das sogenannte Argument der Breite, d. h. den Winkel des Radiusvectors mit der Knotenlinie, so wird nicht allein

$$u = f + \varpi,$$

sondern auch

$$\cos\lambda = \cos xr = \cos u\cos\vartheta - \sin u\sin\vartheta\cos i$$
$$\cos\mu = \cos yr = \cos u\sin\vartheta + \sin u\cos\vartheta\cos i$$
$$\cos\nu = \cos zr = \sin u\sin i,$$

mithin für $u = \varpi$:

$$\cos\alpha_1 = \cos\varpi\cos\vartheta - \sin\varpi\sin\vartheta\cos i$$
$$\cos\beta_1 = \cos\varpi\sin\vartheta + \sin\varpi\cos\vartheta\cos i$$
$$\cos\gamma_1 = \sin\varpi\sin i.$$

Die Variabeln $x\,y\,z\;x'y'z'$ aber sind durch die Ausdrücke

$$x = r(\cos u\cos\vartheta - \sin u\sin\vartheta\cos i)$$
$$y = r(\cos u\sin\vartheta + \sin u\cos\vartheta\cos i)$$
$$z = r\sin u\sin i$$

und wegen

$$r' = \frac{\mu}{\Delta}e\sin f, \qquad u' = \frac{\Delta}{r^2} = \frac{\mu}{\Delta}\frac{1+e\cos f}{r},$$

$$x' = -\frac{\mu}{\Delta}\{(\sin u + e\sin\varpi)\cos\vartheta + (\cos u + e\cos\varpi)\sin\vartheta\cos i\}$$

$$y' = -\frac{\mu}{\Delta}\{(\sin u + e\sin\varpi)\sin\vartheta - (\cos u + e\cos\varpi)\cos\vartheta\cos i\}$$

$$z' = \frac{\mu}{\Delta}(\cos u + e\cos\varpi)\sin i$$

als Functionen der Zeit und der invarianten Elemente $\Delta\; i\;\vartheta\; e\;\varpi$ und τ bestimmt, wenn man r und u durch die Formeln

$$g = n(t-\tau) = \varepsilon - e\sin\varepsilon$$
$$r = a(1-e\cos\varepsilon) = \frac{p}{1+e\cos f}$$
$$u = f + \varpi$$

definirt.

Setzt man in Polarcoordinaten

$$x = r\cos b\cos l$$
$$y = r\cos b\sin l$$
$$z = r\sin b$$

so folgt

$$\cos u = \cos b \cos(l - \vartheta)$$
$$\sin u \cos i = \cos b \sin(l - \vartheta)$$
$$\sin u \sin i = \sin b$$

und es bedeuten die sphärischen Coordinaten l und b die Länge und Breite in Bezug auf die Fundamentalebene der xy.

Zugleich ergibt sich für das Quadrat der Geschwindigkeit, im Einklange mit der früheren Gleichung $\frac{1}{2}s's' = \frac{\mu}{r} + h$, der Werth

$$s's' = \frac{\mu}{p}\{(\sin u + e\sin\varpi)^2 + (\cos u + e\cos\varpi)^2\}$$
$$= \frac{\mu}{p}(1 + 2e\cos f + e^2) = \frac{\mu}{p}(1 + e\cos\varepsilon)$$
$$= \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = \frac{\mu}{a}\frac{r_1}{r},$$

letzteres, wenn man den conjugirten Radiusvector aus dem zweiten Brennpunkte durch r_1 bezeichnet.

7.

Die im Vorstehenden entwickelten Formeln führen zu einigen oft gebrauchten Differentialrelationen, welche hier Platz finden mögen. Man erhält ohne Schwierigkeit

$$dg = \frac{r}{a}d\varepsilon - \sin\varepsilon\, de$$
$$\frac{df}{\sin f} = \frac{d\varepsilon}{\sin\varepsilon} + \frac{de}{1 - e^2}$$
$$d\frac{r}{a} = e\sin\varepsilon\, d\varepsilon - \cos\varepsilon\, de$$
$$dp = (1 - e^2)\, da - 2ae\, de$$
$$0 = 3\frac{da}{a} + 2\frac{dn}{n}$$
$$\frac{d\Delta}{\Delta} = \frac{dp}{2p} = \frac{da}{2a} - \frac{e\, de}{1 - e^2}$$

$$\mu^2 e\,de = 2h\Delta\,d\Delta + \Delta^2\,dh$$

$$dh = \frac{\mu}{2a^2}\,da$$

$$dg = n\,dt + g\frac{dn}{n} - n\,d\tau$$

$$= \frac{r}{p}\sqrt{1-e^2}\left\{\frac{r}{a}\,df - \left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\,de\right\}$$

$$d\varepsilon = \frac{a}{r}\,dg + \frac{\sin f}{\sqrt{1-e^2}}\,de$$

$$= \frac{r}{a\sqrt{1-e^2}}\,df - \frac{\sin\varepsilon}{1-e^2}\,de$$

$$df = \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}\,dg + \left(1+\frac{p}{r}\right)\frac{\sin f}{1-e^2}\,de$$

$$= \frac{a\sqrt{1-e^2}}{r}\,d\varepsilon + \frac{\sin f}{1-e^2}\,de$$

$$dr = \frac{r}{a}\,da + \frac{ae}{\sqrt{1-e^2}}\sin f\,dg - a\cos f\,de$$

$$= \frac{r}{a}\,da + ae\sin\varepsilon\,d\varepsilon - a\cos\varepsilon\,de$$

$$= \frac{r}{p}\{dp + re\sin f\,df - r\cos f\,de\}$$

$$dr' = \frac{\mu}{\Delta}\left\{e\cos f\,df + \sin f\,de - \frac{e\sin f}{\Delta}\,d\Delta\right\}$$

$$= \frac{\mu}{2\Delta}\left\{\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\,de + (\cos f + \cos\varepsilon)e\,df - e\sin f\frac{dr}{r}\right\}$$

$$= \frac{\Delta}{2r}\left\{df - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\,dg - \frac{e\sin f}{p}\,dr\right\}$$

$$d\Delta = \frac{\Delta}{r}\,dr + \frac{r^2}{\Delta}(s'\,ds' - r'\,dr')$$

$$s'\,ds' = \frac{\mu}{2a^2}\,da - \frac{\mu}{r^2}\,dr = dh - \frac{\mu}{r^2}\,dr$$

$$= \frac{\mu}{r}\cos\varepsilon\,de - \frac{\mu r'}{\Delta}\,df - \frac{s's'}{\Delta}\,d\Delta\,.$$

Wir schalten an dieser Stelle noch einige Formeln ein, die sich durch Einführung einerseits des Excentricitätswinkels φ, für welchen $e = \sin\varphi$, sowie der complexen Einheiten (imaginären Exponentialgrössen)

$$\mathfrak{E}^{fi} = \cos f + i \sin f = \xi, \quad \mathfrak{E}^{\varepsilon i} = \eta, \quad \mathfrak{E}^{gi} = \zeta$$

andererseits ergeben. Man findet:

$$\frac{r}{a}\cos f = \cos\varepsilon - \sin\varphi \qquad \frac{p}{r}\cos\varepsilon = \cos f + \sin\varphi$$

$$\frac{r}{a}\sin f = \cos\varphi\,\sin\varepsilon \qquad \frac{p}{r}\sin\varepsilon = \cos\varphi\sin f$$

$$\operatorname{tg} f = \frac{\cos\varphi\,\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon - \sin\varphi} \qquad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\cos\varphi\,\sin f}{\cos f + \sin\varphi}$$

$$\sqrt{p}\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{2r}\sin\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin\tfrac{1}{2}f$$

$$\sqrt{p}\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{2r}\cos\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\cos\tfrac{1}{2}f$$

$$\sqrt{r}\sin\tfrac{1}{2}f = \sqrt{2a}\sin\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon$$

$$\sqrt{r}\cos\tfrac{1}{2}f = \sqrt{2a}\cos\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}f$$

$$\sqrt{r}\sin\tfrac{1}{2}(f-\varepsilon) = \sqrt{a}\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sin\varepsilon$$

$$\sqrt{r}\sin\tfrac{1}{2}(f+\varepsilon) = \sqrt{a}\cos\tfrac{1}{2}\varphi\sin\varepsilon$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(f-\varepsilon) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\sin\tfrac{1}{2}(f+\varepsilon)$$

$$\sqrt{r}\sin\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - f\right) = \sqrt{a}\sin\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon - \varphi\right)$$

$$\sqrt{r}\cos\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - f\right) = \sqrt{a}\cos\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon + \varphi\right)$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - f\right)\cos\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon + \varphi\right) = \sin\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon - \varphi\right)$$

$$\sqrt{p}\sin\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)=\sqrt{r}\sin\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-f+\varphi\right)$$

$$\sqrt{p}\cos\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)=\sqrt{r}\cos\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-f-\varphi\right)$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\cos\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-f-\varphi\right)=\sin\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-f+\varphi\right).$$

8.

Setzt man endlich $\beta=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$, so wird

$$\xi=\frac{1-\frac{\beta}{\eta}}{1-\beta\eta}\cdot\eta, \qquad \eta=\frac{1+\frac{\beta}{\xi}}{1+\beta\xi}\cdot\xi$$

$$r=\frac{p(1+\beta^2)}{(1+\beta\xi)\left(1+\frac{\beta}{\xi}\right)}=\frac{a}{1+\beta^2}(1-\beta\eta)\left(1-\frac{\beta}{\eta}\right)$$

$$r\xi=\frac{a\eta}{1+\beta^2}\left(1-\frac{\beta}{\eta}\right)^2, \qquad r\eta=\frac{p\xi(1+\beta^2)}{(1+\beta\xi)^2}$$

$$1-\beta^2=(1+\beta\xi)(1-\beta\eta)=\left(1+\frac{\beta}{\xi}\right)\left(1-\frac{\beta}{\eta}\right)$$

$$\eta-\frac{1}{\eta}=\frac{(1-\beta^2)\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right)}{(1+\beta\xi)\left(1+\frac{\beta}{\xi}\right)}, \quad \xi-\frac{1}{\xi}=\frac{(1-\beta^2)\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)}{(1-\beta\eta)\left(1-\frac{\beta}{\eta}\right)}$$

$$\beta\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)=\left(1-\frac{\beta}{\eta}\right)-(1-\beta\eta)$$

$$=(1-\beta^2)\left(\frac{1}{1+\frac{\beta}{\xi}}-\frac{1}{1+\beta\xi}\right)=(1-\beta^2)\left(\frac{\beta\xi}{1+\beta\xi}-\frac{\frac{\beta}{\xi}}{1+\frac{\beta}{\xi}}\right)$$

$$\beta\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right)=(1+\beta\xi)-\left(1+\frac{\beta}{\xi}\right)$$

$$=(1-\beta^2)\left(\frac{1}{1-\beta\eta}-\frac{1}{1-\frac{\beta}{\eta}}\right)=(1-\beta^2)\left(\frac{\beta\eta}{1-\beta\eta}-\frac{\frac{\beta}{\eta}}{1-\frac{\beta}{\eta}}\right)$$

$$\zeta = \eta \mathfrak{G}^{-\frac{\beta\eta}{1+\beta^2}} \cdot \mathfrak{G}^{\frac{1}{1+\beta^2}\frac{\beta}{\eta}}$$

$$= \eta \mathfrak{G}^{\frac{1}{1+\beta^2}(1-\beta\eta)} \cdot \mathfrak{G}^{-\frac{1}{1+\beta^2}\left(1-\frac{\beta}{\eta}\right)}$$

$$= \xi \frac{1+\frac{\beta}{\xi}}{1+\beta\xi} \cdot \mathfrak{G}^{-\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\frac{\beta\xi}{(1+\beta\xi)\left(1+\frac{\beta}{\xi}\right)}} \cdot \mathfrak{G}^{\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\frac{\frac{\beta}{\xi}}{(1+\beta\xi)\left(1+\frac{\beta}{\xi}\right)}}$$

$$= \xi \frac{1+\frac{\beta}{\xi}}{1+\beta\xi} \cdot \mathfrak{G}^{\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\frac{1}{1+\beta\xi}} \cdot \mathfrak{G}^{-\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\frac{1}{1+\frac{\beta}{\xi}}}$$

$$= \xi \frac{1+\frac{\beta}{\xi}}{1+\beta\xi} \cdot \mathfrak{G}^{-\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\frac{\beta\xi}{1+\beta\xi}} \cdot \mathfrak{G}^{\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\frac{\frac{\beta}{\xi}}{1+\frac{\beta}{\xi}}}.$$

Diese Ausdrücke finden Anwendung, wenn man Functionen von der Form

$$r^k \mathfrak{G}(lf+m\varepsilon+ng)i = r^k \xi^l \eta^m \zeta^n$$

in Fourier'sche Reihen nach den trigonometrischen Functionen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie entwickeln will[1]).

9.

Es handelt sich jetzt darum, durch Anwendung der Methode der Variation der arbiträren Constanten von der ungestörten zur gestörten Bewegung überzugehen. Diess geschieht, indem man die im ungestörten Problem für die Invarianten gefundenen Ausdrücke, welche im gestörten Problem aufhören, Constanten gleich zu sein, an Stelle der Coordinaten und ihrer Differentialquotienten als neue Variable einführt, und demgemäss das System Differentialgleichungen

$$dt : da : db : dc : da_0 : db_0 : dc_0 : dp : di : d\vartheta : de : d\varpi : d\tau =$$
$$= 1 : \delta a' : \delta b' : \delta c' : \delta a_0' : \delta b_0' : \delta c_0' : \delta p' : \delta i' : \delta \vartheta' : \delta e' : \delta \varpi' : \delta \tau'$$

---

1) Man vgl. auch Hansen's »*Neue directe Auflösung des Kepler'schen Problems*« in den Berichten der K. S. Ges. d. Wiss. vom 14. Novbr. 1852.

aufstellt, wo die mit δ bezeichneten Functionen von den störenden Kräften abhängen und mit denselben verschwinden. Auch können p und e durch Δ und h oder a ersetzt werden.

Im gestörten Problem führen die jetzt nicht mehr invarianten Elemente E den Namen der osculirenden Elemente, sie zerfallen in einen constanten und einen variabeln Theil

$$E = e + \delta e$$

und besitzen die Eigenschaft, dass wenn zur Zeit t^0 die störenden Kräfte verschwinden sollen, die elliptische Bewegung mit den constanten, der Zeit t^0 entsprechenden Werthen der osculirenden Elemente $E^0 = e + \delta e^0$ eintreten würde. Man kann daher sagen, dass die gestörte Bewegung im Zeitmoment dt mit der elliptischen Bewegung für die osculirenden Elemente E, mit anderen Worten mit der Bewegung in der osculirenden Ellipse übereinstimmt.

Im Uebrigen ergibt sich weiter, dass die Invarianten der gestörten Bewegung durch $J = E - \delta e$ ausgedrückt werden können, weil diese Differenzen jetzt willkürlichen Constanten gleich werden.

Die Vergleichung der ungestörten Gleichungen $e_n = F_n$ mit den gestörten $E_n = F_n$ zeigt aber, dass wenn man aus ihnen die Coordinaten $\Xi H Z\ xyz$ nebst ihren Differentialquotienten als Functionen der Elemente und der Zeit bestimmt, diese Functionen im gestörten Problem eben so von den osculirenden Elementen E abhängen, wie im ungestörten von den constanten Elementen e. Daraus folgt weiter, dass man auch bei der gestörten Bewegung die Ausdrücke der Coordinaten nach t so differentiiren darf, als wenn die osculirenden Elemente constant wären. Dasselbe gilt folglich auch von jeder Function der Zeit und der Coordinaten, welche deren Differentialquotienten nicht enthält, wie z. B. vom Radiusvector $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, u. s. w.

Die erwähnte Bedingung kann aber, wie HANSEN und JACOBI gezeigt haben [1]), auch für solche Grössen erfüllt sein, welche sich nicht unmittelbar als Functionen von t und den Coordinaten

1) Crelle's Journal Bd. 42, S. 1—31, u. Berichte der K. S. Ges. d. Wiss. vom 14. Juni 1851, S. 39—54; vgl. auch in JACOBI's Werken S. 246—279 des 7. Bandes.

darstellen lassen. So z. B. besitzt ein Integralausdruck von der Form

$$u = \int \varphi \, dt,$$

wo φ eine Function der Coordinaten und ihrer Differentialquotienten bezeichnet, die Eigenschaft, im gestörten, wie im ungestörten Falle der Gleichung $u' = \varphi$ zu genügen.

10.

Wegen der Wichtigkeit der erörterten Eigenschaft sollen alle Coordinaten von der Beschaffenheit, dass nicht nur sie selbst, sondern auch ihre ersten Differentialquotienten in Bezug auf die Zeit in der gestörten Bewegung dieselbe Form haben, wie in der ungestörten, mit dem Namen der idealen Coordinaten bezeichnet werden.

Um dafür analytisch eine einfache Ausdrucksweise zu gewinnen, wollen wir die partiellen Differentialquotienten nach der Zeit, sofern diese nicht in den osculirenden Elementen vorkommt, durch das runde ∂ bezeichnen; sollen dagegen die allein von den störenden Kräften abhängigen Grössen als variabel angesehen werden, so wollen wir diess durch Hinzufügung einer Parenthese ausdrücken. Für die vollständigen Differentialquotienten nach t endlich wird überall, wie bisher, das stehende d oder die Lagrange'sche Accentuirung beibehalten.

Sei also eine Grösse u als Function der osculirenden Elemente und der Zeit gegeben, so hat man allgemein die Gleichung

$$\frac{du}{dt} = u' = \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right).$$

Wenn nun u als Function der Elemente allein ausgedrückt und folglich selbst als osculirendes Element angesehen werden kann, so wird $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, mithin auch

$$\frac{du}{dt} = u' = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \text{ oder } u = \int u' \, dt = \int \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) dt,$$

ist dagegen u eine ideale Coordinate, so findet umgekehrt die Gleichung $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0$ statt, und damit folgt weiter

$$\frac{du}{dt} = u' = \frac{\partial u}{\partial t} \text{ oder } u = \int u'\,dt = \int \frac{\partial u}{\partial t}\,dt.$$

Für den zweiten Differentialquotienten einer idealen Coordinate gilt die Gleichung $u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ nicht mehr, weil $\left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right)$ nicht verschwindet. Es ist zwar $\frac{\partial u'}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, in der Gleichung $u'' = \frac{\partial u'}{\partial t} + \left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right)$ muss aber der von den störenden Kräften abhängige Theil besonders entwickelt werden. So folgt z. B. aus $x'' = X + \delta X$

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = X \text{ nebst } \left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right) = \delta X.$$

Wir werden in den Fall kommen, die Integralgleichungen

$$u = \int \frac{\partial u}{\partial t}\,dt \quad \text{und} \quad u = \int \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) dt$$

auf solche Grössen anzuwenden, die weder ideale Coordinaten, noch osculirende Elemente, sondern beliebige Functionen der Zeit und der variabeln Elemente sind. In diesem Falle gilt natürlich die vollständige Gleichung

$$u = \int \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right) dt + u_0,$$

wo u_0 die willkürliche Constante bezeichnet, allein man wird auch

$$u = \int \frac{\partial u}{\partial t} \bar{dt} + u_1 \quad \text{und} \quad u = \int \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \bar{dt} + u_2$$

setzen dürfen, wenn der Strich über $\bar{dt}$ ausdrückt, dass die nämlichen Functionen von t, wie bei der Differentiation, auch bei der Integration als constant angesehen werden sollen, während u_1 und u_2 als Functionen derselben Grössen zu bestimmen sind.

Eine Invariante J des gestörten Problems kann zugleich als ideale Coordinate und als osculirendes Element angesehen werden, sofern für eine solche die Gleichungen

$$\frac{\partial J}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial J}{\partial t}\right) = 0$$

gleichzeitig erfüllt sind. Setzt man z. B. bei der gestörten Bewegung

$$yz' - zy' = i_1 ,$$

so wird

$$i_1' = yz'' - zy'' = y\delta Z - z\delta Y = \delta i_1'$$

und

$$J = yz' - zy' - \int (y\delta Z - z\delta Y)\, dt = i_1 - \int \delta i_1'\, dt .$$

Und wenn

$$i_2' = z\delta X - x\delta Z , \quad i_3' = x\delta Y - y\delta X , \quad u = i_1 x + i_2 y + i_3 z ,$$

so erhält man sowohl

$$i_1 x' + i_2 y' + i_3 z' = \frac{\delta u}{\delta t} = 0$$

wie

$$i_1' x + i_2' y + i_3' z = \left(\frac{\delta u}{\delta t}\right) = 0 .$$

11.

Da der Flächensatz nur gilt, wenn die Kraftcomponenten sich wie die Coordinaten verhalten, so wird bei der gestörten Bewegung die Gleichung

$$i_1 x + i_2 y + i_3 z = 0 \quad \text{oder} \quad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$$

im Allgemeinen nicht eine constante Bahnebene darstellen, sondern eine mit den Elementen $i_1 i_2 i_3$ oder $\alpha\beta\gamma$ variable Ebene, in welcher die osculirende Bahnellipse liegt. Wir nennen diese Ebene die ideale Bahnebene, dieselbe fällt nicht zusammen mit der osculirenden oder Schmiegungsebene an die wirklich beschriebene Bahncurve. Denn während die Schmiegungsebene durch drei aufeinander folgende Punkte der Curve bestimmt wird, geht die ideale Bahnebene durch zwei successive Radiivectoren, oder was dasselbe ist, durch zwei aufeinander folgende Punkte der Curve und durch den Centralkörper m_1 als Coordinatenursprung. Diess folgt, weil der Punkt $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ vermöge der Gleichung

$$x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma = 0$$

gleichfalls in der idealen Ebene liegt. Weiter erhellt, dass diese Ebene sich bewegt, indem sie sich um den Radiusvector dreht, den sie in zwei successiven Lagen gemeinsam hat: derselbe ist folglich die instantane Drehungsaxe.

Legt man also in der variabeln Bahnebene durch den Coordinatenursprung eine feste Axe, die Axe der X, so ist diese in der idealen Ebene zwar unverrückbar, aber mit derselben beweglich. Sei nun v der Winkel, welchen der Radiusvector mit der X-Axe bildet, so hat der Zuwachs des doppelten Sectors $\Delta = \sqrt{\mu p}$ in der Zeit dt den Werth

$$\Delta\, dt = r^2\, dv\,,$$

folglich ist

$$v' = \frac{\Delta}{r^2} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}\,,$$

welche Gleichung ungeändert bleibt, mag man die gestörte oder die ungestörte Bewegung betrachten. Dieser von Hansen eingeführte Winkel $v = \int \varphi\, dt$ besitzt die Eigenschaften einer idealen Coordinate und soll desshalb als die ideale Anomalie bezeichnet werden. Denn offenbar ist

$$\varphi = \frac{\sqrt{(yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2}}{x^2 + y^2 + z^2}$$

durch die Coordinaten und ihre Differentialquotienten ausdrückbar. Es liegt in der Natur der Sache, dass nur der Differentialquotient v' definirt wird, weil die Lage der X-Axe willkürlich ist.

Wenn man die Winkel, welche letztere mit der Richtung nach dem Perihel und dem aufsteigenden Knoten bildet, χ und σ nennt, so wird

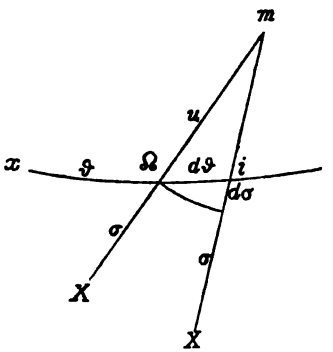
$$\chi = \varpi + \sigma\,, \quad v = f + \chi = u + \sigma\,.$$

Im ungestörten Problem sind χ und σ gleichwie ϖ constant, bei der gestörten Bewegung dagegen wird

$$d\sigma = \cos i\, d\vartheta\,,$$

weil bei einer Drehung der idealen Ebene um den Radiusvector r das unendlich kleine Dreieck mit den den Winkel i ein-

schliessenden Seiten $d\sigma$ und $d\vartheta$ rechtwinklig ist, wie die beistehende Figur zeigt.



Man kann die Einführung der idealen Anomalie durch die Differentialformel

$$dv = \frac{\Delta}{r^2}\,dt$$

auch auffassen als die Hinzufügung einer neuen abhängigen Variabeln v zu den Variabeln des gegebenen Systems simultaner Differentialgleichungen. Da diese eine neue Integration erfordert, so entsteht dadurch die neue Invariante

$$\chi = v - \int \frac{\Delta}{r^2}\,dt = v - f,$$

welche bei der ungestörten Bewegung ein constantes, bei der gestörten aber ein neues osculirendes Element liefert. Dasselbe stellt den Werth der idealen Anomalie im Perihele dar, wo die wahre Anomalie verschwindet. Statt dessen kann man auch

$$\sigma = v - u$$

als Element einführen, es bleiben dann

$$\delta\chi = \delta\varpi + \delta\sigma \quad \text{und} \quad \delta\sigma$$

zu ermitteln.

12.

Bevor wir weiter gehen, wollen wir die halbe lebendige Kraft des Systems:

$$T = \tfrac{1}{2}m(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + \tfrac{1}{2}m_1(\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2)$$

untersuchen, welche durch Einführung von xyz übergeht in

$$\tfrac{1}{2}m\left\{\left(\Xi' + \frac{m_1 x'}{M}\right)^2 + \left(H' + \frac{m_1 y'}{M}\right)^2 + \left(Z' + \frac{m_1 z'}{M}\right)^2\right\}$$

$$+\tfrac{1}{2}m_1\left\{\left(\Xi' - \frac{m x'}{M}\right)^2 + \left(H' - \frac{m y'}{M}\right)^2 + \left(Z' - \frac{m z'}{M}\right)^2\right\} =$$

$$= \tfrac{1}{2}M(\Xi'\Xi' + H'H' + Z'Z') + \frac{m m_1}{2M}(x'x' + y'y' + z'z'),$$

folglich

$$\frac{dT}{dt} = -k^2 m m_1 \frac{r'}{r^2} + M(\Xi' \delta\Xi + H' \delta\mathsf{H} + Z' \delta\mathsf{Z})$$

$$+ \frac{m m_1}{M}(x' \delta\mathsf{X} + y' \delta\mathsf{Y} + z' \delta\mathsf{Z}) .$$

In dem ungestörten Problem wird

$$T = U + H, \quad \text{wo} \quad U = \frac{k^2 m m_1}{r}$$

die Kräftefunction und $T - U$ die Invariante der lebendigen Kraft mit dem constanten Element H. Im gestörten Problem dagegen ist das osculirende Element H durch die Differentialgleichung

$$\delta H' = M(\Xi' \delta\Xi + H' \delta\mathsf{H} + Z' \delta\mathsf{Z}) +$$

$$+ \frac{m m_1}{M}(x' \delta\mathsf{X} + y' \delta\mathsf{Y} + z' \delta\mathsf{Z})$$

bestimmt. Die Trägheitsbewegung des Schwerpunkts wird durch die Componenten $\delta\Xi$ $\delta\mathsf{H}$ $\delta\mathsf{Z}$ der störenden Kräfte gestört, deren Projection auf die Bewegungsrichtung des Schwerpunkts durch

$$\delta\Sigma = \frac{\Xi' \delta\Xi + H' \delta\mathsf{H} + Z' \delta\mathsf{Z}}{\sqrt{\Xi'^2 + H'^2 + Z'^2}}$$

ausgedrückt wird. Ebenso ist die Störungscomponente in der Richtung der relativen Bewegung von m oder der Tangente an die Bahncurve durch

$$\delta\mathsf{T} = \frac{x' \delta\mathsf{X} + y' \delta\mathsf{Y} + z' \delta\mathsf{Z}}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

gegeben. Bezeichnet man die betreffenden Geschwindigkeiten durch Σ' resp. s', so wird

$$\delta H' = M\Sigma' \delta\Sigma + \frac{m m_1}{M} s' \delta\mathsf{T}.$$

Für die Invariante der gestörten Bewegung aber erhält man

$$J = T - U - \delta H .$$

Wenn der Ausdruck

$$M(\Xi'\delta\Xi + H'\delta H + Z'\delta Z) + \frac{mm_1}{M}(x'\delta X + y'\delta Y + z'\delta Z)$$

den vollständigen Differentialquotienten einer Function δU der Coordinaten und ihrer ersten Differentialquotienten darstellt, so wird

$$\delta H = \delta U,$$

und die Function

$$\delta U = f(\Xi H Z\ xyz\ \Xi' H' Z'\ x'y'z')$$

führt den Namen der **störenden Kräftefunction**. Dieser Fall tritt offenbar ein, wenn die zwischen m und m_1 thätigen Kräfte nicht nur in der Richtung der Verbindungslinie $mm_1 = r$ wirken, sondern auch durch einen Ausdruck von der Form

$$\frac{dW}{dr} = \frac{W'}{r'}$$

gegeben sind, wo das Potential W eine beliebige Function von r und r' bedeuten kann. In der That wird dann

$$\delta\Xi = \delta H = \delta Z = 0,$$

$$\delta X = \frac{dW}{dr}\frac{\delta r}{\delta x}, \quad \delta Y = \frac{dW}{dr}\frac{\delta r}{\delta y}, \quad \delta Z = \frac{dW}{dr}\frac{\delta r}{\delta z},$$

$$\frac{mm_1}{M}(x'\delta X + y'\delta Y + z'\delta Z) = \frac{mm_1}{M}\frac{W'}{r'}\frac{xx' + yy' + zz'}{r}$$

$$= \frac{mm_1}{M}W',$$

folglich

$$\delta U = \frac{mm_1}{M}W,$$

während für die ungestörte Bewegung

$$U = \frac{k^2 mm_1}{r} = \frac{mm_1}{M}\frac{\mu}{r}, \quad \frac{dU}{dr} = -\frac{mm_1}{M}\frac{\mu}{r^2}.$$

Wenn die Störungen durch Kräfte hervorgebracht werden, die nach dem Weber'schen Gesetze wirken, so hat man bekanntlich

$$W = -\frac{\mu r'r'}{c^2 r}, \quad \delta U = -\frac{mm_1}{M}\frac{\mu r'r'}{c^2 r} = -\frac{k^2 mm_1}{c^2}\frac{r'r'}{r}$$

und die Formel

$$\frac{d(U+\delta U)}{dr} = -\frac{k^2 m m_1}{r^2}\left\{1 - \frac{r'r' - 2rr''}{cc}\right\}$$

enthält das elektrodynamische Fundamentalgesetz.

13.

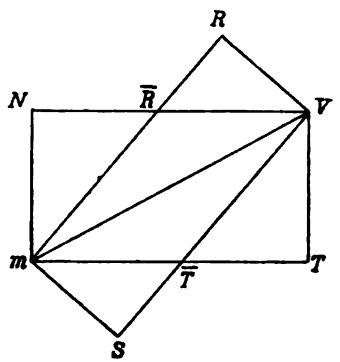
Um die Differentialgleichungen für die osculirenden Elemente in bequemer Form zu erhalten, entwickeln wir zunächst die Componenten der störenden Kräfte nach gewissen Hauptrichtungen. Als solche bieten sich vor Allem dar die Richtung der Bewegung (der Bahntangente), die Richtung des Radiusvectors und die Richtung senkrecht zur idealen Ebene. Bezeichnet man die entsprechenden Störungscomponenten durch δT, δR, δU und nennt δV die Gesammtcomponente in der Bahnebene, so ergibt sich sogleich

$$\delta U^2 + \delta V^2 = \delta X^2 + \delta Y^2 + \delta Z^2$$

$$r\delta R = x\delta X + y\delta Y + z\delta Z$$
$$= x\left(\frac{\delta x'}{\delta t}\right) + y\left(\frac{\delta y'}{dt}\right) + z\left(\frac{\delta z'}{\delta t}\right) = r\left(\frac{\delta r'}{\delta t}\right)$$

$$s'\delta T = x'\delta X + y'\delta Y + z'\delta Z$$
$$= x'\left(\frac{\delta x'}{\delta t}\right) + y'\left(\frac{\delta y'}{\delta t}\right) + z'\left(\frac{\delta z'}{\delta t}\right) = s'\left(\frac{\delta s'}{\delta t}\right)$$

$$\Delta\delta U = i_1\,\delta X + i_2\,\delta Y + i_3\,\delta Z,$$



wo wegen $i_3 = \Delta\cos i$ die Richtung U den Winkel i mit der positiven Z-Axe bildet.

Es ist vielleicht nicht überflüssig zu erinnern, dass man hiernach zwar die Störungscomponenten δX δY δZ durch δR δT δU ersetzen kann, aber nicht in dem Sinne, dass die letzteren, welche in der Bahnebene keinen rechten Winkel einschliessen, nach dem Kräfte-

parallelogramm zur Gesammtresultanten δV vereinigt werden dürfen. Will man δV nach den Richtungen R und T zerlegen und nennt die Componenten $\delta\bar{R}$ und $\delta\bar{T}$, so ergibt die Figur sogleich

$$\delta T = \delta\bar{T} + \delta\bar{R}\cos RT$$
$$\delta R = \delta\bar{R} + \delta\bar{T}\cos RT,$$

mithin, da $\cos RT = \frac{dr}{ds} = \frac{r'}{s'}$

$$s'\delta R = s'\delta\bar{R} + r'\delta\bar{T}, \quad \delta\bar{R} = \frac{r^2 s'}{\Delta^2}(s'\delta R - r'\delta T),$$

$$s'\delta T = r'\delta\bar{R} + s'\delta\bar{T}, \quad \delta\bar{T} = \frac{r^2 s'}{\Delta^2}(s'\delta T - r'\delta R).$$

Selbstverständlich erhält man jetzt nach dem Kräfteparallelogramm

$$\delta V^2 = \delta\bar{R}^2 + \delta\bar{T}^2 + 2\frac{r'}{s'}\delta\bar{R}\,\delta\bar{T}$$
$$= \frac{r^2 s'^2}{\Delta^4}(\delta R^2 + \delta T^2 - 2\frac{r'}{s'}\delta R\,\delta T).$$

Weiter gibt die Figur, wenn δS und δN die Componenten senkrecht zum Radiusvector und in der Richtung der Normale bezeichnen:

$$\delta S = \delta\bar{T}\sin RT = \frac{r}{\Delta}(s'\delta T - r'\delta R)$$

$$\delta N = \delta\bar{R}\sin RT = \frac{r}{\Delta}(s'\delta R - r'\delta T)$$

oder

$$s'\delta T = r'\delta R + \frac{\Delta}{r}\delta S, \quad s'\delta R = r'\delta T + \frac{\Delta}{r}\delta N$$

$$s'\delta N = \frac{\Delta}{r}\delta R - r'\delta S, \quad s'\delta S = \frac{\Delta}{r}\delta T - r'\delta N$$

$$\delta V^2 = \delta R^2 + \delta S^2 = \delta N^2 + \delta T^2$$

$$\sin RT = \frac{\sqrt{s'^2 - r'^2}}{s'} = \frac{\Delta}{rs'}$$

$$= \frac{1 + e\cos f}{\sqrt{1 + 2e\cos f + e^2}} = \sqrt{\frac{1 - e^2}{1 - e^2\cos^2\varepsilon}}.$$

Für $r' = 0$ (Kreisbahn) fallen δN mit δR und δS mit δT zusammen. Es ist also die Richtung der Normale N nach Aussen und der Senkrechten S im Sinne der Bewegung bestimmt.

Zugleich ergeben sich die Gleichungen

$$\delta S = r\left(\frac{\delta v'}{\delta t}\right) = \left(\frac{\delta}{\delta t}\frac{\Delta}{r}\right), \quad \delta N = \frac{\Delta^2}{rs'}\left(\frac{\delta}{\delta t}\frac{r'}{\Delta}\right),$$

wenn man die Differentiation nach den Elementen ausführt und die Gleichung berücksichtigt

$$rv' = \frac{\Delta}{r} = \sqrt{s'^2 - r'^2}.$$

Seien abc und $a_1 b_1 c_1$ die Winkel, welche δS und resp. δN mit den Coordinatenaxen bilden, so hat man nicht allein

$$\delta S = \delta X \cos a + \delta Y \cos b + \delta Z \cos c$$
$$\delta N = \delta X \cos a_1 + \delta Y \cos b_1 + \delta Z \cos c_1,$$

sondern auch umgekehrt

$$\delta X = \frac{x}{r}\delta R + \cos a\, \delta S + \cos\alpha\, \delta U$$
$$= \frac{x'}{s'}\delta T + \cos a_1 \delta N + \cos\alpha\, \delta U,$$

sowie analog für δY und δZ. Die bekannten Cosinusformeln der Transformation rechtwinkliger Coordinaten liefern:

$$\frac{x}{r} = \cos b \cos\gamma - \cos c \cos\beta$$
$$r\cos a = z\cos\beta - y\cos\gamma$$
$$r\cos\alpha = y\cos c - z\cos b$$
$$\frac{x'}{s'} = \cos b_1 \cos\gamma - \cos c_1 \cos\beta$$
$$s'\cos a_1 = z'\cos\beta - y'\cos\gamma$$
$$s'\cos\alpha = y'\cos c_1 - z'\cos b_1$$

u. s. w., mithin auch

$$y\,\delta Z - z\,\delta Y = r(\cos\alpha\,\delta S - \cos a\ \delta U)$$
$$y'\delta Z - z'\delta Y = s'(\cos\alpha\,\delta N - \cos a_1\,\delta U)$$

u. s. w.

14.

Die Werthe von $\cos\mathfrak{a}$, $\cos\mathfrak{b}$, $\cos\mathfrak{c}$ und $\cos\mathfrak{a}_1$, $\cos\mathfrak{b}_1$, $\cos\mathfrak{c}_1$ ergeben sich, da S auf R und T auf N senkrecht steht, wenn man in den Ausdrücken des Art. 6 für xyz einerseits und $x'y'z'$ andererseits u und ϖ um $\frac{\pi}{2}$ vermehrt und resp. vermindert. Man findet

$$\cos\mathfrak{a} = -\{\sin u\cos\vartheta + \cos u\sin\vartheta\cos i\}$$

$$\cos\mathfrak{b} = -\{\sin u\sin\vartheta - \cos u\cos\vartheta\cos i\}$$

$$\cos\mathfrak{c} = \cos u\sin i,$$

$$s'\cos\mathfrak{a}_1 = \frac{\mu}{\Delta}\{(\cos u + e\cos\varpi)\cos\vartheta - (\sin u + e\sin\varpi)\sin\vartheta\cos i\}$$

$$s'\cos\mathfrak{b}_1 = \frac{\mu}{\Delta}\{(\cos u + e\cos\varpi)\sin\vartheta + (\sin u + e\sin\varpi)\cos\vartheta\cos i\}$$

$$s'\cos\mathfrak{c}_1 = \frac{\mu}{\Delta}(\sin u + e\sin\varpi)\sin i.$$

Da die Richtungen von S und N ausser der idealen Ebene $i_1\xi + i_2\eta + i_3\zeta = 0$ bestimmt werden durch die Ebenen

$$x\xi + y\eta + z\zeta = 0 \quad \text{und resp.} \quad x'\xi + y'\eta + z'\zeta = 0,$$

so kann man auch

$$\Delta r\delta\mathbf{S} = (i_2z - i_3y)\delta\mathbf{X} + (i_3x - i_1z)\delta\mathbf{Y} + (i_1y - i_2x)\delta\mathbf{Z}$$

$$\Delta s'\delta\mathbf{N} = (i_2y' - i_3z')\delta\mathbf{X} + (i_1z' - i_3x')\delta\mathbf{Y} + (i_3x' - i_1y')\delta\mathbf{Z}$$

setzen und erhält durch eine leichte Transformation

$$\Delta\delta\mathbf{S} = (rx' - xr')\delta\mathbf{X} + (ry' - yr')\delta\mathbf{Y} + (rz' - zr')\delta\mathbf{Z}$$
$$= r(s'\delta\mathbf{T} - r'\delta\mathbf{R})$$

$$\Delta s'\delta\mathbf{N} = (s's'x - rr'x')\delta\mathbf{X} + (s's'y - rr'y')\delta\mathbf{Y} + (s's'z - rr'z')\delta\mathbf{Z}$$
$$= rs'(s'\delta\mathbf{R} - r'\delta\mathbf{T}),$$

so dass

$$\Delta\cos\mathfrak{a} = rx' - xr', \quad \Delta r\cos\mathfrak{a} = i_2z - i_3y, \quad \text{u. s. w.}$$

$$\Delta s'\cos\mathfrak{a}_1 = s's'x - rr'x' = i_3y' - i_2z', \quad \text{u. s. w.}$$

Wir wollen noch die Componenten δP und δQ in der Richtung des Perihels und senkrecht darauf untersuchen. Man erhält sogleich

$$\delta P = \cos f \delta R - \sin f \delta S$$
$$\delta Q = \sin f \delta R + \cos f \delta S$$

oder

$$\delta P = \cos \varepsilon \delta R - \frac{rs'}{\Delta} \sin f \delta T$$

$$\delta Q = \frac{\sin \varepsilon}{\sqrt{1-e^2}} \delta R + \frac{rs'}{\Delta} \cos f \delta T$$

und bei Einführung von $\delta \bar{R}$ und $\delta \bar{T}$

$$\delta P = \cos f \delta \bar{R} - \frac{\mu}{\Delta s'} \sin f \delta \bar{T} = \cos f \delta \bar{R} - \frac{\Delta}{rs'} \frac{\sin \varepsilon}{\sqrt{1-e^2}} \delta \bar{T}$$

$$\delta Q = \sin f \delta \bar{R} + \frac{\mu}{\Delta s'} (\cos f + e) \delta \bar{T} = \sin f \delta \bar{R} + \frac{\Delta}{rs'} \cos \varepsilon \delta \bar{T}.$$

[1])Endlich ergeben sich für die Componenten δR_1 und δS_1 in der Richtung des conjugirten Radiusvectors $r_1 = 2a - r$ aus dem zweiten Brennpunkte und senkrecht darauf die Werthe

$$\delta R_1 = \delta R \cos RR_1 - \delta S \sin RR_1$$
$$\delta S_1 = \delta R \sin RR_1 + \delta S \cos RR_1,$$

folglich

$$r_1 \delta R_1 = (r + 2ae \cos f) \delta R - 2ae \sin f \delta S$$
$$= 2ae \delta P + r \delta R$$
$$r_1 \delta S_1 = 2ae \sin f \delta R + (r + 2ae \cos f) \delta S$$
$$= 2ae \delta Q + r \delta S$$
$$\delta V^2 = \delta P^2 + \delta Q^2 = \delta R_1^2 + \delta S_1^2.$$

Wir bemerken noch, dass die Componenten δR_2 und δS_2 in der Richtung des Radiusvectors $r_2 = a\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varepsilon}$ aus dem Centrum der Ellipse und senkrecht darauf auf die Ausdrücke führen:

---

1) Die Veranlassung zur Betrachtung der Componenten δR_1 δR_2... bot die von Möbius (Crelle's Journal, Bd. 32 S. 447) vorgeschlagene Einführung der Variationen des Centrums und des zweiten Brennpunkts bei der gestörten Ellipse.

$$r_2 \delta R_2 = ae\delta P + r\delta R$$
$$r_2 \delta S_2 = ae\delta Q + r\delta S ,$$

während die analogen Gleichungen gelten

$$\frac{\Delta s'}{\mu}\delta N = e\delta P + \delta R \qquad \frac{\Delta s'}{\mu} = \sqrt{1 + 2e\cos f + e^2}$$
$$\frac{\Delta s'}{\mu}\delta T = e\delta Q + \delta S .$$

15.

Wenn die Störungscomponenten δX δY δZ sich wie die partiellen Differentialquotienten einer Störungsfunction

$$\Omega = f(xyzt)$$

nach den Coordinaten verhalten und die Argumente xyz von einer Grösse w abhängen, die sonst in Ω nicht vorkommt, so folgt aus den Gleichungen

$$\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \delta X , \quad \lambda\frac{\partial\Omega}{\partial y} = \delta Y , \quad \lambda\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \delta Z$$

auch

$$\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial w} = \frac{\partial x}{\partial w}\delta X + \frac{\partial y}{\partial w}\delta Y + \frac{\partial z}{\partial w}\delta Z = \varrho\delta W .$$

Setzt man

$$\frac{\partial x}{\partial w} = \varrho\cos\xi , \quad \frac{\partial y}{\partial w} = \varrho\cos\eta , \quad \frac{\partial z}{\partial w} = \varrho\cos\zeta ,$$

so bedeutet δW die Störungscomponente in der Richtung $(\xi\eta\zeta)$.

So erhält man mittelst der Ausdrücke des Art. 6 für xyz:

$$\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial r} = \frac{x}{r}\delta X + \frac{y}{r}\delta Y + \frac{z}{r}\delta Z = \delta R$$
$$\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial u} = r(\cos a\,\delta X + \cos b\,\delta Y + \cos c\,\delta Z) = r\delta S = \Delta'$$
$$= \lambda\frac{\partial\Omega}{\partial\varpi} = \lambda\frac{\partial\Omega}{\partial\chi} = -\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma} = \lambda\frac{\partial\Omega}{\partial v} = \lambda\frac{\partial\Omega}{\partial f}$$

$$\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial i} = r\sin u(\cos\alpha\,\delta X + \cos\beta\,\delta Y + \cos\gamma\,\delta Z) = r\sin u\,\delta U$$

$$\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta} = \lambda\frac{\partial\Omega}{\partial l} = x\delta Y - y\delta X = i'_3$$

$$= r(\cos i\,\delta S - \cos u\sin i\,\delta U),$$

während

$$\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial b} = r\{-\sin b\cos l\,\delta X - \sin b\sin l\,\delta Y + \cos b\,\delta Z\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\{-xz\,\delta X - yz\,\delta Y + (x^2+y^2)\,\delta Z\}$$

$$= \frac{r}{\sqrt{\cos^2 i + \cos^2 u\sin^2 i}}\{\cos u\sin i\,\delta S + \cos i\,\delta U\} = r\,\delta W,$$

wo die Richtung der Componente δW durch den Durchschnitt der RZ- und SU-Ebene bestimmt ist und den Winkel b mit der positiven z-Axe bildet.

Setzt man aber $w = t$ und differentiirt nur, sofern die Zeit in xyz enthalten ist, so wird

$$\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial t} = x'\delta X + y'\delta Y + z'\delta Z = s'\,\delta T,$$

während

$$\Omega' = \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial t} + \left[\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right],$$

wenn wir durch die Klammern ausdrücken, dass nach der Zeit ausserhalb der Coordinaten differentiirt werden soll. Endlich ist

$$0 = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{\partial\Omega}{\partial i}i' + \frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta}\vartheta' + \frac{\partial\Omega}{\partial\varpi}\varpi' + \frac{\partial\Omega}{\partial a}a' + \frac{\partial\Omega}{\partial e}e' + \frac{\partial\Omega}{\partial g}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right),$$

weil Ω eine ideale Coordinate ist.

Sind i ϑ und ϖ von w unabhängig, so ist

$$\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{\partial r}{\partial w}\cos\lambda + \frac{\partial f}{\partial w}r\cos\alpha \quad \text{u. s. w.},$$

folglich

$$\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial w}=\frac{\partial r}{\partial w}\delta\mathbf{R}+\frac{\partial f}{\partial w}r\delta\mathbf{S}.$$

Für $w=t$ z. B. wird $\frac{\partial r}{\partial t}=r'$, $\frac{\partial u}{\partial t}=v'=\frac{\Delta}{r^2}$, folglich wie oben

$$\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial t}=r'\delta\mathbf{R}+\frac{\Delta}{r}\delta\mathbf{S}=s'\delta\mathbf{T}.$$

Für $w=\varepsilon$ wird $\frac{\partial r}{\partial\varepsilon}=ae\sin\varepsilon$, $\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}=\frac{a}{r}\sqrt{1-e^2}$ und damit

$$\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}=a(e\sin\varepsilon\,\delta\mathbf{R}+\sqrt{1-e^2}\,\delta\mathbf{S})=\frac{rs'}{an}\delta\mathbf{T}.$$

Weiter hat man

$$\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial a}=\frac{\partial r}{\partial a}\delta\mathbf{R}+\frac{\partial f}{\partial a}r\delta\mathbf{S}$$

$$=\frac{r}{a}\delta\mathbf{R}$$

$$\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial e}=\frac{\partial r}{\partial e}\delta\mathbf{R}+\frac{\partial f}{\partial e}r\delta\mathbf{S}=\frac{\Delta e}{1-e^2}\chi'$$

$$=a\left\{-\cos f\,\delta\mathbf{R}+\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\,\delta\mathbf{S}\right\}$$

$$=\frac{\Delta}{(1-e^2)s'}\{2\sin f\,\delta\mathbf{T}-(\cos\varepsilon+e)\delta\mathbf{N}\}$$

$$\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial g}=\frac{\partial r}{\partial g}\delta\mathbf{R}+\frac{\partial f}{\partial g}r\delta\mathbf{S}=\frac{1}{n}h'$$

$$=\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\{e\sin f\,\delta\mathbf{R}+\frac{p}{r}\delta\mathbf{S}\}=\frac{s'}{n}\delta\mathbf{T},$$

wobei man sich der Differentialformeln des Art. 7 bedienen kann. Es braucht wohl nicht ausdrücklich erwähnt zu werden, dass die Werthe der partiellen Differentialquotienten ganz von der Wahl der variabeln Elemente abhängen, so dass z. B. $\frac{\partial\Omega}{\partial e}$ neben $\frac{\partial\Omega}{\partial p}$ oder $\frac{\partial\Omega}{\partial\Delta}$ andere Werthe erhält, als neben $\frac{\partial\Omega}{\partial a}$.

16.

Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung der Differentialquotienten der osculirenden Elemente, resp. der Werthe von $\delta a'\, \delta b'\, \delta c'\, \delta a_0'\, \delta b_0'\, \delta c_0'\, \delta \Delta'\, \delta i'\, \delta \vartheta'\, \delta e'\, \delta \varpi'$ und $\delta \tau'$, wozu noch $\delta \sigma'$ und $\delta \chi'$ sowie $\delta p'\, \delta a'\, \delta h'\, \delta n'$ treten, für die elliptische Bewegung[1]).

Zunächst folgen durch Differentiation die Gleichungen

$$\left(\frac{\delta a}{\delta t}\right) = \delta a' = \delta \Xi \quad \text{und} \quad \left(\frac{\delta a_0}{\delta t}\right) = \delta a_0' = -t\,\delta \Xi$$

nebst

$$\delta b' = \delta \mathsf{H}, \quad \delta b_0' = -t\,\delta \mathsf{H}, \quad \delta c' = \delta \mathsf{Z}, \quad \delta c_0' = -t\,\delta \mathsf{Z}.$$

Da die sechs eben abgeleiteten osculirenden Elemente von den drei Componenten $\delta \Xi$ $\delta \mathsf{H}$ $\delta \mathsf{Z}$ abhängen, so finden selbstverständlich die drei von diesen Componenten unabhängigen Gleichungen statt

$$t\,\delta a' + \delta a_0' = t\,\delta b' + \delta b_0' = t\,\delta c' + \delta c_0' = 0,$$

welche durch Elimination von t die Relation

$$\delta a' : \delta b' : \delta c' = \delta a_0' : \delta b_0' : \delta c_0'$$

liefern. Man kann ferner die Störungen der Schwerpunktscoordinaten — mit anderen Worten die Incremente ihrer Werthe im gestörten Problem im Vergleich zum ungestörten — in der Form ableiten

$$\delta \Xi = t\,\delta a + \delta a_0 = \int \delta a\, dt$$

$$\delta H = t\,\delta b + \delta b_0 = \int \delta b\, dt$$

$$\delta Z = t\,\delta c + \delta c_0 = \int \delta c\, dt.$$

Die Differentialgleichungen der osculirenden Elemente Δi und ϑ ergeben sich aus den Werthen

$$i_1' = y\,\delta \mathsf{Z} - z\,\delta \mathsf{Y}, \quad i_2' = z\,\delta \mathsf{X} - x\,\delta \mathsf{Z}, \quad i_3' = x\,\delta \mathsf{Y} - y\,\delta \mathsf{X},$$

---

1) Die Differentialformeln für die Variationen der elliptischen Elemente sind zuerst von Euler aufgestellt worden, in der Abhandlung *Methodus facilis motus corporum coelestium utcunque perturbatos ad rationem calculi astronomici revocandi*, Nov. Comment. Petropol. T. XII, 1768. Vergl. auch Möbius' Abhandlung in Crelle's Journal Bd. 32, 1844.

wofür man wegen der früher gefundenen Gleichungen

$$i_1 = \Delta \cos\alpha \quad \text{und} \quad y\delta Z - z\delta Y = r\{\cos\alpha\,\delta S - \cos\mathfrak{a}\,\delta U\}$$

auch schreiben kann:

$$\Delta' \cos\alpha - \Delta\alpha' \sin\alpha = r(\cos\alpha\,\delta S - \cos\mathfrak{a}\,\delta U)$$
$$\Delta' \cos\beta - \Delta\beta' \sin\beta = r(\cos\beta\,\delta S - \cos\mathfrak{b}\,\delta U)$$
$$\Delta' \cos\gamma - \Delta\gamma' \sin\gamma = r(\cos\gamma\,\delta S - \cos\mathfrak{c}\,\delta U).$$

Damit folgt

$$\delta\Delta' = r\,\delta S$$

nebst

$$\Delta\alpha' \sin\alpha = -\Delta(\vartheta' \cos\vartheta \sin i + i' \sin\vartheta \cos i) = r\cos\mathfrak{a}\,\delta U$$
$$\Delta\beta' \sin\beta = -\Delta(\vartheta' \sin\vartheta \cos i - i' \cos\vartheta \cos i) = r\cos\mathfrak{b}\,\delta U$$
$$\Delta\gamma' \sin\gamma = \Delta i' \sin i = r\cos\mathfrak{c}\,\delta U.$$

Hieraus gehen unter Berücksichtigung der Werthe von $\cos\mathfrak{a}$ $\cos\mathfrak{b}$ $\cos\mathfrak{c}$ die gesuchten Ausdrücke hervor:

$$\Delta\,\delta\vartheta' \sin i = r \sin u\,\delta U$$
$$\Delta\,\delta i' = r\cos u\,\delta U.$$

Uebrigens erhält man diese Werthe auch durch Differentiation der Gleichungen

$$rv' = \frac{\Delta}{r} = \sqrt{s'^2 - r'^2}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{i_1}{i_2} \quad \text{und} \quad \cos i = \frac{i_3}{\Delta}$$

wobei

$$i_1 i_2' - i_2 i_1' = \Delta z\,\delta U$$
$$i_3\Delta' - \Delta i_3' = \Delta r\cos\mathfrak{c}\,\delta U.$$

Hierzu treten vermöge der früher abgeleiteten Formeln

$$\frac{dp}{p} = 2\frac{d\Delta}{\Delta} \quad \text{und} \quad d\sigma = d\vartheta\cos i$$

die Ausdrücke

$$\delta p' = 2\frac{\Delta}{\mu} r\,\delta S \quad \text{und} \quad \delta\sigma' = \frac{r\sin u}{\Delta \operatorname{tg} i}\,\delta U$$

nebst

$$\delta\vartheta' - \delta\sigma' = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}i}{\Delta} r \sin u \, \delta U .$$

Uebereinstimmend ergibt sich durch directe Rechnung aus

$$\frac{z}{r} = \sin i \sin u \quad \text{und} \quad v = u + \sigma :$$

$$0 = \delta i' \cos i \sin u + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \sin i \cos u$$

$$\delta\sigma' = -\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} i} \delta i' = \frac{r \sin u}{\Delta \operatorname{tg} i} \delta U .$$

Wenn $\delta X : \delta Y : \delta Z = x : y : z$, so gilt der Flächensatz, und die Componenten δS und δU verschwinden. Die Winkel i und ϑ, welche die Lage der idealen Ebene bestimmen, bleiben in diesem Falle auch bei der gestörten Bewegung constant, ebenso wie der Parameter p. Die Störungen hängen dann nur ab von der Componente δR in der Richtung des Radiusvectors.

17.

Die Differentialquotienten der Elemente $\Delta i \vartheta$ und $e \varpi \tau$ hängen linear von den Componenten δX δY δZ ab, also müssen zwischen jenen drei unabhängige lineare Relationen statthaben, von denen zunächst aus dem Vorhergehenden die Gleichung

$$i' \operatorname{tg} u = \vartheta' \sin i = \sigma' \operatorname{tg} i$$

gefunden wird.

Um die beiden anderen Relationen zu entwickeln, gehen wir aus von den beiden Differentialformeln des Art. 7

$$dr = \frac{r}{p} \{ re \sin f \, df - r \cos f \, de + dp \}$$

und

$$dg = n(dt - d\tau) + g\frac{dn}{n} = \sqrt{1-e^2}\,\frac{r}{p}\left\{\frac{r}{a} df - \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin f \, de\right\} ,$$

welche in Verbindung mit $dv = df + d\chi$, bei der Differentiation nach den Elementen, wobei $dr = dv = 0$ zu setzen sind, ergeben:

$$p' = r\left\{e' \cos f - e \sin f \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\right\}$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) = -n\tau' + g\frac{n'}{n} = \sqrt{1-e^2}\,\frac{r}{p}\left\{\frac{r}{a}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \left(1+\frac{r}{p}\right)e' \sin f\right\}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = -\chi',$$

folglich

$$p' = r(e' \cos f + e\chi' \sin f) = \frac{2}{\mu}\Delta\Delta'$$

und

$$n\tau' = g\frac{n'}{n} + \sqrt{1-e^2}\,\frac{r}{p}\left\{\frac{r}{a}\chi' + \left(1+\frac{r}{p}\right)e' \sin f\right\}$$

oder

$$\tau' = (t-\tau)\frac{n'}{n} + \frac{r^2}{\Delta}\chi' + \frac{1}{n}\left(1+\frac{r}{p}\right)e' \sin \varepsilon.$$

Wir bemerken ferner die Gleichung

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right) = -\frac{r}{a\sqrt{1-e^2}}\chi' - \frac{e'}{1-e^2}\sin \varepsilon$$

sowie, dass die Differentialformel

$$dr' = \frac{\Delta}{2r}\left\{df - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}dg - \frac{e \sin f}{p}dr\right\}$$

jetzt übergeht in

$$\left(\frac{\partial r'}{\partial t}\right) = \frac{\Delta}{2r}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right\}$$

oder

$$\partial R = -\frac{\Delta}{2r}\left\{\chi' + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right\}.$$

Es hat nun keine Schwierigkeit, die Werthe von $e'\chi'$ oder ϖ' und τ' nebst $a'\,n'\,h'$, sowie von $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)$ und $\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)$ durch die störenden Kräfte auszudrücken. Die Art. 7 entwickelte Formel

$$dr' = \frac{\mu}{2\Delta}\left\{\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\, de + e(\cos f + \cos \varepsilon)\, df - e \sin f \frac{dr}{r}\right\},$$

wo

$$e(\cos f + \cos\varepsilon) = \frac{p}{r} - \frac{r}{a},$$

gibt sogleich

$$\left(\frac{\partial r'}{\partial t}\right) = \delta R = \frac{\mu}{2\Delta}\left\{\left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin f\,\delta e' - e(\cos f + \cos\varepsilon)\,\delta\chi'\right\}$$

und liefert in Verbindung mit

$$\frac{2\Delta\Delta'}{\mu r} = \frac{2\Delta}{\mu}\,\delta S = \cos f\,\delta e' + e\sin f\,\delta\chi'$$

durch eine leichte Rechnung die gesuchten Werthe:

$$\delta e' = \frac{\Delta}{\mu}\{\sin f\,\delta R + (\cos f + \cos\varepsilon)\,\delta S\}$$

und

$$\delta\chi' = -\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\Delta}{\mu e}\left\{-\cos f\,\delta R + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin f\,\delta S\right\}.$$

Man kann statt dessen auch die Gleichung benutzen

$$\left(\frac{\partial e\sin f}{\partial t}\right) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\Delta r'}{\partial t}\right)$$

oder

$$\sin f\,\delta e' - e\cos f\,\delta\chi' = \frac{\Delta}{\mu}\left(\delta R + \frac{r}{p}e\sin f\,\delta S\right).$$

Weitere Formen sind

$$\delta e' = \frac{\Delta}{\mu}\{\delta Q + \cos\varepsilon\,\delta S\}$$

$$= \frac{1}{s'}\left\{2(\cos f + e)\,\delta T + \frac{r}{a}\sin f\,\delta N\right\}$$

$$e\delta\chi' = \frac{\Delta}{\mu}\left\{-\delta P + \frac{\sin\varepsilon}{\sqrt{1-e^2}}\,\delta S\right\}$$

$$= \frac{1}{s'}\left\{2\sin f\,\delta T - \left(\frac{r}{a}\cos f + 2e\right)\delta N\right\}.$$

Für $\varpi' = \chi' - \sigma'$ aber erhält man

$$\delta\varpi' = \delta\chi' - \delta\sigma' = \frac{\Delta}{\mu e}\left\{-\cos f\,\delta R + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin f\,\delta S - \frac{r e\sin u}{p\,\mathrm{tg}\,i}\,\delta U\right\}.$$

Durch Benutzung der oben entwickelten Relationen für $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)$ und $\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)$ ergeben sich ferner die Ausdrücke

$$e\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right) = \sqrt{\frac{a}{\mu}}\left\{(\cos f - e)\,\delta R - \left(1 + \frac{r}{a}\right)\sin f\,\delta S\right\}$$

$$= \frac{1}{s'}\left\{-\frac{2\sin f}{\sqrt{1-e^2}}\,\delta T + \sqrt{1-e^2}\cos\varepsilon\,\delta N\right\}$$

$$e\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) = (1-e^2)\sqrt{\frac{a}{\mu}}\left\{\left(\cos f - \frac{2re}{p}\right)\delta R - \left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin f\,\delta S\right\}$$

$$= \frac{1}{s'}\sqrt{1-e^2}\left\{-2\sin f\left(1 + \frac{re^2}{p}\right)\delta T + \frac{r}{a}\cos f\,\delta N\right\}.$$

Zufolge des Art. 7 hat man

$$s'\left(\frac{\partial s'}{\partial t}\right) = \frac{\mu}{2a^2}\,\delta a' = -\frac{\mu}{3a}\frac{\delta n'}{n} = \delta h'$$

$$= s'\delta T = r'\delta R + \frac{\Delta}{r}\delta S,$$

mithin wird

$$\frac{\delta a'}{a} = \frac{2a}{\Delta}\left\{e\sin f\,\delta R + \frac{p}{r}\,\delta S\right\}$$

$$= \frac{2}{nr}\{e\sin\varepsilon\,\delta R + \sqrt{1-e^2}\,\delta S\}$$

$$= \frac{2a}{\Delta}\{e\,\delta Q + \delta S\} = \frac{2a}{\mu}s'\delta T = -\frac{s'}{h}\delta T$$

$$\frac{\delta n'}{n} = -\frac{3a}{\mu}s'\delta T = \frac{3}{2}\frac{s'}{h}\delta T.$$

Für das Element τ endlich folgt aus

$$g = n(t-\tau), \qquad n\,\delta\tau' = g\frac{\delta n'}{n} - \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right):$$

$$\delta\tau' = \frac{a}{\mu}\left\{\left(2r - \frac{p}{e}\cos f\right)\delta R + \frac{p+r}{e}\sin f\,\delta S - 3(t-\tau)s'\delta T\right\}$$

$$= \frac{a}{\mu}\left\{-3(t-\tau)s'\delta T + \frac{2\Delta}{s'e}\left(1 + \frac{re^2}{p}\right)\sin f\,\delta T - \frac{\Delta}{s'e}\frac{r}{a}\cos f\,\delta N\right\}.$$

18.

In der Regel ist es bequemer, sich statt $\delta\tau'$ des Ausdruckes für $\delta g'$ zu bedienen, weil τ nur in der Verbindung $g = n(t-\tau)$ vorkommt. Hier bedeutet das *stellvertretende Element* δg den Unterschied zwischen den Werthen von g in der gestörten und der ungestörten Bewegung. Da

$$g' = \frac{\partial g}{\partial t} + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) = n + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)$$

und $\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)$ im ungestörten Problem verschwindet, so folgt daraus

$$\delta g' = \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) + \delta n = \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) + \int \delta n' dt$$

neben

$$\delta g = (t-\tau_0)\int \delta n' dt - n_0 \int \delta\tau' dt - \int \delta n' dt \cdot \int \delta\tau' dt,$$

wo $\tau_0 = \tau - \delta\tau$ die Perihelzeit der ungestörten Bewegung bezeichnet.

Durch Integration der Gleichung für $\delta g'$ folgt ferner

$$\delta g = \int \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) dt + \iint \delta n' dt,$$

wofür man auch schreiben kann

$$\delta g = \int \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) dt + (t-\tau^0)\int \delta n' dt - \int (t-\tau^0)\,\delta n'\, dt.$$

Von der Uebereinstimmung der beiden für δg gegebenen Werthformen überzeugt man sich ohne Schwierigkeit.

Es ist nun leicht, das Stattfinden der Gleichung

$$\frac{\partial \Omega}{\partial i}\delta i' + \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta}\delta\vartheta' + \frac{\partial \Omega}{\partial \varpi}\delta\varpi' + \frac{\partial \Omega}{\partial a}\delta a' + \frac{\partial \Omega}{\partial e}\delta e' + \frac{\partial \Omega}{\partial g}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) = 0$$

des Art. 15 durch directe Substitution der gefundenen Werthe zu verificiren. Wir wollen aber nach dem Vorgange von Hamilton in seiner berühmten Abhandlung[1]) *On a general Method in Dy-*

---

1) Philos. Transactions 1834 II (*Second Essay* 1835). Man vergl. auch Jacobi's Werke Bd. 5, S. 163, 353 u. 382 flg., sowie Poisson, *Mémoire sur la variation des constantes arbitraires*, Mém. de l'Acad. T. I, S. 44 (1816).

namics noch das Elementensystem $i_3 = \Delta \cos i$, ϑ, Δ, ϖ, h und τ untersuchen. Dann erhält man die durch ihre Einfachheit ausgezeichneten Formeln

$$\delta\Delta' = \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial \varpi} = r\,\delta \mathbf{S}$$

$$\delta\varpi' = -\lambda \frac{\partial \Omega}{\partial \Delta} = \frac{1}{\Delta}\left\{-\frac{p}{e}\cos f\,\delta \mathbf{R} + \frac{p+r}{e}\sin f\,\delta \mathbf{S} - \frac{r\sin u}{\operatorname{tg} i}\,\delta \mathbf{U}\right\}$$

$$\delta i_3' = \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} = r\{\cos i\,\delta \mathbf{S} - \sin i \cos u\,\delta \mathbf{U}\}$$

$$\delta\vartheta' = -\lambda \frac{\partial \Omega}{\partial i_3} = \frac{r \sin u}{\Delta \sin i}\,\delta \mathbf{U}$$

$$\delta\tau' = \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial h} = -\frac{1}{2h}\left\{\left(2r - \frac{p}{e}\cos f\right)\delta \mathbf{R} + \frac{p+r}{e}\sin f\,\delta \mathbf{S} - 3(t-\tau)s'\delta \mathbf{T}\right\}$$

$$\delta h' = -\lambda \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} = s'\delta \mathbf{T} = \frac{\mu}{\Delta}\left\{e \sin f\,\delta \mathbf{R} + \frac{p}{r}\,\delta \mathbf{S}\right\},$$

aus denen hervorgeht, dass jetzt die Gleichung $\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right) = 0$ in die drei zerfällt:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \Delta}\,\delta\Delta' + \frac{\partial \Omega}{\partial \varpi}\,\delta\varpi' = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial i_3}\,\delta i_3' + \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta}\,\delta\vartheta' = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau}\,\delta\tau' + \frac{\partial \Omega}{\partial h}\,\delta h' = 0.$$

19.

Wir schalten hier noch eine kurze Betrachtung über ideale Coordinaten ein. So wie sich die ideale Coordinate $v = \int \frac{\Delta}{r^2}\,dt$ von der wahren Anomalie f nur durch das neue Element χ unterscheidet, könnte man eine ideale Coordinate $\eta = \int \frac{an}{r}\,dt$ aufstellen, welche von der excentrischen Anomalie ε bei der ungestörten Bewegung um ein constantes, bei der gestörten um

ein osculirendes Element ζ unterschieden ist. Differentiirt man die Gleichung

$$\eta' = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2\mu}{r} - s's'} \quad \text{oder} \quad \eta = \int \frac{an}{r}\,dt = \varepsilon + \zeta$$

nach den Elementen, so wird $\delta\zeta' = -\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right)$ und ζ stellt den Werth von η im Perihel dar, wie χ den gleichzeitigen Werth von v. Man darf daraus jedoch nicht auf die Gleichheit dieser beiden Elemente schliessen, weil die excentrische Anomalie geometrisch nicht durch Radiivectoren aus dem Brennpunkte, sondern aus dem Centrum der Ellipse begrenzt wird, so dass die feste X-Axe für die ideale Coordinate η keine Bedeutung hat.

Als weiteres Beispiel einer idealen Coordinate betrachten wir das Hamilton-Jacobi'sche Integral

$$w = \int (T + U)\,dt$$

mit der Kräftefunction U und setzen

$$w' = \tfrac{1}{2}s's' + \frac{\mu}{r}.$$

Da nach dem Satze von der lebendigen Kraft

$$s's' = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

so wird

$$w' - \frac{3\mu}{2a} = 2\left(s's' - \frac{\mu}{r}\right) = 2(rr'' + r'r'),$$

weil

$$xx'' + yy'' + zz'' + \frac{\mu}{r} = rr'' + r'r' - s's' + \frac{\mu}{r} = 0.$$

Folglich ist im ungestörten Problem

$$w - \frac{3\mu}{2an}g = 2rr' + \psi$$

oder

$$w = \tfrac{3}{2}\sqrt{\mu a}\cdot g + 2rr' + \psi$$

und nach Elimination von r'

$$w = \tfrac{3}{2}\sqrt{\mu a}\cdot g + 2\frac{\mu}{\Delta} r e \sin f + \psi$$

$$= \tfrac{3}{2}\sqrt{\mu a}\,(\varepsilon + \tfrac{1}{3} e \sin\varepsilon) + \psi \quad ^{1})$$

mit der Integrationsconstante ψ.

Zur Bestimmung des osculirenden Elements ψ erhält man im gestörten Problem

$$0 = \tfrac{3}{4}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\, g\,\delta a' + \tfrac{3}{2}\sqrt{\mu a}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) + 2r\left(\frac{\partial r'}{\partial t}\right) + \delta\psi'.$$

Nun ist aber nach Art. 16

$$2r\left(\frac{\partial r'}{\partial t}\right) = \Delta\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right\},$$

also

$$\delta\psi' = -\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \tfrac{1}{2}\sqrt{\mu a}\left\{\tfrac{3}{2}\frac{\delta a'}{a} + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right\}$$

$$= \Delta\delta\chi' + \frac{\mu}{2a}\delta\tau' = \Delta\delta\chi' - h\delta\tau'.$$

Jacobi ist geneigt, besonderes Gewicht darauf zu legen, dass in den Gleichungen

$$\chi' = \varpi' + \vartheta'\cos i \quad \text{und} \quad \psi' = \Delta\chi' - h\tau'$$

die Zeit nicht explicite (d. h. ausser den Elementen) vorkommt und schlägt vor, die Benennungen *Element* und *ideale Coordinate* auf solche Fälle zu beschränken.

20.

Die gefundenen zwölf simultanen Differentialgleichungen haben die Form $\frac{dE_n}{dt} = \varphi_n(t\,E_1\,E_2\cdots E_{12})$. Wenn die Störungscomponenten δX δY δZ von den Elementen der Schwerpunktsbewegung unabhängig sind, so hat man für die Störungen der elliptischen Bewegung sechs simultane Gleichungen

$$\delta e' = \varphi(t\,E_1\,E_2\cdots E_6),$$

1) Vergl. Jacobi in Crelle's Journal, Bd. 42, S. 81.

deren Integration durch successive Approximation erfolgt. Denn da das osculirende Element $E = e + \delta e$ sich nur um δe von der Integrationsconstante e unterscheidet, so wird man in erster Approximation

$$\delta_1 e = \int \varphi(t\, e_1\, e_2 \cdots e_6)\, dt$$

setzen, in zweiter Approximation $e + \delta_1 e$ für E schreiben und so fort.

Wir wollen fortan die Coordinaten und Elemente des ungestörten Problems durch den Index 0 von denen des gestörten unterscheiden. Alsdann gelten im letzteren Falle die Gleichungen

$$g = n(t - \tau) = \varepsilon - e \sin \varepsilon$$

$$r = a(1 - e \cos \varepsilon) = \frac{p}{1 + e \cos f}$$

I. $$v = f + \chi, \quad u = v - \sigma$$

$$\cos b \cos(l - \vartheta) = \cos u$$

$$\cos b \sin(l - \vartheta) = \cos i \sin u$$

$$\sin b = \sin i \sin u,$$

während bei der ungestörten Bewegung

$$g_0 = n_0(t - \tau_0) = \varepsilon_0 - e_0 \sin \varepsilon_0$$

$$r_0 = a_0(1 - e_0 \cos \varepsilon_0) = \frac{p_0}{1 + e_0 \cos f_0}$$

II. $$v_0 = f_0 + \chi_0, \quad u_0 = v_0 - \sigma_0$$

$$\cos b_0 \cos(l_0 - \vartheta_0) = \cos u_0$$

$$\cos b_0 \sin(l_0 - \vartheta_0) = \cos i_0 \sin u_0$$

$$\sin b_0 = \sin i_0 \sin u_0.$$

Die ursprüngliche Gleichung

$$u = f + \varpi = f + \chi - \sigma$$

ist durch Einführung der idealen Anomalie v in zwei aufgelöst worden, um dadurch eine Trennung der von der Componente δU abhängigen Grössen, welche die sogenannten Breitenstörungen liefern, zu erreichen.

Da wir die Differenzen der osculirenden und der constanten Elemente durch δ bezeichnet haben, so wird

$$p = p_0 + \delta p, \quad \Delta = \Delta_0 + \delta\Delta, \quad e = e_0 + \delta e, \quad \text{u. s. w.}$$

Schreibt man analog

$$g = g_0 + \delta g, \quad r = r_0 + \delta r, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon, \quad f = f_0 + \delta f$$
$$v = v_0 + \delta v, \quad u = u_0 + \delta u, \quad l = l_0 + \delta l, \quad b = b_0 + \delta b$$

so werden $\delta g\ \delta r\ \delta\varepsilon \cdots$ als Störungen der Coordinaten und Anomalieen zu bezeichnen sein. Dieselben lassen sich leicht durch die Störungen der Elemente ausdrücken.

Vermöge des Taylor'schen Satzes hat man bekanntlich für eine Function $f(xy\cdots)$, wenn $x = x_0 + \delta x$, $y = y_0 + \delta y, \cdots$

$$\begin{aligned}\delta f = f - f_0 &= \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\delta x + \frac{\partial f_0}{\partial y_0}\delta y \cdots \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0^2}\delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0\,\partial y_0}\delta x\delta y + \frac{\partial^2 f_0}{\partial y_0^2}\delta y^2 \cdots\Big) + \text{etc.} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y \cdots \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\delta x\delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\delta y^2 \cdots\Big) \pm \text{etc.}\end{aligned}$$

Damit wird zunächst

$$\delta g = n(t-\tau) - n_0(t-\tau_0) = \frac{g_0}{n_0}\delta n - n\delta\tau$$
$$= \frac{g_0}{n_0}\delta n - n_0\delta\tau - \delta n\delta\tau = \frac{g}{n}\delta n - n\delta\tau + \delta n\delta\tau$$

und weiter bis auf Glieder zweiter Ordnung *inclusive*:

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon &= \frac{a}{r}\delta g + \frac{\sin f}{\sqrt{1-e^2}}\delta e \\ &\quad \pm \Big\{\frac{a^2}{r^2}\cos f\,\delta g\,\delta e - \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}\frac{e\sin f}{\sqrt{1-e^2}}\delta g^2 + \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}\frac{\sin f}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\Big(\Big(\frac{p}{r}+1\Big)\cos f + e\Big)\delta e^2\Big\}\cdots\end{aligned}$$

$$\delta f = \sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \delta g + \left(\frac{p}{r}+1\right)\frac{\sin f}{1-e^2}\delta e$$

$$\pm\left\{\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(2\frac{p}{r}\cos f - e\right)\delta g\,\delta e - \left(\frac{a}{r}\right)^3 e\sin f\,\delta g^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin f}{(1-e^2)^2}\left(\frac{p}{r}\left(1+\frac{p}{r}\right)\cos f + \tfrac{1}{2}\cos f + e\right)\delta e^2\right\}\cdots$$

$$\delta\frac{r}{a} = \frac{e\sin f}{\sqrt{1-e^2}}\delta g - \cos f\,\delta e$$

$$\pm\left\{\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\sin f\,\delta g\,\delta e + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 e\cos f\,\delta g^2 + \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{2}\left(1+\frac{p}{r}\right)\frac{\sin^2 f}{1-e^2}\delta e^2\right\}\cdots$$

und wegen

$$\delta\frac{r}{a} = \frac{r_0+\delta r}{a_0+\delta a} - \frac{r_0}{a_0} = \frac{r}{a} - \frac{r-\delta r}{a-\delta a}$$

$$\delta r = (a \pm \delta a)\,\delta\frac{r}{a} + \frac{r}{a}\delta a$$

$$\delta v = \delta f + \delta\chi, \quad \delta u = \delta v - \delta\sigma$$

$$\delta\sin b = \sin b - \sin b_0 = \sin i\cos u\,\delta u + \cos i\sin u\,\delta i$$

$$\pm\{\cos i\cos u\,\delta u\,\delta i - \tfrac{1}{2}\sin i\sin u\,(\delta u^2 + \delta i^2)\}\cdots$$

$$\delta l = \delta\vartheta + \frac{\cos i}{\cos^2 b}\delta u - \frac{\sin i\sin u\cos u}{\cos^2 b}\delta i$$

$$\pm\frac{1}{\cos^4 b}\{\sin i\,(\cos^2 i\sin^2 u - \cos^2 u)\,\delta u\,\delta i + $$

$$+ \sin^2 i\cos i\sin u\cos u\,\delta u^2 - $$

$$- \tfrac{1}{2}\cos i\sin u\cos u\,(1+\sin^2 i\sin^2 u)\,\delta i^2\}\cdots$$

Von den doppelten Vorzeichen der Glieder zweiter Ordnung gilt das + Zeichen, wenn in den Coefficienten die Werthe der ungestörten Elemente bez. Coordinaten (welche eigentlich mit dem Index 0 zu bezeichnen wären) substituirt werden, dagegen das — Zeichen, wenn die gestörten Grössen dafür

enthalten sind. Unter Umständen können die doppelten Formeln dazu dienen, eine Schätzung über den Betrag der Störungen zweiter Ordnung zu gewinnen. Denn die Gleichung

$$\delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \delta y \cdots$$

ist bis auf Glieder der zweiten Ordnung *inclusive* genau, wenn unter den eingeklammerten Differentialquotienten die arithmetischen Mittel

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\right), \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f_0}{\partial y_0}\right)$$

verstanden werden. Bekanntlich gilt auch die allgemeinere Formel (mit leichter Ausdehnung auf mehrere unabhängige Variable)

$$\delta f = \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\delta x + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0^2}\delta x^2 \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1} f_0}{\partial x_0^{n-1}}\delta x^{n-1} +$$
$$+ \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{\delta x^n}{n!} - \frac{n}{1}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}\frac{\delta x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{n \cdot n+1}{1 \cdot 2}\frac{\partial^{n+2} f}{\partial x^{n+2}}\frac{\delta x^{n+2}}{(n+2)!} \mp \text{etc.}$$

also bis auf Grössen der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung *inclusive* genau:

$$\delta f = \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\delta x + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_0^2}\delta x^2 \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1} f_0}{\partial x_0^{n-1}}\delta x^{n-1} +$$
$$+ \left(\frac{n}{n+1}\frac{\partial^n f_0}{\partial x_0^n} + \frac{1}{n+1}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)\frac{\delta x^n}{n!} \cdots$$

21.

Eine Haupteigenthümlichkeit der Hansen'schen Störungstheorie besteht nun darin, dass weder die Störungen der Elemente, noch die Störungen der bisher betrachteten Coordinaten direct berechnet werden, sondern die Störungen gewisser neuer Coordinaten, die wir als die Coordinaten der idealen Zeit oder des idealen Systems bezeichnen wollen.

Um die Berechnung des gestörten Ortes zu erleichtern, stellt nämlich Hansen den beiden bisher betrachteten Gleichungensystemen (des Art. 20), dem System I der wahren, gestörten elliptischen Werthe mit den osculirenden Elementen einer-

seits, und dem Systeme II der ungestörten elliptischen Werthe mit constanten Elementen andererseits, ein System III der idealen elliptischen Werthe an die Seite, welches mit dem System II die constanten Elemente gemein hat, aber auf eine ideale Zeit ζ sich bezieht, die so gewählt werden soll, dass die ideale Anomalie v des Systems I hervorgeht. Es hat also I mit II die Variable t, I mit III die Variable v gemeinschaftlich, während in II und III die nämlichen constanten Elemente enthalten sind. Wir schreiben demgemäss

$$\gamma = n_0(\zeta - \tau_0) = \eta - e_0 \sin\eta$$

$$\varrho = a_0(1 - e_0\cos\eta) = \frac{p_0}{1 + e_0\cos\psi}$$

III. $$v = \psi + \chi_0\,, \quad \varepsilon = v - \sigma_0$$

$$\cos\beta\cos(\lambda - \vartheta_0) = \cos\varepsilon$$

$$\cos\beta\sin(\lambda - \vartheta_0) = \cos i_0 \sin\varepsilon$$

$$\sin\beta = \sin i_0 \sin\varepsilon\,,$$

wo sämmtliche Variable ideale Coordinaten bedeuten. Die Grössen $\zeta\ \gamma\ \eta\ \psi\ \varrho\ \varepsilon\ \lambda$ und β mögen als die idealen Werthe der Zeit, der mittleren, excentrischen und wahren Anomalie des Radiusvectors und des Breitenarguments, endlich der Länge und Breite bezeichnet werden.

Da sich die idealen Werthe ζ und ϱ von den wahren Werthen t und r nur durch Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte unterscheiden, so wollen wir

$$\zeta = t + \delta\zeta\,, \quad \text{folglich} \quad \gamma = g_0 + \delta\gamma\,, \quad \delta\gamma = n_0\delta\zeta\,,$$

ferner

$$\frac{r}{\varrho} = \alpha = 1 + \delta\alpha \quad \text{oder} \quad r = \varrho(1 + \delta\alpha)$$

setzen und die Störungen $\delta\alpha$ und $\delta\gamma$, welche Hansen mit den Buchstaben ν und $n_0\delta z$[1]) bezeichnet, aufsuchen.

---

1) Hansen in seiner ersten Abhandlung *über die absoluten Störungen der kleinen Planeten*, der K. S. Ges. d. Wiss. übergeben am 20. Oct. 185 siehe z. B. S. 87 (während S. 98 $n\delta z$ geschrieben ist), auch *Theorie der Störungen*, erste Abhandlung S. 107 (1862). An anderen Orten schreibt Hansen w für $\lg\alpha$, denn in der That bezeichnet genau genommen $\lg\alpha = \lg r - \lg\varrho$ die Störungen des Logarithmus des Radiusvectors.

Da α als Function von $g\ a\ e$ und χ, dagegen γ als Function von $g\ e$ und χ ausgedrückt werden kann, so erhält man leicht die Differentialformeln

$$da = a^2\sqrt{1-e^2}\left(\frac{e\sin f}{p\varrho} - \frac{e_0\sin\psi}{p_0 r}\right)dg + \frac{r}{a\varrho}da - \frac{re_0\sin\psi}{p_0}d\chi -$$

$$-\frac{a}{p_0}\left\{\frac{r}{a}\cos f + \frac{r}{p}\sin f(e_0\sin\psi - e\sin f) + e + e_0\cos\delta\chi\right\}de$$

$$d\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-e_0^2}}\left(\frac{\varrho}{a_0}\right)^2\left\{\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 dg + \left(1+\frac{p}{r}\right)\frac{\sin f}{1-e^2}de + d\chi\right\}.$$

22.

Nach dem System II kann man sich t als Function von v_0 und den constanten Elementen, nach dem System III ζ als die nämliche Function von v und denselben Elementen bestimmt denken. Mithin gibt das Taylor'sche Theorem

$$\zeta = t + \frac{dt}{dv_0}(v - v_0) + \tfrac{1}{2}\frac{d^2t}{dv_0^2}(v - v_0)^2 \cdots$$

oder

$$\delta\zeta = \frac{\delta t}{\delta v_0}\delta v + \tfrac{1}{2}\frac{\delta t^2}{\delta v_0^2}\delta v^2 \cdots$$

und wegen

$$\frac{\delta t}{\delta v_0} = \frac{r_0^2}{\Delta_0}, \quad \frac{\delta^2 t}{\delta v_0^2} = \frac{r_0^2}{\Delta_0}\frac{d}{dt}\frac{r_0^2}{\Delta_0} = \frac{2r_0^3 r_0'}{\Delta_0^3} = \frac{2\mu}{\Delta_0^3}r_0^3 e_0\sin f_0$$

$$\delta\zeta = \frac{r_0^2}{\Delta_0}\delta v + \frac{\mu r_0^3}{\Delta_0^3}e_0\sin f_0\,\delta v^2 + \cdots$$

$$\delta\gamma = \frac{r_0^2}{a_0^2\sqrt{1-e_0^2}}(\delta f + \delta\chi) + \frac{r_0^3 e_0\sin f_0}{a_0^3(1-e_0^2)^{\frac{3}{2}}}(\delta f + \delta\chi)^2 \cdots$$

Substituirt man hier den Werth von δf aus Art. 20 und lässt der Kürze halber den Index 0 fort, so folgt

$$\delta\gamma = \delta g + \frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\delta\chi + \frac{r(p+r)\sin f}{a^2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\delta e +$$
$$+ 2\frac{r}{p}e\sin f\,\delta g\,\delta\chi + \left(2\frac{r}{p}\cos f + \frac{3e}{1-e^2}\right)\delta g\,\delta e +$$
$$+ 2\frac{r^2}{p^2}\left(\frac{r}{p}+1\right)\sqrt{1-e^2}\cdot e\sin^2 f\,\delta\chi\,\delta e +$$
$$+ \frac{r^3}{a^3}\frac{e\sin f}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\delta\chi^2 + \frac{r^2}{p^2}\frac{\sin f}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\left(\frac{r}{a}+\frac{3}{2}\right)\cos f + \left(\frac{p}{r}+1\right)e\right\}\delta e^2 \cdots$$

Eben so leicht ergeben sich die Störungen des Radiusvectors. Denn da

$$\alpha = \frac{r}{\varrho} = \frac{r}{p_0}(1 + e_0\cos\psi) = \frac{r_0+\delta r}{p_0}(1 + e_0\cos(f_0+\delta v))$$

so wird

$$\alpha = (r_0+\delta r)\left\{\frac{1}{r_0} - \frac{e_0\sin f_0}{p_0}\delta v - \frac{e_0\cos f_0}{2p_0}\delta v^2 \cdots\right\}$$

oder nach Weglassung des Index 0

$$\delta\alpha = \frac{1}{r}\delta r - \frac{re\sin f}{p}\delta v - \frac{e\sin f}{p}\delta r\,\delta v - \frac{re\cos f}{2p}\delta v^2 \cdots$$

Nach Substitution der Werthe von δr und δv aus Art. 20 erhält man

$$\delta\alpha = \frac{\delta a}{a} - \frac{re\sin f}{p}\delta\chi - \left(\frac{r}{p}\cos f + \frac{2e}{1-e^2}\right)\delta e -$$
$$- \frac{re\sin f}{p}\frac{\delta a}{a}\delta\chi - \left(\frac{r}{p}\cos f + \frac{2e}{1-e^2}\right)\frac{\delta a}{a}\delta e -$$
$$- \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{a}{r}-1\right)\delta g\,\delta\chi - \frac{re\sin f\cos f}{p(1-e^2)}\delta\chi\,\delta e +$$
$$+ \frac{\sin f}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\delta g\,\delta e - \frac{re\cos f}{2p}\delta\chi^2 + \frac{r\sin^2 f}{p(1-e^2)}\delta e^2 \cdots$$

Man sieht, dass in $\delta\alpha$ kein in δg multiplicirtes Glied erster Ordnung vorkommt und dass die Glieder zweiter Ordnung in $\delta\alpha$ und $\delta\gamma$ keine von δg^2, $\delta a\,\delta g$ und δa^2 abhängigen Terme enthalten. Es ist diese Bemerkung aus dem Grunde nicht un-

wesentlich, weil, wie wir gesehen haben, die Berechnung des stellvertretenden Elements δg mehrfache Integrationen erfordert, welche unter Umständen beim Auftreten kleiner Divisoren Schwierigkeiten bereiten können. Es ist wünschenswerth, wenn diese auf das kleinstmögliche Maass zurückgeführt werden und es muss desshalb als vortheilhaft bezeichnet werden, dass die Störungen der Hansen'schen Coordinate $\delta\alpha$ im Gegensatze zu δr unter den Gliedern erster Ordnung keinen von δg abhängigen Term enthalten, was natürlich bei $\delta\gamma$ nicht erreichbar ist.

Um von den für die ideale Länge und Breite λ und β aufgestellten Gleichungen zu den Werthen von l und b überzugehen, führen wir die ideale Coordinate [1])

$$\delta\omega = \sin b - \sin\beta$$

ein und erhalten sogleich wegen $u = s - \delta\sigma$

$$\begin{aligned}\delta\omega &= \sin i \sin u - \sin i_0 \sin s \\ &= (\sin i \cos\delta\sigma - \sin i_0) \sin s - \sin i \sin\delta\sigma \cos s .\end{aligned}$$

Schreibt man ferner [1])

$$q = \sin i \cos\delta\sigma , \quad \delta q = \sin i \cos\delta\sigma - \sin i_0$$

$$q_1 = \delta q_1 = \sin i \sin\delta\sigma , \quad \operatorname{tg}\delta\sigma = \frac{q_1}{q} ,$$

so wird nicht allein

$$\sin b = q \sin s - q_1 \cos s ,$$

sondern auch

$$\delta\omega = \delta q \sin s - \delta q_1 \cos s .$$

Die Zurückführung der neuen Elemente δq und δq_1 auf die störenden Kräfte aber liefert

$$\delta q' = i' \cos i \cos\delta\sigma - \sigma' \sin i \sin\delta\sigma = \frac{r\cos i}{\Delta} \cos s \, \delta U$$

$$\delta q_1' = i' \cos i \sin\delta\sigma + \sigma' \sin i \cos\delta\sigma = \frac{r\cos i}{\Delta} \sin s \, \delta U$$

---

1) Hansen schreibt δs und δp statt $\delta\omega$ und δq_1, die Buchstaben s und p sind jedoch für den Bogen und den Parameter bereits in Anspruch genommen.

und damit

$$\delta\omega = \sin\varepsilon \int \frac{r\cos i}{\Delta} \cos\varepsilon\, \delta U\, dt - \cos\varepsilon \int \frac{r\cos i}{\Delta} \sin\varepsilon\, \delta U\, dt .$$

Man kann dafür kürzer schreiben

$$\delta\omega = \int \frac{r\cos i}{\Delta} \sin(\bar{\varepsilon} - \varepsilon)\, dU\, \overline{dt} = \int \frac{r\cos i}{\Delta} \sin(\bar{\psi} - \psi)\, \delta U\, \overline{dt} ,$$

wenn der Strich anzeigt, dass die Zeit in $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\psi}$ bei der Integration als constant betrachtet werden soll.

Die Einführung von δq und δq_1 an Stelle von δi und $\delta\sigma$ gewährt den Vortheil, dass die Differentialquotienten der neuen Elemente nicht wie $\delta\sigma'$ und $\delta\mathfrak{H}'$ den Nenner $\sin i$ haben, welcher für kleine Werthe von i auf unbequeme Rechnung führt. Bei der Reihenentwickelung wird

$$\delta q = \cos i_0\, \delta i - \tfrac{1}{2} \sin i_0 (\delta i^2 + \delta\sigma^2) \ldots$$

$$\delta q_1 = \sin i_0\, \delta\sigma + \cos i_0\, \delta i\, \delta\sigma \ldots$$

$$\delta\omega = \cos i_0 \sin u_0\, \delta i - \sin i_0 \cos u_0\, \delta\sigma - \tfrac{1}{2} \sin i_0 \sin u_0 (\delta i^2 + \delta\sigma^2) -$$
$$- \cos i_0 \cos u_0\, \delta i\, \delta\sigma + \cos i_0 \cos u_0\, \delta i\, \delta v + \sin i_0 \sin u_0\, \delta\sigma\, \delta v \ldots$$

nebst den Producten

$$r\,\delta\omega = r_0 \delta\omega \left(1 + \frac{\delta r}{r_0}\right)$$

und

$$\varrho\,\delta\omega = r_0 \delta\omega \left(1 + \frac{r_0}{p_0} e_0 \sin f_0\, \delta v \ldots\right),$$

wo die früher gefundenen Werthe von δr und δv substituirt werden können.

Bei Beschränkung auf die Glieder erster Ordnung kann man mithin schreiben:

$$\delta a = \frac{1}{a} \delta a - \frac{e \sin\varepsilon}{\sqrt{1 - e^2}} \delta\chi - \frac{\cos\varepsilon + e}{1 - e^2} \delta e$$

$$\delta\gamma = \delta g + \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \delta\chi + \left(\frac{r}{p} + 1\right) \sin\varepsilon\, \delta e$$

$$\delta\omega = \cos i \sin u\, \delta i - \sin i \cos u\, \delta\sigma .$$

23.

Die beiden restirenden Gleichungen

$$\cos b \cos(l - \vartheta) = \cos u$$
$$\cos b \sin(l - \vartheta) = \cos i \sin u$$

ergeben

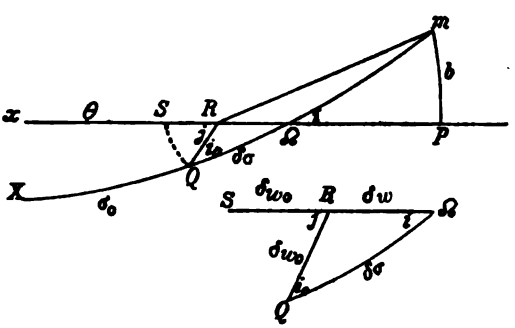
$$\operatorname{tg}(l - \vartheta) = \cos i \operatorname{tg} u \quad \text{neben} \quad \operatorname{tg}(\lambda - \vartheta_0) = \cos i_0 \operatorname{tg} \varepsilon,$$

woraus l durch λ oder ε gefunden werden soll. Hansen hat diese Gleichungen einer merkwürdigen Transformation unterworfen, um die die Lage der Bahn bestimmenden, von den störenden Kräften abhängigen Glieder von den von diesen Kräften unabhängigen Grössen zu trennen[1]).

Diese Transformation geht aus von der Einführung der neuen Elemente δw und δw_0 mittelst der Gleichung

$$\cos b \cos(l - \vartheta + \delta w) = \cos\beta \cos(\lambda - \vartheta_0 - \delta w_0),$$

welche sich leicht construiren lässt, wie schon Jacobi bemerkt hat.



In beistehender Figur ist $\sigma = X\Omega$ im Punkte Q in $XQ = \sigma_0$ und $Q\Omega = \delta\sigma$ getheilt und der Winkel $\Omega QR = i_0$ gemacht. Dann stehen in dem Dreieck $QR\Omega$ den Winkeln i und i_0 die Seiten δw_0 und δw gegenüber. In der That ist im Dreieck mPR

$$\cos mR = \cos b \cos(l - \vartheta + \delta w),$$

---

1) Hansen, *über ein neues Coordinatensystem* (Berichte d. K. S. Ges. d. Wiss. vom 14. Juni 1851) und *Berechnung der absoluten Planetenstörungen*, erste Abhandlung (übergeben 20. Oct. 1855) Art. 8—10.

während das Dreieck mQR ergibt

$$\begin{aligned}\cos mR &= \cos\varepsilon\cos\delta w_0 + \cos i_0 \sin\varepsilon \sin\delta w_0\\ &= \cos\beta\cos(\lambda - \vartheta_0 - \delta w_0)\,.\end{aligned}$$

Dieselben Dreiecke liefern die weiteren Gleichungen

$$\begin{aligned}\sin mR\cos mR\,\Omega &= \cos u \sin\delta w + \cos i \sin u \cos\delta w\\ &= \cos b \sin(l - \vartheta + \delta w)\\ \sin mR\cos mRQ &= \cos\varepsilon\sin\delta w_0 - \cos i_0 \sin\varepsilon\cos\delta w_0\\ &= -\cos\beta\sin(\lambda - \vartheta_0 - \delta w_0)\\ \sin mR\sin mR\,\Omega &= \sin i \sin u \;= \sin b\\ \sin mR\sin mRQ &= \sin i_0 \sin\varepsilon = \sin\beta\,.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\delta w = \sin mR(\sin mR\,\Omega - \sin mRQ)$$

neben

$$\sin mR(\cos mR\,\Omega + \cos mRQ) = \frac{\cos mR\,\Omega + \cos mRQ}{\sin mR\,\Omega - \sin mRQ}\,\delta\omega\,.$$

Eine leichte goniometrische Transformation ergibt

$$\frac{\cos mR\,\Omega + \cos mRQ}{\sin mR\,\Omega - \sin mRQ} = -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}QRS = -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}j$$

wenn $\pi - j$ der im Dreieck $QR\Omega$ der Seite $\delta\sigma$ gegenüberstehende Winkel, also

$$\begin{aligned}\cos j &= \cos i_0\cos i - \sin i_0 \sin i\cos\delta\sigma\\ &= \cos(i + i_0) + 2\sin i_0 \sin i \sin^2\tfrac{1}{2}\delta\sigma\,.\end{aligned}$$

Damit wird

$$\cos b\sin(l - \vartheta + \delta w) = \cos\beta\sin(\lambda - \vartheta_0 - \delta w_0) - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}j\,\delta\omega\,.$$

Führt man jetzt den Winkel

$$\Theta = \vartheta - \delta w - \delta w_0$$

ein, indem man $RS = QR = \delta w_0$ macht, so wird $\gamma S = \Theta$, $\delta\Theta = \delta\vartheta - \delta w - \delta w_0$ und man erhält durch eine einfache Rechnung

$$\cos b \cos(l - \Theta) = \cos\beta \cos(\lambda - \vartheta_0) + \sin \delta w_0 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} j \cdot \delta\omega$$
$$= \cos u + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} j \sin \delta w_0 \cdot \delta\omega$$
$$\cos b \sin(l - \Theta) = \cos\beta \sin(\lambda - \vartheta_0) - \cos \delta w_0 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} j \cdot \delta\omega$$
$$= \cos i_0 \sin u - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} j \cos \delta w_0 \cdot \delta\omega$$
$$\sin b = \sin i_0 \sin u + \delta\omega .$$

24.

Es handelt sich noch darum, die Elemente Θj und δw_0 auszudrücken, resp. auf die störenden Kräfte hinzuführen. Das Dreieck $QR\mathfrak{Q}$ gibt

$$\sin j \sin \delta w_0 = \sin i \sin \delta\sigma = \delta q_1$$
$$\sin j \cos \delta w_0 = \sin i_0 \cos i + \cos i_0 \sin i \cos \delta\sigma$$
$$= \sin i_0 (\cos i_0 + \cos i) + \cos i_0 \delta q$$
$$1 + \cos j = \cos i_0 (\cos i_0 + \cos i) - \sin i_0 \delta q .$$

Man beweist aber leicht die Gleichung

$$\cos i = \cos i_0 - \operatorname{tg} i_0 \, \delta q - \frac{\delta q^2 + \cos^2 i_0 \, \delta q_1^2}{\cos i_0 (1 + \cos j)}$$

mithin wird auch

$$1 + \cos j = 2 \cos^2 i_0 - 2 \sin i_0 \, \delta q - \frac{\delta q^2 + \cos^2 i_0 \, \delta q_1^2}{1 + \cos j} .$$

Die Gauss'schen Formeln ergeben ferner

$$\cos \tfrac{1}{2} j \sin \tfrac{1}{2} (\delta w + \delta w_0) = \sin \tfrac{1}{2} \delta\sigma \cos \tfrac{1}{2} (i - i_0)$$
$$\cos \tfrac{1}{2} j \cos \tfrac{1}{2} (\delta w + \delta w_0) = \cos \tfrac{1}{2} \delta\sigma \cos \tfrac{1}{2} (i + i_0)$$

folglich

$$(1 + \cos j) \sin(\vartheta - \Theta) = \sin \delta\sigma (\cos i_0 + \cos i)$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\vartheta - \Theta) = \frac{\cos \tfrac{1}{2} (i - i_0)}{\cos \tfrac{1}{2} (i + i_0)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \delta\sigma = \frac{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \delta\sigma}{\cos i_0 - \sin i_0 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \delta i} .$$

Durch logarithmische Differentiation erhält man

$$\frac{\vartheta' - \Theta'}{\sin(\vartheta - \Theta)} = \frac{\sigma'}{\sin \delta\sigma} + \frac{i' \sin i_0}{\cos i_0 + \cos i}$$

oder

$$(1+\cos j)(\vartheta'-\Theta')=\sigma'(\cos i_0+\cos i)+i'\sin i_0\sin\delta\sigma,$$

folglich

$$(1+\cos j)\delta\Theta'=(1+\cos j)\delta\vartheta'-(\cos i_0+\cos i)\delta\sigma'-\sin i_0\sin\delta\sigma\cdot\delta i'$$

$$=\frac{r}{\Delta}\delta U\left\{\frac{1+\cos j}{\sin i}\sin u-\frac{\cos i_0+\cos i}{\operatorname{tg} i}\sin u-\sin i_0\sin\delta\sigma\cos u\right\}$$

und durch Substitution des Werthes von $\cos j$:

$$(1+\cos j)\delta\Theta'=\frac{r}{\Delta}\delta U\{\sin i\sin u-\sin u_0\sin\varepsilon\}$$

$$\Theta=\vartheta_0+\int\frac{r\delta\omega}{\Delta(1+\cos j)}\delta U\,dt,$$

also $\delta\Theta$ von der Ordnung des Quadrats der störenden Kraft[1]).

Wenn man will, so kann man $\delta\Theta'$ auch auf die Form bringen

$$\delta\Theta'=\frac{\delta q\,\delta q_1'-\delta q_1\,\delta q'}{\cos i(1+\cos j)},$$

während die Gleichungen für Länge und Breite die eben so elegante wie bequeme Gestalt annehmen:

$$\cos b\cos(l-\Theta)=\cos\varepsilon+\frac{\delta q_1}{1+\cos j}\delta\omega$$

$$\cos b\sin(l-\Theta)=\cos i_0\sin\varepsilon-\left\{\operatorname{tg} i_0+\frac{\delta q}{\cos i_0(1+\cos j)}\right\}\delta\omega$$

$$\sin b=\sin i_0\sin\varepsilon+\delta\omega.$$

Für die Störungen erster Ordnung wird einfach

$$\cos b\cos(l-\vartheta_0)=\cos\varepsilon$$

$$\cos b\sin(l-\vartheta_0)=\cos i_0\sin\varepsilon-\operatorname{tg} i_0\,\delta\omega$$

$$\sin b=\sin i_0\sin\varepsilon+\delta\omega$$

$$\delta\omega=\frac{\cos i_0}{\Delta_0}\int r\sin(\bar{\varepsilon}-\varepsilon)\delta U\,\overline{dt}.$$

Hansen bemerkt[2]), dass die Gleichungen

---

1) nicht von der dritten Ordnung, wie irrthümlich in den Abhandlungen der Berliner Akademie für 1855, S. 55 flg. steht.

2) S. 84 der mehr citirten ersten Abhandlung *über die Störungen der kleinen Planeten.*

$$\delta\omega = \delta q \sin u - \delta q_1 \cos u$$
$$\frac{d\delta\omega}{dv} = \delta q \cos u + \delta q_1 \sin u$$

die Ausdrücke liefern:

$$\delta q = \frac{d\delta\omega}{dv} \cos u + \delta\omega \sin u$$
$$\delta q_1 = \frac{d\delta\omega}{dv} \sin u - \delta\omega \cos u ,$$

welche man benutzen könne, wenn die Producte $\delta q\, \delta\omega$ und $\delta q_1 \delta\omega$ Merkliches geben sollten.

25.

Die Ableitung der Breitenstörungen vereinfacht sich, wenn man die Lage der Fundamentalebene der xy so wählt, dass die Neigung der Bahnebene i eine kleine Grösse erster Ordnung wird[1]). Diess findet z. B. statt, wenn man die Fundamentalebene mit derjenigen Lage der idealen Ebene zusammenfallen lässt, welche dem ungestörten Werthe i_0 entspricht. Streng genommen reicht die Behandlung des Falles $i_0 = 0$ aus, weil man von dieser, wie von jeder anderen, Fundamentalebene durch blosse trigonometrische Relationen zur Länge und Breite auf der Ecliptik, wie auf den Aequator übergehen kann.

Wir wollen deshalb diesen Fall etwas näher ins Auge fassen und dabei der Bequemlichkeit halber $\sigma_0 = \vartheta_0$ setzen, was offenbar gestattet ist, weil dadurch nur die Lage der willkürlichen X-Axe in der idealen Ebene näher bestimmt wird. Man findet durch eine leichte Transformation

$$\cos b \cos(l - \vartheta + \delta\sigma) = \cos u \cos\delta\sigma - \cos i \sin u \sin\delta\sigma$$
$$\cos b \sin(l - \vartheta + \delta\sigma) = \cos u \sin\delta\sigma + \cos i \sin u \cos\delta\sigma$$
$$\sin b = \sin i \sin u - \sin i(\sin u - \sin u)$$

oder

$$\cos b \cos(l - \vartheta_0 - \delta\vartheta + \delta\sigma) = \cos u + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} i \sin\delta\sigma \sin b$$
$$\cos b \sin(l - \vartheta_0 - \delta\vartheta + \delta\sigma) = \sin u - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} i \cos\delta\sigma \sin b$$
$$\sin b = \sin i \sin u - 2 \sin i \sin\tfrac{1}{2}\delta\sigma \cos(u - \tfrac{1}{2}\delta\sigma) .$$

---

1) Vgl. Hansen, a. a. O. S. 145.

Hier ist dem Früheren zufolge

$$\vartheta = \vartheta_0 + \int \frac{r \sin u}{\Delta \sin i} \delta U \, dt, \quad \sigma = \vartheta_0 + \int \frac{r \sin u}{\Delta \operatorname{tg} i} \delta U \, dt$$

$$\vartheta - \sigma = \int \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} i \, r \sin u}{\Delta} \delta U \, dt, \quad i = \int \frac{r \cos u}{\Delta} \delta U \, dt.$$

Wegen $i = \delta i$ ist das Integral für $\vartheta - \sigma$ eine kleine Grösse zweiter Ordnung. Behält man daher in den obigen Gleichungen nur Grössen erster Ordnung in Bezug auf die störenden Kräfte bei, so wird einfach

$$\cos b \cos(l - \vartheta_0) = \cos \varepsilon$$
$$\cos b \sin(l - \vartheta_0) = \sin \varepsilon$$
$$\sin b = \sin i \sin \varepsilon .$$

Man sieht aus diesen Gleichungen, dass, wenn man sich auf die angegebene Genauigkeit beschränken will, die Länge l im vorliegenden Falle ohne Kenntniss der Störungen eines Elements durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}(l - \vartheta_0) = \operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg}(v - \sigma_0),$$

also für $\sigma_0 = \vartheta_0$ und $i_0 = 0$

$$l = v,$$

d. h. der idealen Anomalie v gleich gefunden wird. Für $\cos b$ folgt der Werth 1, weil b selbst eine kleine Grösse erster Ordnung wird, deren Werth vermöge der dritten Gleichung hervorgeht:

$$b = \delta i \sin(v - \sigma_0) = \sin(v - \vartheta_0) \int \frac{r \cos u}{\Delta} \delta U \, dt,$$

wo natürlich auch unter dem Integralzeichen die constanten Elemente substituirt werden dürfen. Es ist also, um Länge und Breite aus r und v zu finden, nur eine einzige Integration erforderlich, wenn man die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt und i_0 als eine kleine Grösse erster Ordnung betrachten darf.

26.

Um die Grössen des wahren, gestörten Systems I aus denen des idealen Systems III abzuleiten, suchen wir noch die Werthe der osculirenden Elemente oder ihrer Störungen durch $\delta\alpha \; \delta\gamma \; \delta\omega$

und deren Differentialquotienten auszudrücken. Hierzu gehen wir aus von den Gleichungen

$$\frac{dv}{dt} = v' = \frac{\Delta}{r^2}, \quad \frac{dv}{d\zeta} = \frac{v'}{\zeta'} = \frac{\Delta_0}{\varrho^2}$$

$$\zeta' = 1 + \delta\zeta' = \frac{\Delta}{\Delta_0}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2,$$

folglich

$$\Delta = \Delta_0 \alpha^2 \zeta' = \Delta_0 (1 + \delta\alpha)^2 \left(1 + \frac{1}{n_0}\delta\gamma'\right).$$

Ferner geben die Gleichungen

$$r = \varrho\alpha, \quad r' = \varrho'\alpha + \varrho\alpha'$$

$$\frac{\Delta^2}{1 + e\cos f} = \frac{\Delta_0^2 \alpha}{1 + e_0 \cos\psi}$$

und

$$\frac{\mu}{\Delta} e \sin f = \frac{\mu}{\Delta_0} e_0 \sin\psi + \varrho\alpha'$$

oder

$$1 + e\cos f = (1 + e_0\cos\psi)\,\alpha^3 \zeta' \zeta'$$

$$e\sin f = e_0 \sin\psi\, \alpha^3 \zeta'\zeta' + \frac{\Delta_0 \varrho}{\mu} \alpha^2 \alpha' \zeta',$$

wofür wir schreiben:

$$e\cos f = e_0 \cos\psi + (1 + e_0\cos\psi)\,\delta x$$

$$e\sin f = e_0 \sin\psi + e_0 \sin\psi\,\delta x + \frac{\Delta_0 \varrho}{\mu}\delta x_1$$

$$\delta x = \alpha^3 \zeta' \zeta' - 1 = (1 + \delta\alpha)^3 \left(1 + \frac{1}{n_0}\delta\gamma'\right)^2 - 1$$

$$\delta x_1 = \alpha^2 \alpha' \zeta' = (1 + \delta\alpha)^2 \delta\alpha' \left(1 + \frac{1}{n_0}\delta\gamma'\right).$$

Sind damit e und f bekannt, so folgt aus

$$v = f + \chi = \psi + \chi_0$$

$$\chi = \chi_0 + \psi - f,$$

auch kann man

$$e\cos(\psi - f) = e\cos\delta\chi = e_0 + (\cos\psi + e_0)\,\delta\varkappa + \frac{\Delta_0}{\mu}\varrho\sin\psi\,\delta\varkappa_1$$

$$e\sin(\psi - f) = e\sin\delta\chi = \sin\psi\,\delta\varkappa - \frac{\Delta_0}{\mu}\varrho\cos\psi\,\delta\varkappa_1$$

zur Berechnung von e und $\delta\chi$ benutzen.

Die das vierte Element vertretende mittlere Anomalie

$$g = \varepsilon - e\sin\varepsilon$$

ergibt sich schliesslich mittelst

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\psi - \delta\chi)\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

oder einer anderen der für die excentrische Anomalie ε geltenden Relationen. Es bleiben noch die die Lage der Bahn bestimmenden Elemente ϑ i und σ resp. q und q_1 zu finden.

Diess geschieht mittelst der Gleichungen des Art. 24

$$\delta q = \frac{d\,\delta\omega}{dv}\cos\varepsilon + \delta\omega\sin\varepsilon$$

$$\delta q_1 = \frac{d\,\delta\omega}{dv}\sin\varepsilon - \delta\omega\cos\varepsilon\,,$$

wenn man nicht vorzieht, an Stelle von $\delta\omega$ die Producte

$$r\,\delta\omega = \delta\beta \qquad \text{oder} \qquad \varrho\,\delta\omega = \delta P$$

zu benutzen. Da von der idealen Breite β nicht weiter Gebrauch gemacht werden wird, so mag die Benutzung des Buchstabens β in der neuen Bedeutung gestattet sein, Hansen schreibt dafür bald z_0, bald $u = r\,\delta\omega$, bald $u = \frac{\varrho}{a_0}\,\delta\omega$ [1]).

Die betreffenden Formeln nehmen alsdann die Gestalt an

$$\delta\beta = r(\delta q\sin\varepsilon - \delta q_1\cos\varepsilon)$$

$$r\,\delta\beta' - r'\,\delta\beta = \Delta(\delta q\cos\varepsilon + \delta q_1\sin\varepsilon)\,,$$

aus denen nach leichter Reduction die Werthe hervorgehen:

---

1) Astr. Nachr. Nr. 799 S. 111, *Planetenstörungen* I, S. 84 u. 101.

$$\delta q = \frac{\varrho}{\Delta}\cos u(\alpha\,\delta\beta' - \delta\alpha'\,\delta\beta) + \frac{1}{p_0}(\sin u + e_0 \sin\varpi_0)\frac{\delta\beta}{\alpha}$$

$$\delta q_1 = \frac{\varrho}{\Delta}\sin u(\alpha\,\delta\beta' - \delta\alpha'\,\delta\beta) - \frac{1}{p_0}(\cos u + e_0\cos\varpi_0)\frac{\delta\beta}{\alpha}\,.$$

Noch etwas einfacher gestaltet sich die Benutzung von

$$\delta P = \frac{1}{\alpha}\delta\beta \quad \text{und} \quad \frac{d\delta P}{dv} = \frac{\varrho^2\alpha^2}{\Delta}\delta P'\,:$$

$$\delta q = \frac{\cos u}{\varrho}\frac{d\delta P}{dv} + \frac{1}{p_0}(\sin u + e_0\sin\varpi_0)\delta P = \sin i\cos(\sigma - \sigma_0) - \sin i_0$$

$$\delta q_1 = \frac{\sin u}{\varrho}\frac{d\delta P}{dv} - \frac{1}{p_0}(\cos u + e_0\cos\varpi_0)\delta P = \sin i\sin(\sigma - \sigma_0)\,.$$

Hierdurch sind q q_1 i und σ bestimmt, wenn man noch den früher gefundenen Ausdruck für Δ substituirt.

Um endlich ϑ zu berechnen, kann man sich der Ausdrücke des Art. 24 bedienen:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\vartheta - \Theta) = \frac{\cos\frac{1}{2}(i - i_0)}{\cos\frac{1}{2}(i + i_0)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\sigma - \sigma_0) = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta\sigma}{\cos i_0 - \sin i_0 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta i}$$

$$\Theta = \vartheta_0 + \int \frac{\delta\beta}{\Delta(1 + \cos j)}\,\delta U\,dt$$

$$1 + \cos j = \cos i_0(\cos i_0 + \cos i) - \sin^2 i_0\,\delta q\,.$$

Hansen bemerkt zu diesen Formeln[1]), dass dieselben zugleich strenge das Problem lösen, aus den Elementen eines Planeten oder Cometen in Bezug auf den Mittelpunkt der Sonne, die Elemente desselben in Bezug auf den Schwerpunkt des Sonnensystems zu finden, wenn den hier als bekannt angenommenen Grössen eine gewisse andere Zusammensetzung gegeben wird.

27.

Wir wenden uns nun zur Ableitung der Formeln, auf welche Hansen die Berechnung der absoluten Störungen einerseits, wie der speciellen Störungen andererseits gegründet hat, und beginnen mit den letzteren.

1) Astron. Nachrichten Nr. 800 S. 130 flg.

Behufs Berechnung der speciellen Störungen durch mechanische Quadraturen leitet Hansen[1]) für $\delta\gamma$ und $\delta\alpha$ die folgenden Differentialgleichungen ab. Vermöge der Artt. 16 und 26 entwickelten Gleichungen

$$\Delta = \Delta_0 \alpha^2 \left(1 + \frac{1}{n_0}\delta\gamma'\right) = \Delta_0 + \int r\delta S\, dt$$

ergibt sich

$$\alpha^2\delta\gamma' = \frac{1}{a_0^2\sqrt{1-e_0^2}}\int r\delta S\, dt - n_0(1+\alpha)\delta\alpha\,,$$

wo $\alpha = 1 + \delta\alpha$ zu berechnen bleibt.

Hierzu erhalten wir aus

$$\varrho = \frac{r}{\alpha}\,, \qquad \frac{d\varrho}{d\zeta} = \frac{\mu}{\Delta_0}\, e_0 \sin\psi$$

$$\alpha^2\varrho' = r'\alpha - r\delta\alpha' = \frac{\Delta e_0 \sin\psi}{p_0}$$

und durch nochmalige Differentiation nach t

$$r''\alpha - r\delta\alpha'' = \frac{e_0\sin\psi}{p_0}\delta\Delta' + \frac{\Delta\psi'}{p_0}e_0\cos\psi\,.$$

Substituirt man hier die Werthe

$$r'' = \frac{\Delta^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} + \left(\frac{\delta r'}{\delta t}\right), \quad \left(\frac{\delta r'}{\delta t}\right) = \delta R\,, \quad \delta\Delta' = r\delta S$$

$$\psi' = v' = \frac{\Delta}{r^2}\,, \qquad \frac{p_0}{\varrho} - 1 = e_0\cos\psi\,,$$

so ergibt eine leichte Rechnung

$$\delta\alpha'' + \frac{\mu}{r^3}\delta\alpha = \frac{1}{\varrho}\delta R - \frac{e_0\sin\psi}{p_0}\delta S + \frac{\Delta^2 - \Delta_0^2}{\Delta_0^2}\frac{\mu}{r^3}\,.$$

Da

$$\frac{e_0\sin\psi}{p_0} = \frac{r'}{\Delta}\alpha - \frac{r}{\Delta}\delta\alpha'$$

und

$$\frac{s'}{\Delta}\delta N = \frac{1}{r}\delta R - \frac{r'}{\Delta}\delta S$$

---

1) Astron. Nachrichten Nr. 799—804 u. 884, vergl. auch Nr. 42 S. 279.

von der Störungscomponente nach der Normale abhängt, so wird

$$\frac{1}{\varrho}\delta R - \frac{e_0 \sin\psi}{p_0}\delta S = \frac{s'}{\Delta}\alpha\delta N + \frac{r}{\Delta}\delta\alpha'\,\delta S$$

und man kann schreiben

$$\delta\alpha'' + \frac{\mu}{r^3}\delta\alpha = \frac{s'}{\Delta}\alpha\delta N + \frac{\Delta+\Delta_0}{p_0 r^3}\delta\Delta + \frac{r}{\Delta}\delta\alpha'\,\delta S.$$

Für die Breitenstörungen endlich leiten wir die Differentialgleichung des Products

$$\delta\beta = r\delta\omega = r(\delta q\sin u - \delta q_1\cos u)$$

ab. Man erhält sogleich, da $\delta\beta$ eine ideale Coordinate,

$$\delta\beta' = \frac{r'}{r}\delta\beta + \frac{\Delta}{r}(\delta q\cos u + \delta q_1\sin u)$$

$$\delta\beta'' = \frac{r'}{r}\delta\beta' + \left(\frac{\Delta'}{\Delta} - \frac{r'}{r}\right)(\delta\beta' - \frac{r'}{r}\delta\beta) +$$

$$+ \left(\frac{r''}{r} - \frac{r'^2}{r^2} - \frac{\Delta^2}{r^4}\right)\delta\beta + \frac{\Delta}{r}(\delta q'\cos u + \delta q_1'\sin u)$$

$$= \left(\frac{1}{r}\delta R - \frac{\mu}{r^3}\right)\delta\beta + \cos i\,\delta U + \frac{1}{\Delta}(r\delta\beta' - r'\delta\beta)\,\delta S$$

oder

$$\delta\beta'' + \frac{\mu}{r^3}\delta\beta = \cos i\,\delta U + \frac{s'}{\Delta}\delta\beta\,\delta N + \frac{r}{\Delta}\delta\beta'\,\delta S.$$

Hierfür kann man auch schreiben

$$\delta\beta'' + \frac{\mu}{r^3}\delta\beta = \cos i\,\delta U + \left(\frac{1}{\varrho}\delta R - \frac{e_0\sin\psi}{p_0}\delta S\right)\frac{1}{\alpha}\delta\beta +$$

$$+ \frac{r}{\Delta}(\delta\beta' - \frac{1}{\alpha}\delta\beta\,\delta\alpha')\,\delta S.$$

Da wir später von dem Product

$$\delta P = \varrho\,\delta\omega = \varrho(\delta q\sin u - \delta q_1\cos u)$$

Gebrauch machen werden, so kann es von Interesse sein, auch die für diese ideale Coordinate geltende Differentialgleichung zu entwickeln. Die Gleichung

$$\delta\beta = \frac{r}{\varrho}\,\delta P = \alpha\,\delta P$$

liefert sogleich

$$\alpha\,\delta P'' + 2\,\delta P'\,\delta\alpha' + \delta P\,\delta\alpha'' + \frac{\mu}{r^3}\,\alpha\,\delta P =$$

$$= \cos i\,\delta U + \frac{s'}{\Delta}\,\alpha\,\delta P\,\delta N + \frac{r}{\Delta}\,\alpha\,\delta P'\,\delta S + \frac{r}{\Delta}\,\delta\alpha'\,\delta P\,\delta S$$

und nach Substitution des Werthes von $\delta\alpha''$:

$$\delta P'' + \frac{p}{\alpha p_0}\,\frac{\mu}{r^3}\,\delta P = \frac{\cos i}{\alpha}\,\delta U + \left(\frac{r}{\Delta}\,\delta S - \frac{2}{\alpha}\,\delta\alpha'\right)\delta P'.$$

28.

Beschränkt man sich auf die Glieder erster Ordnung, was für den Zweck der Berechnung der speciellen Störungen durch mechanische Quadraturen ausreicht, so ergeben die Formeln des letzten Artikels:

$$\delta\alpha'' + \frac{\mu}{r^3}\,\delta\alpha = \frac{s'}{\Delta}\,\delta N + \frac{2\mu}{\Delta r^3}\int r\,\delta S\,dt$$

$$\delta\beta'' + \frac{\mu}{r^3}\,\delta\beta = \delta P'' + \frac{\mu}{r^3}\,\delta P = \cos i\,\delta U$$

$$\delta\gamma' + 2n\,\delta\alpha = \frac{1}{a^2\sqrt{1-e^2}}\int r\,\delta S\,dt.$$

Diese für die Anwendung äusserst bequemen Formeln stimmen mit den von Hansen in den Astr. Nachr. Nr. 799 flg. benutzten Gleichungen überein. Es handelt sich noch um die Frage, wie der Umfang der vorkommenden Integrationen zu bestimmen ist. Wir haben bisher die Werthe der constanten Elemente, mit anderen Worten der sechs unabhängigen Integrationsconstanten $\Delta_0\ e_0\ \varpi_0\ \vartheta_0\ i_0\ \tau_0$ ganz willkürlich angenommen und nur stillschweigend vorausgesetzt, dass nicht bloss die Differentialquotienten $\delta\Delta'\ \delta e'\cdots$ sondern auch ihre Integrale, die Differenzen $\delta\Delta\ \delta e\cdots$ von der Ordnung der störenden Kräfte mit denen sie verschwinden, sein sollen. In dem Integralausdruck z. B. $\Delta = \Delta_0 + \int\delta\Delta'\,dt$ wird sich also der Umfang oder die Art der auszuführenden Integration nach der Wahl von Δ

zu richten haben. Für die verschiedenen Zwecke kann eine verschiedene Wahl der constanten Elemente angezeigt sein: man hat dafür osculirende, mittlere oder sonstige intermediäre Werthe benutzt.

Am einfachsten gestaltet sich die für die Berechnung der speciellen Störungen geeignete Anwendung der osculirenden Werthe, welche einer beliebigen constanten Anfangszeit t_0 entsprechen. Denn stellt Δ_0 den constanten Werth des variabeln osculirenden Elementes Δ zur Zeit t_0 dar, so wird offenbar

$$\Delta = \Delta_0 + \int_{t_0}^{t} \delta\Delta' \, dt \quad \text{u. s. w.}$$

Und was von den Störungen der Elemente gilt, das überträgt sich selbstverständlich auf die Störungen der Coordinaten und ihrer Differentialquotienten. Wir haben mithin die Integrationen bei der mechanischen Quadratur so auszuführen, dass $\delta\alpha$ $\delta\alpha'$ $\delta\beta$ $\delta\beta'$ und $\delta\gamma$ zur Zeit $t = t_0$ verschwinden. Auf die speciellen Vorschriften für die mechanische Integration werden wir nach Einführung specieller Werthe für die störenden Kräfte zurückkommen.

Dagegen ist noch ein anderer wesentlicher Punkt hervorzuheben. Da bei der Berechnung der speciellen Störungen mittelst mechanischer Quadraturen zweckmässiger Weise nur die erste Ordnung der störenden Kräfte zu berücksichtigen ist, so hört die Genauigkeit des Resultats auf, sobald die Differenz $t - t_0$ eine gewisse Grösse übersteigt. Alsdann muss man statt der osculirenden Elemente für t_0, neue für die Zeit t geltende Elemente einführen, um mit diesen die Berechnung der Störungen fortzusetzen. Die Aufgabe aber, aus den berechneten Störungen die zugehörigen Werthe der osculirenden Elemente zu finden, haben wir bereits im Art. 26 durch strenge Formeln gelöst, und es wird sich fragen, ob man nicht auch hierbei sich eine Approximation gestatten und Glieder höherer Ordnung vernachlässigen darf. Dabei kommt jedoch der Umstand in Betracht, dass die Störungen der Elemente, wie Hansen an verschiedenen Stellen seiner Schriften hervorhebt, den numerischen Betrag der Störungen der Coordinaten nicht unbeträcht-

lich übersteigen können[1]), so dass man genöthigt ist, die Glieder von der zweiten Ordnung der störenden Kräfte in den Elementen auch für solche Zeitdifferenzen $t - t_0$ zu berücksichtigen, für welche in den Störungen der Coordinaten die Vernachlässigung der Grössen zweiter Ordnung gestattet ist. Es ist desshalb von Interesse, die strengen Formeln des Art. 26 mit blosser Rücksicht auf die Glieder erster und zweiter Ordnung zu entwickeln. Wir verweisen in dieser Beziehung auf die mehr citirte Hansen'sche Abhandlung in den Astronom. Nachrichten Nr. 800, S. 131 flg.

29.

Für die Berechnung der allgemeinen oder absoluten Störungen ist es zweckmässig, von anderen Differentialformeln auszugehen, die sich auf folgendem Wege ergeben. Wir fanden Art. 26

$$\delta\zeta' = \frac{\Delta}{\Delta_0 \alpha^2} - 1$$

und schreiben dafür

$$\delta\zeta' = \delta\Delta + \frac{\Delta}{\Delta_0}\left(\frac{\delta\alpha}{\alpha}\right)^2, \quad \delta\Delta = \frac{\Delta}{\Delta_0}\frac{1-\delta\alpha}{1+\delta\alpha} - 1$$

oder

$$\delta\Delta = \frac{\delta\Delta}{\Delta_0} - 2\frac{\Delta}{\Delta_0}\frac{\delta\alpha}{\alpha} = -1 - \frac{\Delta}{\Delta_0} + 2\frac{\Delta}{\Delta_0}\frac{\varrho}{r}$$

$$= -1 - \frac{\Delta}{\Delta_0} + \frac{2\mu\varrho}{\Delta_0\Delta}(1 + e\cos(v-\chi)).$$

Dieser Ausdruck hängt von den variabeln Elementen Δ e und χ einerseits und andererseits von den Coordinaten ϱ und v des idealen Systems III ab. Vergleichen wir hiermit die Formel

$$\delta L = -1 - \frac{\Delta}{\Delta_0} + \frac{2\mu r_0}{\Delta_0\Delta}(1 + e\cos(v_0 - \chi)),$$

welche sich von $\delta\Delta$ nur dadurch unterscheidet, dass r_0 und v_0

---

1) Es ist einleuchtend, dass zeitlich und räumlich benachbarten Stellen der gestörten Bahn unter Umständen stark abweichende osculirende Ellipsen entsprechen können, wie z. B. auch der Radius des Krümmungskreises rasch und stark sich ändern kann.

statt ϱ und v geschrieben sind, so kann man mittelst des Taylor'schen Satzes

$$\delta\Delta = \delta L + \frac{\partial\delta L}{\partial t}\delta\zeta + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2\delta L}{\partial t^2}\delta\zeta^2 + \cdots$$

$$= \delta L + \frac{\partial\delta L}{\partial g_0}\delta\gamma + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2\delta L}{\partial g_0^2}\delta\gamma^2 + \cdots$$

erhalten, wenn wie früher die Differentialquotienten auf die Zeit t bezogen werden, sofern dieselbe nicht in den osculirenden Elementen, sondern in den Polarcoordinaten r_0 und v_0 des zweiten Systems vorkommt. Man findet leicht

$$\delta L = -1 - \frac{\Delta}{\Delta_0} + \frac{2\mu r_0}{\Delta\Delta_0}(1 + e\cos(f_0 - \delta\chi))$$

$$\frac{\partial\delta L}{\partial g_0} = \frac{2\Delta_0}{\Delta(1-e_0^2)^{\frac{3}{2}}}\{e_0\sin f_0 - e\sin(f_0 - \delta\chi) + ee_0\sin\delta\chi\}$$

$$\frac{\partial^2\delta L}{\partial g_0^2} = \frac{2\Delta_0}{\Delta(1-e_0^2)}\left(\frac{a_0}{r_0}\right)^2\{e_0\cos f_0 - e\cos(f_0 - \delta\chi)\}$$

u. s. w.

Dem für δL gefundenen Ausdrucke lassen sich verschiedene Formen geben. Vermöge der Relationen

$$v_0 - \chi = f_0 - \delta\chi = f - \delta v, \quad \text{wo} \quad \delta v = v - v_0 = \psi - f_0$$

nebst

$$e\cos f = \frac{p}{r} - 1, \quad e\sin f = \frac{\mu}{\Delta}r'$$

ergibt sich einerseits:

$$\delta L = -1 - \frac{\Delta}{\Delta_0} + \frac{2\mu r_0}{\Delta\Delta_0} + \frac{2r_0}{\Delta_0}\left\{\left(\frac{\Delta}{r} - \frac{\mu}{\Delta}\right)\cos\delta v + r'\sin\delta v\right\},$$

eine für die Zurückführung auf die störenden Kräfte besonders geeignete Gleichung. Andererseits erhält man durch Einführung der wahren oder der excentrischen Anomalie die Formeln

$$\delta L = \frac{2\Delta_0}{\Delta}\left\{-\tfrac{1}{2}\frac{\delta\Delta}{\Delta_0}\left(3+\frac{\delta\Delta}{\Delta_0}\right)+\frac{r_0\cos f_0}{p_0}(e\cos\delta\chi - e_0)+\frac{r_0\sin f_0}{p_0}e\sin\delta\chi\right\}$$

$$= \frac{2\Delta_0}{\Delta}\left\{-\tfrac{1}{2}\frac{\delta\Delta}{\Delta_0}\left(3+\frac{\delta\Delta}{\Delta_0}\right)+\frac{\cos\varepsilon_0 - e_0}{1-e_0^2}(e\cos\delta\chi - e_0)+\frac{\sin\varepsilon_0}{\sqrt{1-e_0^2}}e\sin\delta\chi\right\}$$

wofür wir schreiben wollen:

$$\delta L = \delta\Xi + \left(\frac{r_0\cos f_0}{a_0}+\tfrac{3}{2}e_0\right)\delta\Upsilon + \frac{r_0\sin f_0}{a_0}\delta\Psi$$

$$= \delta\Xi + (\cos\varepsilon_0 + \tfrac{3}{2}e_0)\delta\Upsilon + \sqrt{1-e_0^2}\sin\varepsilon_0\,\delta\Psi .$$

Diese Form ist gewählt, weil die Entwickelungen von

$$\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}e = \sum_1^\infty \alpha_p \cos pg \text{ und } \sin\varepsilon = \sum_1^\infty \beta_p \sin pg$$

keine constanten Terme besitzen.

30.

Hier sind die drei mit den störenden Kräften verschwindenden, sogenannten Hansen'schen unabhängigen Elemente[1])

$$\delta\Xi \quad \delta\Upsilon \quad \text{und} \quad \delta\Psi$$

an die Stelle der Elemente Δ e und χ getreten, und zwar hat man

$$\delta\Xi = -\frac{\Delta_0}{\Delta}\left\{\left(3+\frac{\delta\Delta}{\Delta_0}\right)\frac{\delta\Delta}{\Delta_0}+\frac{3e_0}{1-e_0^2}(e\cos\delta\chi - e_0)\right\}$$

$$\delta\Upsilon = \frac{2\Delta_0}{\Delta(1-e_0^2)}(e\cos\delta\chi - e_0)$$

$$\delta\Psi = \frac{2\Delta_0}{\Delta(1-e_0^2)}e\sin\delta\chi .$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\Phi = 2\frac{\Delta_0}{\Delta} - \frac{\Delta}{\Delta_0} = 1 + \delta\Phi ,$$

---

1) Siehe Hansen, *über die unabhängigen Elemente der Fundamenta* Astron. Nachrichten Nr. 425, an anderen Orten findet sich $\delta\Psi$ durch den Factor $\sqrt{1-e_0^2}$ dividirt.

so folgt

$$\delta\Phi = \delta\Xi + \tfrac{3}{2} e_0\, \delta\Upsilon = -\left(3 + \frac{\delta\Delta}{\Delta_0}\right)\frac{\delta\Delta}{\Delta}$$

und

$$\frac{\delta\Delta}{\Delta_0} = \tfrac{1}{2}\{-\Phi - 2 + \sqrt{\Phi^2 + 8}\}$$
$$= -\tfrac{1}{3}\delta\Phi\{1 - \tfrac{3}{8}\delta\Phi + \tfrac{3^2}{8^1}\delta\Phi^2 \cdots\}.$$

Damit wird

$$\frac{\Delta}{\Delta_0} = \tfrac{1}{2}\{-\Phi + \sqrt{\Phi^2 + 8}\}, \quad \frac{\Delta_0}{\Delta} = \tfrac{1}{4}\{\Phi + \sqrt{\Phi^2 + 8}\}$$

nebst

$$e\cos\delta\chi = e_0 + \frac{\Delta(1 - e_0^2)}{2\Delta_0}\delta\Upsilon, \quad e\sin\delta\chi = \frac{\Delta(1 - e_0^2)}{2\Delta_0}\delta\Psi,$$

$$\operatorname{tg}\delta\chi = \frac{\delta\Psi}{2\frac{\Delta_0}{\Delta}\frac{e_0}{1 - e_0^2} + \delta\Upsilon}.$$

Diesen Formeln schliessen sich an:

$$\frac{1 - e^2}{1 - e_0^2} = 1 - \frac{\Delta}{\Delta_0} e_0\, \delta\Upsilon - \tfrac{1}{4}\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^2 (1 - e_0^2)(\delta\Upsilon^2 + \delta\Psi^2)$$

und nach Multiplication durch $\left(\frac{\Delta_0}{\Delta}\right)^2$:

$$\frac{a_0}{a} = 1 + \tfrac{3}{2}\frac{\Delta_0}{\Delta}\delta\Xi - \tfrac{1}{8}\frac{\delta\Delta^2}{\Delta^2} - \tfrac{1}{4}(1 - e_0^2)(\delta\Upsilon^2 + \delta\Psi^2)$$
$$= \left(\frac{\Delta_0}{\Delta}\right)^2 - \frac{\Delta_0 e_0}{\Delta}\delta\Upsilon - \tfrac{1}{4}(1 - e_0^2)(\delta\Upsilon^2 + \delta\Psi^2).$$

Die vorstehenden Gleichungen sind sämmtlich streng richtig und liefern bei Beschränkung auf die erste Potenz der störenden Kräfte die Approximationen

$$\delta\Phi = \delta\Xi + \tfrac{3}{2} e_0\, \delta\Upsilon = -3\frac{\delta\Delta}{\Delta}$$

$$\delta\Xi = \tfrac{2}{3}\delta\frac{a_0}{a} = -\tfrac{2}{3}\frac{\delta a}{a} = \frac{\delta n}{n}$$

$$\delta\Upsilon = \frac{2}{1 - e^2}\delta e$$

$$\delta\Psi = \frac{2e}{1 - e^2}\delta\chi$$

mithin

$$\delta L = -\tfrac{3}{2}\frac{\delta a}{a} + \frac{2\cos\varepsilon + e}{1-e^2}\delta e + \frac{2e\sin\varepsilon}{\sqrt{1-e^2}}\delta\chi$$

$$= -\tfrac{3}{2}\frac{\delta a}{a} + \left(\frac{2r\cos f}{p} + \frac{3e}{1-e^2}\right)\delta e + \frac{2re\sin f}{p}\delta\chi .$$

Vergleicht man damit den früher gefundenen Werth

$$\delta\alpha = \frac{\delta a}{a} - \left(\frac{r}{p}\cos f + \frac{2e}{1-e^2}\right)\delta e - \frac{re\sin f}{p}\delta\chi ,$$

so wird

$$2\delta\alpha = \frac{\delta\Delta}{\Delta} - \delta L .$$

Letztere Relation folgt auch direct aus den Gleichungen

$$\alpha^2\zeta' = \frac{\Delta}{\Delta_0} = (1+\delta\alpha)^2(1+\delta\zeta')$$

$$\frac{d\delta\gamma}{dg_0} = \frac{\delta\Delta}{\Delta_0} - 2\frac{\Delta}{\Delta_0}\delta\alpha\,(1 - \tfrac{3}{2}\delta\alpha + 2\delta\alpha^2 \mp \cdots)$$

oder

$$\frac{\delta\Delta}{\Delta_0} = \frac{d\delta\gamma}{dg_0} + 2\delta\alpha + \delta\alpha\left(2\frac{d\delta\gamma}{dg_0} + \delta\alpha + \delta\alpha\frac{d\delta\gamma}{dg_0}\right)\cdots ,$$

wenn man unter Beschränkung auf die Glieder erster Ordnung

$$\delta\zeta' = \delta L = \frac{\delta\Delta}{\Delta} - 2\delta\alpha = -\tfrac{1}{3}\delta\Phi - 2\delta\alpha$$

setzt. Uebrigens kann diese Gleichung mit Vortheil zur Controle oder auch zur directen Berechnung von $\delta\gamma$ benutzt werden[1]).

Einen strengen Ausdruck zur Berechnung von $\delta\alpha$ erhält man wie folgt. Differentiirt man den Werth

$$\delta\Delta = 2\frac{\Delta}{\Delta_0}\frac{1}{\alpha} - \frac{\Delta}{\Delta_0} - 1$$

1) HANSEN, *Störungen der kleinen Planeten*, Erste Abh. Art. 47, Zweite Abh. Art. 54, Dritte Abh. Art. 10.

nach ζ, sofern diese Grösse explicite in $\alpha = \frac{r}{\varrho}$ vorkommt, lässt also, wie bereits früher geschehen, die variabeln Elemente unberücksichtigt, so folgt

$$\frac{\partial\delta\Delta}{\partial\zeta} = -2\frac{\Delta}{\Delta_0}\frac{1}{\alpha^2}\frac{d\alpha}{d\zeta} = -2\frac{\Delta}{\Delta_0}\frac{1}{\alpha^2}\frac{\alpha'}{\zeta'}$$
$$= -2\alpha' = -2\delta\alpha'$$

oder

$$\delta\alpha' = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial\delta\Delta}{\partial\zeta} = -\frac{n_0}{2}\left\{\frac{\partial\delta L}{\partial g_0} + \frac{\partial^2\delta L}{\partial g_0^2}\delta\gamma + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^3\delta L}{\partial g_0^3}\delta\gamma^2\ldots\right\}$$

neben

$$\delta\gamma' = n_0\left\{\delta L + \frac{\partial\delta L}{\partial g_0}\delta\gamma + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2\delta L}{\partial g_0^2}\delta\gamma^2\cdots + \frac{\Delta}{\Delta_0}\left(\frac{\delta\alpha}{\alpha}\right)^2\right\}.$$

Die Einführung der Hansen'schen charakteristischen Function δL, mit den drei unabhängigen Elementen $\delta\Xi$ $\delta\Upsilon$ und $\delta\Psi$, reicht mithin aus, um die Differentialquotienten der Störungen $\delta\alpha$ und $\delta\gamma$ des Radiusvectors und der mittleren Anomalie zu entwickeln. Man überzeugt sich leicht, dass $\delta\Xi$ in den Coefficienten der Taylor'schen Entwickelung von $\delta\alpha'$ nicht vorkommt.

31.

Es kommt nunmehr darauf an, die characteristische Function δL durch die störenden Kräfte auszudrücken[1]). Diess geschieht am einfachsten durch die Gleichung des Art. 29

$$\delta L = -1 - \frac{\Delta}{\Delta_0} + \frac{2\mu r_0}{\Delta\Delta_0} + \frac{2r_0}{\Delta_0}\left\{\left(\frac{\Delta}{r} - \frac{\mu}{\Delta}\right)\cos\delta v + r'\sin\delta v\right\}.$$

Differentiirt man nach den variabeln Elementen, so folgt sogleich

$$\left(\frac{\partial\delta L}{\partial t}\right) = -\frac{\Delta'}{\Delta_0}\left(1 + \frac{2\mu r_0}{\Delta^3}\right) + \frac{2r_0}{\Delta_0}\left\{\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{p}\right)\Delta'\cos\delta v + \left(\frac{\partial r'}{\partial t}\right)\sin\delta v\right\}$$
$$= \frac{2r_0}{\Delta_0}\left\{\sin\delta v\,\delta R + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\cos\delta v\,\delta S - \frac{r}{p}\left(1 + \frac{p}{2r_0}\right)\delta S\right\}$$

und integrirt:

---

1) Hansen bezeichnet δL durch W, $\left(\frac{\partial\delta L}{\partial t}\right)$ durch T.

$$\delta L = \frac{2r_0}{\Delta_0}\int\left\{\sin(v-\bar{v}_0)\delta R + \left[\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos(v-\bar{v}_0) - \frac{r}{p}\left(1+\frac{p}{2\bar{r}_0}\right)\right]\delta S\right\}$$

$$= \frac{2r_0}{\Delta_0}\int\left\{\sin(\psi-\bar{f}_0)\delta R - \left[\frac{r}{2\bar{r}_0} - \cos(\psi-\bar{f}_0) + \frac{r}{p}(1-\cos(\psi-\bar{f}_0))\right]\delta S\right\}$$

Hier sind nach der früher eingeführten Bezeichnung unter dem Integralzeichen r_0 und v_0 resp. f_0 als Constanten zu betrachten. Wenn man in dem Integral $\int\left(\frac{\delta\delta L}{\delta t}\right)dt$ nur die Glieder erster Ordnung berücksichtigt, aber ohne r_0 und f_0 als constant zu betrachten, so wird

$$\int\left(\frac{\delta\delta L}{\delta t}\right)dt = \frac{1}{\Delta_0}\int(2r_0 - r)\,\delta S\,dt = \frac{1}{\Delta}\int r\,\delta S\,dt = \frac{\delta\Delta}{\Delta}.$$

Man kann den Integralausdruck für δL auch mittelst der Werthe von $\delta\Xi'$ $\delta\Upsilon'$ und $\delta\Psi'$ ableiten. Offenbar ist

$$\delta L = \int\delta\Xi'\,dt + (\cos\varepsilon_0 + \tfrac{1}{2}e_0)\int\delta\Upsilon'\,dt + \sqrt{1-e_0^2}\sin\varepsilon_0\int\delta\Psi'\,dt$$

und hierfür darf man schreiben:

$$\delta L = \int\{\delta\Xi' + (\cos\bar{\varepsilon}_0 + \tfrac{1}{2}e_0)\,\delta\Upsilon' + \sqrt{1-e_0^2}\sin\bar{\varepsilon}_0\,\delta\Psi'\}\,\bar{dt}$$

$$= \int\left\{\delta\Xi' + \left(\frac{\bar{r}_0}{a_0}\cos\bar{f}_0 + \tfrac{3}{2}e_0\right)\delta\Upsilon' + \frac{\bar{r}_0}{a_0}\sin\bar{f}_0\,\delta\Psi'\right\}\bar{dt},$$

wenn bei der Integration die Grössen r_0 f_0 ε_0 als constant betrachtet, also nur nach der Zeit integrirt werden soll, sofern die Elemente von t abhängen. Man hat demgemäss

$$\left(\frac{\delta\delta L}{\delta\bar{t}}\right) = \delta\Xi' + (\cos\varepsilon_0 + \tfrac{1}{2}e_0)\,\delta\Upsilon' + \sqrt{1-e_0^2}\sin\varepsilon_0\,\delta\Psi'$$

$$= \delta\Xi' + \left(\frac{r_0}{a_0}\cos f_0 + \tfrac{3}{2}e_0\right)\delta\Upsilon' + \frac{r_0}{a_0}\sin f_0\,\delta\Psi',$$

während die Differentialquotienten ohne Rücksicht auf die Variabilität der Elemente werden:

$$\frac{\partial\delta L}{\partial g_0} = \frac{1}{\sqrt{1-e_0^2}}\{-\sin f_0\,\delta\Upsilon + (\cos f_0 + e_0)\,\delta\Psi\}$$

$$= \frac{a_0}{r_0}\{-\sin\varepsilon_0\,\delta\Upsilon + \sqrt{1-e_0^2}\cos\varepsilon_0\,\delta\Psi\}$$

$$\frac{\partial^2\delta L}{\partial g_0^2} = -\left(\frac{a_0}{r_0}\right)^2\{\cos f_0\,\delta\Upsilon + \sin f_0\,\delta\Psi\}$$

$$= -\left(\frac{a_0}{r_0}\right)^3\{(\cos\varepsilon_0 - e_0)\,\delta\Upsilon + \sqrt{1-e_0^2}\sin\varepsilon_0\,\delta\Psi\}$$

u. s. w.

selbstverständlich materiell in Uebereinstimmung mit den Art. 29 entwickelten Werthen. Man sieht daraus, dass, wie bereits bemerkt, diese Differentialquotienten nur von den beiden Elementen $\delta\Upsilon$ und $\delta\Psi$ abhängig sind.

Die Differentiation der Elemente $\delta\Phi$ $\delta\Xi$ $\delta\Upsilon$ $\delta\Psi$ liefert

$$\delta\Phi' = -\left(\frac{\Delta}{\Delta_0} + 2\frac{\Delta_0}{\Delta}\right)\frac{\Delta'}{\Delta}$$

$$\delta\Xi' = \delta\Phi' + \frac{3\Delta_0 e_0}{\Delta(1-e_0^2)}\left\{(e\cos\delta\chi - e_0)\frac{\Delta'}{\Delta} - e'\cos\delta\chi + e\chi'\sin\delta\chi\right\}$$

$$\delta\Upsilon' = \frac{2\Delta_0}{\Delta(1-e_0^2)}\left\{(e_0 - e\cos\delta\chi)\frac{\Delta'}{\Delta} + e'\cos\delta\chi - e\chi'\sin\delta\chi\right\}$$

$$\delta\Psi' = \frac{2\Delta_0}{\Delta(1-e_0^2)}\left\{-e\sin\delta\chi\frac{\Delta'}{\Delta} + e'\sin\delta\chi + e\chi'\cos\delta\chi\right\}.$$

Substituirt man hier die Ausdrücke des Art. 17

$$\Delta' = r\,\delta\mathbf{S}$$

$$e' = \frac{\Delta}{\mu}\{\sin f\,\delta\mathbf{R} + (\cos f + \cos\varepsilon)\,\delta\mathbf{S}\}$$

$$e\chi' = \frac{\Delta}{\mu}\left\{\left(\frac{r}{p}+1\right)\sin f\,\delta\mathbf{S} - \cos f\,\delta\mathbf{R}\right\},$$

so erhält man nach leichter Reduction

$$\delta\Phi' = -\left(\frac{\Delta}{\Delta_0} + 2\frac{\Delta_0}{\Delta}\right)\frac{r}{\Delta}\delta\mathbf{S} = -\left(1 + \frac{2p_0}{p}\right)\frac{r}{\Delta_0}\delta\mathbf{S}$$

$$\delta\Xi' = \delta\Phi' - \frac{3a_0e_0}{\Delta_0}\left\{\sin\psi\,\delta\mathbf{R} + \left[\left(1 + \frac{r}{p}\right)\cos\psi + \frac{re_0}{p}\right]\delta\mathbf{S}\right\}$$

$$\delta\Gamma' = \frac{2a_0}{\Delta_0}\left\{\sin\psi\,\delta\mathbf{R} + \left[\left(1 + \frac{r}{p}\right)\cos\psi + \frac{re_0}{p}\right]\delta\mathbf{S}\right\}$$

$$\delta\Psi' = \frac{2a_0}{\Delta_0}\left\{-\cos\psi\,\delta\mathbf{R} + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin\psi\,\delta\mathbf{S}\right\},$$

und diese Werthe führen nach ihrer Substitution in $\left(\frac{\delta\delta L}{\delta t}\right)$ wieder zu dem oben direct abgeleiteten Integralausdruck für δL.

32.

Es bleibt noch die Ermittelung der absoluten Breitenstörungen. Um diese ähnlich zu behandeln, wie die Störungen des Radiusvectors und der mittleren Anomalie, schreiben wir wie Art. 27

$$\delta P = \varrho\,\delta\omega = \varrho(\delta q \sin u - \delta q_1 \cos u)$$

und vergleichen damit den Ausdruck

$$\delta R = r_0(\delta q \sin u_0 - \delta q_1 \cos u_0).$$

Dann wird analog wie bei $\delta\Delta$

$$\delta P = \delta R + \frac{\delta\delta R}{\delta g_0}\delta\gamma + \tfrac{1}{2}\frac{\delta^2\delta R}{\delta g_0^2}\delta\gamma^2 + \cdots,$$

wo

$$\frac{\delta\delta R}{\delta g_0} = \frac{a_0}{\sqrt{1-e_0^2}}\{\delta q(\cos u_0 + e_0\cos\varpi_0) + \delta q_1(\sin u_0 + e_0\sin\varpi_0)\}$$

$$\frac{\delta^2\delta R}{\delta g_0^2} = -\left(\frac{a_0}{r_0}\right)^3\delta R$$

u. s. w.

Ausserdem hat man

$$\delta R = r_0\sin u_0\int\delta q'\,dt - r_0\cos u_0\int\delta q_1'\,dt$$

$$= r_0\sin u_0\int\frac{r\cos i}{\Delta}\cos\varepsilon\,\delta\mathbf{U}\,dt - r_0\cos u_0\int\frac{r\cos i}{\Delta}\sin\varepsilon\,\delta\mathbf{U}\,dt$$

$$= r_0\int\frac{r\cos i}{\Delta}\sin(\bar{u}_0 - \varepsilon)\,\delta\mathbf{U}\,\bar{dt} = \int\frac{r\cos i}{\Delta}\bar{r}_0\sin(\bar{f}_0 - \psi)\,\delta\mathbf{U}\,\bar{dt},$$

wo wiederum r_0 und f_0 bei der Integration als constant zu betrachten sind. Schreibt man

$$\delta R = r_0 \sin f_0 \, \delta Q - r_0 \cos f_0 \, \delta Q_1$$
$$\delta Q = \cos \varpi_0 \, \delta q + \sin \varpi_0 \, \delta q_1$$
$$\delta Q_1 = -\sin \varpi_0 \, \delta q + \cos \varpi_0 \, \delta q_1,$$

so bestimmen sich die Elemente δQ und δQ_1 durch die Differentialgleichungen

$$\delta Q' = \frac{r \cos i}{\Delta} \cos \psi \, \delta \mathrm{U}, \qquad \delta Q_1' = \frac{r \cos i}{\Delta} \sin \psi \, \delta \mathrm{U}.$$

Uebrigens ergibt die directe Differentiation nach den Elementen

$$\left(\frac{\partial \delta R}{\partial t}\right) = r_0 (\delta q' \sin u_0 - \delta q_1' \cos u_0)$$
$$= r_0 (\delta Q' \sin f_0 - \delta Q_1' \cos f_0)$$
$$= -\frac{r r_0}{\Delta} \cos i \sin \delta v \, \delta \mathrm{U},$$

eine kleine Grösse zweiter Ordnung, doch darf man nicht daraus schliessen, dass auch δR von der zweiten Ordnung sei: es folgt nur, dass das Integral

$$\int \frac{r r_0}{\Delta} \cos i \sin (f_0 - \psi) \, \delta \mathrm{U} \, dt$$

zweiter Ordnung ist, aber nicht $\int \frac{r \overline{r_0}}{\Delta} \cos i \sin (\overline{f_0} - \psi) \, d\overline{t}$, weil zwar $f_0 - \psi = \delta v$ eine kleine Grösse erster Ordnung ist, aber nicht die Differenz $\overline{f_0} - \psi$, deren beide Theile von den unter einander unabhängigen Variabeln $\overline{t}$ und t abhängen. Weiter ist auch

$$\frac{\partial \delta R}{\partial t} = \frac{\mu}{\Delta_0} \int \frac{r \cos i}{\Delta} (\cos (\overline{f_0} - \psi) + e_0 \cos \psi) \, \delta \mathrm{U} \, d\overline{t}$$

von der ersten Ordnung.

Dagegen ist δP eine ideale Coordinate und folglich

$$\left(\frac{\partial \delta P}{\partial t}\right) = 0$$

$$\delta P' = \frac{\partial \delta P}{\partial t} = (\varrho' \sin \varepsilon + \varrho \varepsilon' \cos \varepsilon) \delta q - (\varrho' \cos \varepsilon - \varrho \varepsilon' \sin \varepsilon) \delta q_1.$$

Drückt man δq und δq_1 durch δP und $\delta P'$ aus, so wird nach Art. 26

$$\delta q = \frac{\cos\varepsilon}{\varrho}\frac{d\delta P}{dv} + \frac{1}{p_0}(\sin\varepsilon + e_0\sin\varpi_0)\,\delta P$$

$$\delta q_1 = \frac{\sin\varepsilon}{\varrho}\frac{d\delta P}{dv} - \frac{1}{p_0}(\cos\varepsilon + e_0\cos\varpi_0)\,\delta P$$

$$\frac{d\delta P}{dv} = \frac{\varrho^2}{p_0}\{\delta q(\cos\varepsilon + e_0\cos\varpi_0) + \delta q_1(\sin\varepsilon + e_0\sin\varpi_0)\}$$

$$\delta P' = \frac{\Delta\varrho^2}{p_0 r^3}\Big\{(\cos\varepsilon + e_0\cos\varpi_0)\int\frac{r\cos i}{\Delta}\cos\varepsilon\,\delta U\,dt + \\ + (\sin\varepsilon + e_0\sin\varpi_0)\int\frac{r\cos i}{\Delta}\sin\varepsilon\,\delta U\,dt\Big\}$$

oder

$$\delta P' = \frac{\Delta\varrho^2}{p_0 r^3}\int\frac{r\cos i}{\Delta}(\cos(\bar\psi - \psi) + e_0\cos\psi)\,\delta U\,\bar{dt}$$

neben

$$\delta P = \varrho\int\frac{r\cos i}{\Delta}\sin(\bar\psi - \psi)\,\delta U\,\bar{dt}.$$

Wenn man nur die Glieder niedrigster Ordnung berücksichtigt, so ergeben die Entwickelungen der letzten Artikel für die Berechnung der Störungen erster Ordnung die Gleichungen

$$\delta L = \frac{2r}{\Delta}\int\Big\{\sin(f-\bar f)\,\delta R - \Big[\frac{r}{2\bar r} - \cos(f-\bar f) + \frac{r}{p}(1-\cos(f-\bar f))\Big]\delta S\Big\}\,\bar{dt}$$

$$\frac{d\delta\alpha}{dg} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial\delta L}{\partial g}, \qquad \frac{d\delta\gamma}{dg} = \delta L,$$

neben der zur Controle benutzbaren Formel

$$\frac{d\delta\gamma}{dg} + 2\delta\alpha = \frac{\delta\Delta}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\int r\,\delta S\,dt \\ = -\tfrac{1}{3}\delta\Phi = -\tfrac{1}{3}\delta\Xi - \tfrac{1}{3}e\delta\Upsilon,$$

und für die Breitenstörungen

$$\delta R = \frac{r\cos i}{\Delta}\int r\sin(\bar f - f)\,\delta U\,\bar{dt}.$$

33.

Setzt man mit Bessel

$$J_\lambda^p = \frac{\lambda^p}{p!} - \frac{\lambda}{1}\frac{\lambda^{p+1}}{(p+1)!} + \frac{\lambda^2}{2!}\frac{\lambda^{p+2}}{(p+2)!} - \frac{\lambda^3}{3!}\frac{\lambda^{p+3}}{(p+3)!} \pm \cdots$$

so wird für $\lambda = \frac{1}{2}pe$, wie später gezeigt werden soll:

$$\sum_{p=1}^{\infty}{}' \frac{1}{p} J_\lambda^p \sin pg = \frac{r}{2a}\frac{e\sin f}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{e}{2}\sin\varepsilon$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}{}' \frac{1}{p^2} J_\lambda^p \cos pg = \tfrac{1}{4}\left(1 + \tfrac{3}{2}e^2 - \frac{r^2}{a^2}\right) = \frac{e}{4}(e + 2\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}e\cos 2\varepsilon)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}{}' \frac{1}{p}\frac{\partial J_\lambda^p}{\partial\lambda}\cos pg = \frac{r}{a}\cos f + \tfrac{1}{2}e = \frac{1}{e}\left(1 + \tfrac{1}{2}e^2 - \frac{r}{a}\right) = \cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}e$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}{}' \frac{1}{p^2}\frac{\partial J_\lambda^p}{\partial\lambda}\sin pg = \frac{\sqrt{1-e^2}}{2a}\left(1 + \frac{r}{p}\right) r\sin f = \tfrac{1}{2}\left(1 - e^2 + \frac{r}{a}\right)\sin\varepsilon.$$

Wir können hiernach δL die Form geben

$$= \delta\Xi + \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{2a_0}\delta\Upsilon\frac{d}{dg_0}\left[\left(1+\frac{r_0}{p_0}\right)r_0\sin f_0\right] + \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{2e_0}\delta\Psi\frac{d}{dg_0}\left(\frac{a_0^2}{r_0^2} - 1 - \tfrac{3}{2}e_0^2\right)$$

$$= \frac{d}{dg_0}\left\{g_0\delta\Xi + \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{2a_0}\left(1+\frac{r_0}{p_0}\right)r_0\sin f_0\,\delta\Upsilon + \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{2e_0}\left(\frac{r_0^2}{a_0^2} - 1 - \tfrac{3}{2}e_0^2\right)\delta\Psi\right\}$$

$$- \frac{1}{n_0}\left\{g_0\delta\Xi' + \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{2a_0}\left(1+\frac{r_0}{p_0}\right)r_0\sin f_0\,\delta\Upsilon' + \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{2e_0}\left(\frac{r_0^2}{a_0^2} - 1 - \tfrac{3}{2}e_0^2\right)\delta\Psi'\right\}$$

$$= \frac{d}{dg_0}\left\{g_0\delta\Xi - \delta\mathfrak{X} + \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{2a_0}\left(1+\frac{r_0}{p_0}\right)r_0\sin f_0\,\delta\Upsilon + \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{2e_0}\left(\frac{r_0^2}{a_0^2} - 1 - \tfrac{3}{2}e_0^2\right)\delta\Psi\right\}$$

wo das neue Element $\delta\mathfrak{X}$ den Gleichungen genügt

$$' = g_0\delta\Xi' + \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{2a_0}\left(1+\frac{r_0}{p_0}\right)r_0\sin f_0\,\delta\Upsilon' + \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{2e_0}\left(\frac{r_0^2}{a_0^2} - 1 - \tfrac{3}{2}e_0^2\right)\delta\Psi'$$

$$= g_0\delta\Xi + \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{2a_0}\left(1+\frac{r_0}{p_0}\right)r_0\sin f_0\,\delta\Upsilon + \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{2e_0}\left(\frac{r_0^2}{a_0^2} - 1 - \tfrac{3}{2}e_0^2\right)\delta\Psi$$

$$- n_0\int\left\{\delta\Xi + \left(\frac{r_0}{a_0}\cos f_0 + \tfrac{3}{2}e_0\right)\delta\Upsilon + \frac{r_0}{a_0}\sin f_0\,\delta\Psi\right\}dt.$$

Man erkennt hier ohne Weiteres das Stattfinden der Gleichung $\frac{\delta\delta\mathfrak{X}}{\delta t}=0$, wenn man ohne Rücksicht auf die Elemente differentiirt, also $\delta\Xi\,\delta\Upsilon\,\delta\Psi$ als constant betrachtet. Diess beweist, dass in der That $\delta\mathfrak{X}$ die Eigenschaften eines Elements besitzt.

Durch Einführung der im Art. 34 gefundenen Werthe von $\delta\Xi'\,\delta\Upsilon'\,\delta\Psi'$ erhält man mittelst der Störungscomponenten

$$\delta\mathfrak{X}'=-g_0\frac{a_0}{\Delta_0}\Big\{3e_0\sin\psi\,\delta\mathrm{R}+\Big[(2+e_0^2)\frac{r}{p}+\frac{r}{a_0}+3\Big(1+\frac{r}{p}\Big)e_0\cos\psi\Big]\delta\mathrm{S}\Big\}$$
$$+\frac{a_0\sqrt{1-e_0^2}}{\Delta_0}\Big\{\frac{r_0}{a_0}\Big(1+\frac{r_0}{p_0}\Big)\cos(f_0-\psi)+\Big(\frac{3}{2}+\frac{r_0^2}{a_0p_0}\Big)e_0\cos\psi\Big\}\delta\mathrm{R}$$
$$+\frac{a_0\sqrt{1-e_0^2}}{\Delta_0}\Big\{\frac{r_0}{a_0}\Big(1+\frac{r_0}{p_0}\Big)\Big(1+\frac{r}{p}\Big)\sin(f_0-\psi)-$$
$$-\Big(\frac{3}{2}+\frac{r_0^2}{a_0p_0}\Big)\Big(1+\frac{r}{p}\Big)e_0\sin\psi+\frac{r_0}{a_0}\Big(1+\frac{r_0}{p_0}\Big)\frac{r}{p}e_0\sin f_0\Big\}\delta\mathrm{S}$$

neben

$$\int\delta L\,dg_0=g_0\,\delta\Xi-\delta\mathfrak{X}+\tfrac{1}{2}\sqrt{1-e_0^2}\Big(1+\frac{r_0}{p_0}\Big)\frac{r_0}{a_0}\sin f_0\,\delta\Upsilon$$
$$+\frac{\sqrt{1-e_0^2}}{2e_0}\Big(\frac{r_0^2}{a_0^2}-1-\tfrac{3}{2}e_0^2\Big)\delta\Psi.$$

Es ist nun leicht, aus den Formeln

$$\delta\Phi=\delta\Xi+\tfrac{3}{2}e_0\,\delta\Upsilon$$
$$\delta L=\delta\Phi+\frac{r_0}{a_0}\cos f_0\,\delta\Upsilon+\frac{r_0}{a_0}\sin f_0\,\delta\Psi$$
$$\frac{\delta\delta L}{\delta g_0}=-\frac{\sin f_0}{\sqrt{1-e_0^2}}\delta\Upsilon+\frac{\cos f_0+e_0}{\sqrt{1-e_0^2}}\delta\Psi$$

die Gleichungen abzuleiten:

$$\delta\Xi=\tfrac{1}{2}\Big(\frac{3a_0}{r_0}-1\Big)\delta\Phi+\tfrac{3}{2}\Big(1-\frac{a_0}{r_0}\Big)\delta L+\tfrac{3}{2}\frac{r_0e_0\sin f_0}{a_0\sqrt{1-e_0^2}}\frac{\delta\delta L}{\delta g_0}$$
$$\delta\Upsilon=-\frac{\cos f_0+e_0}{1-e_0^2}\delta\Phi+\frac{\cos f_0+e_0}{1-e_0^2}\delta L-\frac{r_0}{a_0}\frac{\sin f_0}{\sqrt{1-e_0^2}}\frac{\delta\delta L}{\delta g_0}$$
$$\delta\Psi=-\frac{\sin f_0}{1-e_0^2}\delta\Phi+\frac{\sin f_0}{1-e_0^2}\delta L+\frac{r_0\cos f_0}{a_0\sqrt{1-e_0^2}}\frac{\delta\delta L}{\delta g_0}.$$

Verbindet man damit den Ausdruck für

$$\delta\mathfrak{x} = g_0\delta\Xi - \int \delta L\, dg_0 + \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{2}\left(1+\frac{r_0}{p_0}\right)\frac{r_0}{a_0}\sin f_0\,\delta\Upsilon + \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{2e_0}\left(\frac{r_0^2}{a_0^2} - 1 - \tfrac{1}{2}e_0^2\right)\delta\Psi$$

und schreibt zur Abkürzung

$$\delta\mathfrak{L} = g_0\delta\Xi - \int \delta L\, dg_0\,,$$

so wird

$$\delta\mathfrak{x} = \delta\mathfrak{L} - \left(\frac{r_0}{a_0} - \tfrac{5}{2}\right)\frac{e_0\sin f_0}{2\sqrt{1-e_0^2}}\delta\Phi + \left(\frac{r_0}{a_0} - \tfrac{5}{2}\right)\frac{e_0\sin f_0}{2\sqrt{1-e_0^2}}\delta L - \frac{r_0}{a_0}\left(\frac{r_0}{a_0} + \tfrac{5}{4}e_0\cos f_0\right)\frac{\partial\delta L}{\partial g_0}\,.$$

34.

Bei Uebergehung der Glieder höherer Ordnung vereinfachen sich die aufgestellten Formeln sehr wesentlich. Zunächst erhält man wegen

$$\delta\Phi = -3\frac{\delta\Delta}{\Delta}, \quad \delta L = \frac{d\delta\gamma}{dg}, \quad \frac{\partial\delta L}{\partial g} = -2\frac{d\delta\alpha}{dg}:$$

$$\delta\Xi = \tfrac{3}{2}\left(1 - \frac{3a}{r}\right)\frac{\delta\Delta}{\Delta} + \tfrac{3}{2}\left(1-\frac{a}{r}\right)\frac{d\delta\gamma}{dg} - \frac{3re\sin f}{a\sqrt{1-e^2}}\frac{d\delta\alpha}{dg}$$

$$\delta\Upsilon = 3\frac{\cos f + e}{1-e^2}\frac{\delta\Delta}{\Delta} + \frac{\cos f + e}{1-e^2}\frac{d\delta\gamma}{dg} + \frac{2r\sin f}{a\sqrt{1-e^2}}\frac{d\delta\alpha}{dg}$$

$$\delta\Psi = 3\frac{\sin f}{1-e^2}\frac{\delta\Delta}{\Delta} + \frac{\sin f}{1-e^2}\frac{d\delta\gamma}{dg} - \frac{2r\cos f}{a\sqrt{1-e^2}}\frac{d\delta\alpha}{dg}\,.$$

Ferner vermöge Art. 22:

$$\delta\mathfrak{L} = g\frac{\delta n}{n} - \delta\gamma = g\frac{\delta n}{n} - \delta g - \frac{r}{a}\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{\sin f}{\sqrt{1-e^2}}\delta e - \frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\delta\chi$$

$$\delta\mathfrak{x} = g\frac{\delta n}{n} - \delta\gamma + \tfrac{3}{2}\frac{e\sin f}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a} - \tfrac{5}{2}\right)\frac{\delta\Delta}{\Delta} + \tfrac{1}{2}\frac{e\sin f}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a} - \tfrac{5}{2}\right)\frac{d\delta\gamma}{dg} + \frac{r}{a}\left(\frac{2r}{a} + \tfrac{5}{2}e\cos f\right)\frac{d\delta\alpha}{dg}\,.$$

Zur Reduction auf die elliptischen Elemente aber führt di Gleichung

$$\delta\mathfrak{X} = \delta\mathfrak{x} + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\frac{r\sin f}{a\sqrt{1-e^2}}\delta e + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r^2}{a^2} - 1 - \tfrac{1}{2}e^2\right)\delta$$

$$= g\frac{\delta n}{n} - \delta g - \frac{1+\frac{3}{2}e^2}{\sqrt{1-e^2}}\delta\chi = n\delta\tau - \frac{1+\frac{3}{2}e^2}{\sqrt{1-e^2}}\delta\chi.$$

Selbstverständlich kann man in den obigen Ausdrücke vermittelst der Relation

$$\frac{\delta\Delta}{\Delta} = 2\delta\alpha + \frac{d\delta\gamma}{dg}$$

$\delta\Delta$ oder $\frac{d\delta\gamma}{dg}$ eliminiren, resp. durch $\delta\alpha$ ersetzen, wenn abe HANSEN bemerkt[1]), dass die vier Elemente $X\,\Xi\,T$ und Ψ (linear durch

$$n\delta z = \delta\gamma, \quad \frac{d\delta z}{dt} = \frac{d\delta\gamma}{dg}, \quad \nu = \delta\alpha \quad \text{und} \quad S = \frac{\delta\Delta}{\Delta}$$

ausgedrückt werden können, so scheint diess auf einem Miss verständniss zu beruhen, da wegen der erwähnten Relatio die Grössen $\frac{d\delta z}{dt}$, ν und S nicht unabhängig von einander sind Ich habe diess bei der Herausgabe der unvollendeten Abhand lung, in welcher die Worte hinzugefügt sind »*welches aber e weiter unten geschehen soll*«, hervorzuheben unterlassen. Uebrigen definirt HANSEN[2]) *das bisher eliminirte vierte Element* X, und Beschränkung auf die ersten Potenzen der Massen, durch d Gleichung

$$X = n\int\left\{\Xi - \frac{dT}{n\,dt}\frac{\sqrt{1-e^2}}{2}\left(\frac{r}{a} + \frac{r^2}{a^2(1-e^2)}\right)\sin f\right.$$

$$\left. - \frac{d\Psi}{n\,dt}\frac{\sqrt{1-e^2}}{2e}\left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{2+3e^2}{2}\right)\right\}dt$$

1) in der nachgelassenen Abhandlung *über die Störungen der p Planeten* (1875) S. 368.

2) a. a. O. S. 367: *In den vorstehenden Ausdrücken ist, wie* (siehe Astron. Nachr. Nr. 425, S. 274), *Ein Element eliminirt, e eingeführt werden muss, wobei jedoch nur auf die ersten Potenzen der Rücksicht genommen zu werden braucht.*

oder

$$X = g\delta\Xi - \delta\mathfrak{X} = \delta g + \frac{1+\frac{3}{2}e^2}{\sqrt{1-e^2}}\delta\chi .$$

Diese Grösse ist, gleich δg, nur als ein *stellvertretendes Element* zu bezeichnen.

Die Ausdrücke mit Hülfe der störenden Kräfte endlich werden:

$$\delta\Phi' = -\frac{3r}{\Delta}\delta S$$

$$\delta\Xi' = -\frac{3a}{\mu}s'\delta T = -\frac{3a}{\Delta}\left\{e\sin f\,\delta R + \frac{p}{r}\delta S\right\}$$

$$\delta\Gamma' = \frac{2a}{\Delta}\left\{\sin f\,\delta R + (\cos f + \cos\varepsilon)\,\delta S\right\}$$

$$\delta\Psi' = \frac{2a}{\Delta}\left\{-\cos f\,\delta R + \left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\,\delta S\right\}$$

$$\delta\mathfrak{X}' = -3g\frac{a}{\Delta}\left\{e\sin f\,\delta R + \frac{p}{r}\delta S\right\}$$

$$+\frac{a\sqrt{1-e^2}}{\Delta}\left\{\left(2\frac{r}{a}+\tfrac{1}{2}e\cos f\right)\delta R - \tfrac{1}{2}\left(1+\frac{r}{p}\right)e\sin f\,\delta S\right\},$$

wofür man auch schreiben kann

$$\delta\mathfrak{X}' - g\delta\Xi' = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\Delta}\left\{\left(2\frac{r}{a}+\tfrac{1}{2}e\cos f\right)\delta R - \tfrac{1}{2}\left(1+\frac{r}{p}\right)e\sin f\,\delta S\right\}$$

$$= \frac{d}{dt}(\delta\mathfrak{X} - g\delta\Xi) + n\int\delta\Xi'\,dt .$$

Da nun

$$\delta\gamma = \int\delta L\,dg = g\delta\Xi - \delta\mathfrak{X} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{2}\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{r}{a}\sin f\,\delta\Gamma$$

$$+\frac{\sqrt{1-e^2}}{2e}\left(\frac{r^2}{a^2} - 1 - \tfrac{1}{2}e^2\right)\delta\Psi$$

$$\delta a = -\tfrac{1}{2}\int\frac{\partial\delta L}{\partial g}\,dg = \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{\partial\delta L}{\partial t}\right)dt - \tfrac{1}{2}\delta L ,$$

so erhält man

$$\delta\gamma = n\iint \delta\Xi' dt^2 - \int(\delta\mathfrak{X}' - g\delta\Xi')\,dt$$
$$+\frac{\sqrt{1-e^2}}{2}\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{r}{a}\sin f\int\delta\Upsilon' dt + \frac{\sqrt{1-e^2}}{2e}\left(\frac{r^2}{a^2}-1-\tfrac{1}{2}e^2\right)\int\delta\Psi' dt$$
$$\delta\alpha = -\tfrac{2}{3}\int\delta\Phi' dt - \frac{r\cos f}{2a}\int\delta\Upsilon' dt - \frac{r\sin f}{2a}\int\delta\Psi' dt.$$

35.

Wir wollen jetzt noch den Fall des Art. 15 ins Auge fassen, wo die störenden Kräfte eine Störungsfunction Ω besitzen, für welche

$$\delta R = \lambda\frac{\partial\Omega}{\partial r}, \quad \delta S = \frac{\lambda}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial f} \quad \text{und} \quad \delta U = \frac{\lambda}{r\sin u}\frac{\partial\Omega}{\partial i}$$

gesetzt werden kann. Alsdann erhält man durch Einführung der am Schlusse des Art. 15 gegebenen Ausdrücke

$$\frac{1}{n}\delta\Phi' = -\frac{3\lambda}{n\Delta}\frac{\partial\Omega}{\partial f} = -\frac{3a}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial f}$$
$$\frac{1}{n}\delta\Xi' = -3a\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial g}$$
$$\frac{1}{n}\delta\Upsilon' = \frac{2a}{e}\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g} - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right)$$
$$\frac{1}{n}\delta\Psi' = \frac{2a}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial e}$$
$$\frac{1}{n}(\delta\mathfrak{X}' - g\delta\Xi') = a\frac{\lambda}{\mu}\left(2a\frac{\partial\Omega}{\partial a} - \tfrac{5}{2}e\right)$$

und damit

$$\delta\gamma = -3\frac{a}{\mu}\iint\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial g}dg^2 - \frac{a}{\mu}\int\lambda\left(2a\frac{\partial\Omega}{\partial a} - \tfrac{5}{2}e\frac{\partial\Omega}{\partial e}\right)dg$$
$$+\frac{\sqrt{1-e^2}}{\mu e}\left(1+\frac{r}{p}\right)r\sin f\int\lambda\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g} - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right)dg$$
$$+\frac{a}{\mu e}\left(\frac{r^2}{a^2} - 1 - \tfrac{1}{2}e^2\right)\int\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial e}dg.$$

Selbstverständlich kann auch hier das Doppelintegral

$$\iint \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial g} dg^2 = g \int \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial g} dg - \int \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial g} g dg$$

durch zwei einfache Integrale ersetzt werden. Für die Störungen des Radiusvectors und der Breite ergeben sich analog die Werthe

$$\delta a = \frac{2a}{\mu\sqrt{1-e^2}} \int \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial f} dg - \frac{r\cos f}{\mu e} \int \lambda \left(\frac{\partial \Omega}{dg} - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \Omega}{\partial f} \right) dg$$

$$- \frac{r \sin f}{\mu\sqrt{1-e^2}} \int \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial e} dg$$

und

$$\delta\beta = \delta P = \frac{r\cos i}{n\mathcal{A}} \left\{ \sin u \int \lambda \cot u \frac{\partial \Omega}{\partial i} dg - \cos u \int \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial i} dg \right\}$$

oder

$$\delta\omega = \frac{a\cos i}{\mu\sqrt{1-e^2}} \left\{ \sin f \int \frac{\cos f}{\sin u} \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial i} dg - \cos f \int \frac{\sin f}{\sin u} \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial i} dg \right\}.$$

Die vorstehenden Formeln eignen sich für die Berechnung der Störungen in erster Approximation, obgleich durch den Nenner e, resp. die Differentiation nach e, bei der Entwickelung nach den Potenzen der Excentricität die Ordnung der betreffenden Glieder um eine Einheit herabgedrückt wird[1]).

In Nr. 436 der Astron. Nachrichten S. 55/56 führt Hansen verschiedene Formen seiner Function $\frac{1}{n} T = \left(\frac{\partial \delta L}{\partial g} \right)$ ein, welche für die Berechnung der Störungen erster Ordnung je nach Umständen als vortheilhaft zu bezeichnen seien[2]). Substituirt man

---

1) Als ich im Jahre 1850, bei Gelegenheit der auf Hansen's Anregung von der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig für 1. Oct. 1850 gestellten Preisaufgabe über Mondstörungen von langer Periode, die obige Formel zur Berechnung von $\delta\gamma$ vorschlug, sprach sich Hansen gegen die derselben zu Grunde liegende Einführung des eliminirten Elementes $\mathfrak{X}$ aus. Es war mir daher interessant, aus der nachgelassenen Abhandlung über die Störungen der grossen Planeten zu ersehen, dass er später in gewissen Fällen diese Einführung für nöthig oder zweckmässig gehalten hat.

2) Vergl. auch die Abhandlung *über die Störungen der grossen Planeten* Art. 23—25.

in der Gleichung [1])

$$\left(\frac{\partial \delta L}{\partial g}\right) = \frac{1}{n}\left\{\delta \Phi' + \frac{r_0}{a}\cos f_0 \delta \Upsilon' + \frac{r_0}{a}\sin f_0 \delta \Psi'\right\}$$

die umstehend aufgeführten Werthe von $\delta\Phi'$ $\delta\Upsilon'$ und $\delta\Psi'$, so erhält man für $\lambda = \mu$

$$\left(\frac{\partial \delta L}{\partial g}\right) = -\frac{3a}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial \Omega}{\partial f} + \frac{2}{e} r_0 \cos f_0 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial g} - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial \Omega}{\partial f}\right) + \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} r_0 \sin f_0 \frac{\partial \Omega}{\partial e}.$$

Hansen schreibt dafür

$$\frac{1}{n} T = -3a\frac{\partial \Omega}{\partial g} + \frac{a}{e}\left\{\frac{\partial \Omega}{\partial g} - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right\}\left(2\frac{\varrho}{a}\cos\varphi + 3e\right) + \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial \Omega}{\partial e} 2\frac{\varrho}{a}\sin\varphi$$

und setzt hinzu, dass, obschon diese Form die Entwickelung von Ω um eine Ordnung höher in Bezug auf e verlange, er sie bei einer ausgedehnteren Entwickelung der Störungen nach den Potenzen von e etc., den beiden anderen, a. a. O. aus den *Fundamentis novis investigationis orbitae Lunae* und der Preisschrift *über die Störungen des Jupiters und Saturns* entlehnten Formen vorziehen würde. Diese lauten

$$\frac{1}{n} T = Aa\frac{\partial \Omega}{\partial v} + Bar\frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

und

$$\frac{1}{n} T = A_1 a\frac{\partial \Omega}{\partial g} + B_1 ar\frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

---

1) Ich bemerke, dass obgleich hier bloss Glieder erster Ordnung berücksichtigt werden, wir die Indices bei r_0 und f_0 beibehalten haben, weil bei der zum Uebergang auf δL dienenden Integration diese Grössen als constant zu betrachten sind, was von uns unter dem Integralzeichen durch einen Strich ausgedrückt worden ist. Hansen schreibt stattdessen ϱ und φ, welche Grössen erst nach der Integration durch r und f ersetzt werden sollen, worauf sich bei ihm der Strich in den Gleichungen $nx = g + n\int \overline{W}\,dt$ und $w = -\frac{1}{2}n\int \frac{d\overline{W}}{d\gamma}\,dt$ bezieht, während $W = \int T\,dt$ gesetzt ist.

und beruhen auf den Ausdrücken:

$$\frac{1}{n}\delta\Phi' = -\frac{3a}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial f} = \frac{3r}{1-e^2}\frac{\lambda}{\mu}\left\{\frac{r e\sin f}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial\Omega}{\partial r} - \frac{r}{a}\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right\}$$

$$\frac{1}{n}\delta\Xi' = -\frac{3a^2}{r\sqrt{1-e^2}}\frac{\lambda}{\mu}\left\{r e\sin f\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \frac{p}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right\} = -3a\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial g}$$

$$\frac{1}{n}\delta\Upsilon' = \frac{2a^2}{r\sqrt{1-e^2}}\frac{\lambda}{\mu}\left\{r\sin f\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \frac{1}{e}\left(\frac{p}{r}-\frac{r}{a}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right\}$$

$$= \frac{2r}{1-e^2}\frac{\lambda}{\mu}\left\{\frac{r\sin f}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \frac{1}{e}\left(\frac{p}{r}-\frac{r}{a}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right\}$$

$$\frac{1}{n}\delta\Psi' = \frac{2a^2}{r\sqrt{1-e^2}}\frac{\lambda}{\mu}\left\{-r\cos f\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right\}$$

$$= \frac{2r}{1-e^2}\frac{\lambda}{\mu}\left\{\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\frac{\partial\Omega}{\partial g} - \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\cos f + 2e\right)\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right\}$$

$$\frac{1}{n}(\delta\mathfrak{X}' - g\delta\Xi') = \frac{a^2}{r}\frac{\lambda}{\mu}\left\{\left(2\frac{r}{a} + \tfrac{5}{2}e\cos f\right)r\frac{\partial\Omega}{\partial r} - \tfrac{5}{2}\left(1+\frac{r}{p}\right)e\sin f\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right\}$$

$$= a\frac{\lambda}{\mu}\left\{\left(-\tfrac{1}{2} + \frac{5}{1-e^2} - \tfrac{5}{2}\frac{r}{p}\right)r\frac{\partial\Omega}{\partial r} - \tfrac{5}{2}\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{r e\sin f}{a\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right\}$$

also für $\lambda = \mu$:

$$A = \frac{2r_0}{r\sqrt{1-e^2}}\left\{\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos(f-f_0) - \frac{r}{p}\left(1+\frac{p}{2r_0}\right)\right\}$$

$$B = \frac{2r_0}{r\sqrt{1-e^2}}\sin(f-f_0)$$

$$A_1 = \frac{2r_0 r}{ap}\left\{\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos(f-f_0) - \frac{r}{p}\left(1+\frac{p}{2r_0}\right)\right\}$$

$$B_1 = \frac{2}{1-e^2}\left\{\frac{r r_0}{a^2\sqrt{1-e^2}}\sin(f-f_0) + \tfrac{3}{2}\frac{r e\sin f}{a\sqrt{1-e^2}} - 2\frac{r_0 e\sin f_0}{a\sqrt{1-e^2}}\right\}.$$

Selbstverständlich ergeben sich diese Werthe auch direct aus der Gleichung des Art. 34:

$$\left(\frac{\partial \delta L}{\partial g}\right) = \frac{2r_0}{n\Delta}\left\{\sin(f-f_0)\delta R + \left[\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos(f-f_0) - \frac{r}{p}\left(1+\frac{p}{2r_0}\right)\right]\delta S\right.$$

Leipzig, Januar 1897.

Inhaltsübersicht.

Art. 1. 2. Die Differentialgleichungen der ungestörten und der gestörten Bewegung.
» 3. 4. Die Invarianten oder Elemente der ungestörten Bewegung.
» 5. Die elliptische, hyperbolische und parabolische Bewegung.
» 6. Ausdrücke für die rechtwinkligen und die sphärischen Coordinaten der elliptischen Bewegung nebst den Geschwindigkeitscomponenten.
» 7. 8. Differentialformeln und Relationen zwischen den verschiedenen Anomalien und dem Radiusvector.
» 9. Übergang zur gestörten Bewegung mittelst der Variation der arbiträren Constanten. Einführung der osculirenden Elemente.
» 10. 11. Definition der *idealen Coordinaten*. Einführung der idealen Bahnebene und der idealen Anomalie nebst den Elementen σ und χ.
» 12. Einführung der lebendigen Kraft des Systems und der *Kräftefunction*. Existenz eines *Potentials*: das Weber'sche elektrodynamische Fundamentalgesetz.
» 13. 14. Entwickelung der Componenten der störenden Kräfte nach verschiedenen Hauptrichtungen.
» 15. Von der Existenz einer *Störungsfunction*.
» 16. Aufstellung der Differentialgleichungen für die osculirenden Elemente, welche die Lage der idealen Ebene, und
» 17. welche den Ort in der Bahnebene zur Zeit t bestimmen.
» 18. Das *stellvertretende Element* δg und die Hamilton-Jacobi'sche canonische Form der Differentialgleichungen der Elemente.
» 19. Ableitung weiterer idealer Coordinaten nebst den zugehörigen Elementen.

Art. 20. Vergleichung der Ausdrücke für die Coordinaten des *gestörten* Systems I und des *ungestörten* Systems II. Ableitung der Störungen der Coordinaten mittelst der Störungen der Elemente.

» 21. Übergang zu Hansen's Coordinaten des *idealen* Systems III, durch Einführung der idealen Zeit ζ statt t.

» 22. Entwickelung der Störungen $\delta\gamma\ \delta\alpha\ \delta\omega$ der idealen Werthe der mittleren Anomalie, sowie des Radiusvectors und des Sinus der Breite. Einführung der Elemente q und q_1.

» 23. 24. Hansen's Transformation zur Berechnung der gestörten Länge und Breite, mit Hülfe der Elemente δw und δw_0 einerseits und Θ und j andererseits.

» 25. Betrachtung des Falles, wo die Neigung der Bahnebene gegen die Fundamentalebene eine kleine Grösse erster Ordnung wird.

» 26. Ableitung der Werthe der osculirenden Elemente aus den Störungen der idealen Coordinaten und ihrer Differentialquotienten.

» 27. 28. Differentialgleichungen für die Berechnung der *speciellen* Störungen $\delta\alpha\ \delta\beta\ \delta\gamma$ der idealen Coordinaten mittelst mechanischer Quadratur.

» 29. 30. Differentialgleichungen zur Berechnung der *absoluten* Störungen $\delta\gamma$ und $\delta\alpha$ mittelst Hansen's *charakteristischer Function* δL oder T, in Verbindung mit den drei *unabhängigen Elementen* $\delta\Xi\ \delta\Upsilon$ und $\delta\Psi$.

» 31. Zurückführung der vorgedachten Grössen auf die störenden Kräfte.

» 32. Analoge Berechnung der Breitenstörungen mittelst der charakteristischen Function δR.

» 33. Einführung des neuen, bisher eliminirten Elementes $\delta\mathfrak{X}$ oder X.

» 34. Vereinfachte Ausdrücke bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung.

» 35. Anwendung auf den Fall der Existenz einer Störungsfunction, nebst Ableitung verschiedener von Hansen benutzter Ausdrücke für die charakteristische Function.

SITZUNG VOM 1. MÄRZ 1897.

Vorträge hielten:

1. Herr **W. Scheibner**, o. M.: Über eine Arbeit von **O. Staude-Rostock**: Die algebraische Grundlage der Focaleigenschaften der Paraboloide.
2. **Derselbe**: Über die formale Bedeutung des Hamilton'schen Princips und das Weber'sche Gesetz.
3. Herr **S. Lie**, o. M.: Über das Abel'sche Theorem und die Translations-Mannigfaltigkeiten.
4. **Derselbe**: Vorlegung einer Arbeit von Herrn **F. Engel**, a. o. M.: Über lineare homogene Transformationen.
5. Herr **W. Ostwald**, o. M.: Studien über die Bildung und Umwandlung fester Körper.
6. Herr **J. Wislicenus**, o. M.: Über Tautomere des Dibenzoylmethans.

Otto Staude in **Rostock**: *Die algebraische Grundlage der Focaleigenschaften der Paraboloide.* Mit 2 Figuren.

§ 1.

Gegenstand der Mittheilung.

Bezogen auf das gewöhnliche Coordinatensystem Oxy der Ebene stellt die Gleichung:

$$y^2 + 2px - p^2 = 0$$

ein System confocaler *Parabeln* dar, welche ihren Brennpunkt in O haben und nach links oder rechts geöffnet sind, jenachdem $p > 0$ oder $p < 0$ (vgl. Fig. 1). Diese Gleichung zerfällt nun vermöge der Identität

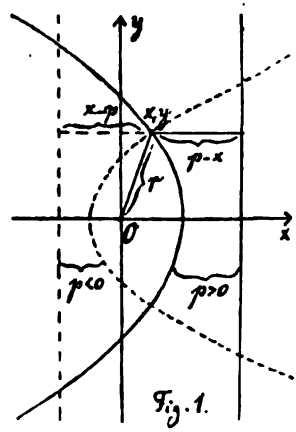


Fig. 1.

$$(1) \qquad -p\left(\frac{y^2}{p} + 2x - p\right) = (p - x - r)\,(p - x + r),$$

wo r den absoluten Werth der Quadratwurzel

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

bedeuten soll, in die beiden Gleichungen:

$$(1') \qquad \begin{cases} r = p - x \\ r = x - p, \end{cases}$$

von denen (vgl. Fig. 1) die erste für die linken, die zweite für die rechten Parabeln des confocalen Systems die gewöhnliche *Focaleigenschaft der Parabel* ausdrückt [1]).

Ich werde in den folgenden §§ zeigen, dass in völlig analoger Weise auch die Gleichung

$$-p(p-e)\left\{\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{p-e}+2x-p\right\}=0,$$

welche alle möglichen *Paraboloide* umfasst, als Gleichung 3. Grades für p, in drei lineare Factoren zerlegt werden kann (vgl. unten § 6, 14), von denen je einer, jenachdem p zwischen $-\infty$ und 0 oder 0 und e oder e und $+\infty$ liegt, der *Focaleigenschaft des Paraboloides* entspricht (vgl. unten § 7, 16 und 17). Die weitere Ausführung dieser vorläufigen Mittheilung behalte ich einer späteren Gelegenheit vor.

§ 2.

Begriff der gebrochenen Focaldistanzen.

In der xy-Ebene eines gewöhnlichen räumlichen Coordinatensystems $Oxyz$ sei die Parabel (»Focalparabel«):

(2) $$y^2+2ex-e^2=0 \quad (e>0)$$

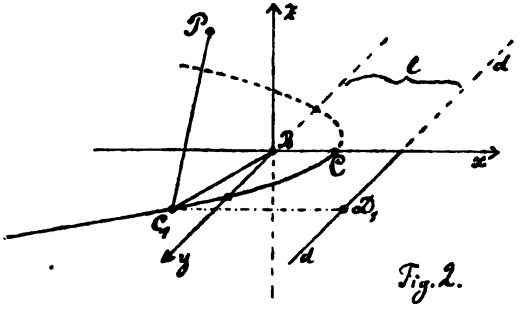


Fig. 2.

gegeben. Ihr Brennpunkt B liegt im Coordinatenanfang O, ihr Scheitelpunkt C hat die x-Coordinate $x=\frac{e}{2}$ und ihre Directrix dd die Gleichung $x=e$.

1) Vgl. die entsprechende Bemerkung über die Ellipse und Hyperbel in den Vorlesungen über Geometrie von Alfred Clebsch, hrsg. von Lindemann, I. Bd., Leipzig 1876, S. 6.

Wir verbinden (vgl. Fig. 2) einen beliebigen festen Punkt $P = x, y, z$ des Raumes, der nicht gerade auf der Focalparabel liegt, geradlinig mit deren laufendem Punkte $C_1 = x_1, y_1, 0$ und diesen wieder geradlinig mit dem Brennpunkte B.

Indem wir die Länge r der so entstandenen gebrochenen Linie

$$r = PC_1 + C_1B, \tag{3}$$

die Summe der absoluten Längen der Strecken PC_1 und C_1B, als Function des »Knickpunktes« C_1 betrachten, suchen wir ihr Minimum. Dass es wenigstens ein solches Minimum giebt, schliessen wir daraus, dass die Länge r, während sich C_1 auf der Focalparabel bewegt, niemals verschwinden, wohl aber beliebig gross werden kann. Dass es nur ein Minimum giebt, wird sich im Verlaufe unserer Betrachtung herausstellen. *Wir bezeichnen das Minimum von* r *mit* r_1.

Indem wir in gleicher Weise *die Differenz* r' *der absoluten Längen der Strecken* C_1B und PC_1

$$r' = -PC_1 + C_1B \tag{4}$$

als Function des »Knickpunktes« C_1 ansehen, fragen wir nach deren Maximum und Minimum. Dass es wenigstens ein Maximum und ein Minimum giebt, schliessen wir daraus, dass der positive oder negative Werth der Differenz r', während sich C_1 auf der Focalparabel bewegt, immer endlich bleibt. Dass es für allgemeine Lagen von P nur ein Maximum und ein Minimum giebt, wird unsere weitere Entwickelung beweisen. *Wir bezeichnen mit* r_2 *das Maximum und mit* r_3 *das Minimum von* r'. Nur für besondere Lagen von P hat r' einen von C_1 unabhängigen constanten Werth.

Die drei Grössen r_1, r_2, r_3 sollen kurz *die drei gebrochenen Focaldistanzen des Punktes P gegen die Focalparabel* heissen.

§ 3.

Darstellung der drei gebrochenen Focaldistanzen.

In Folge der Focaleigenschaft der Parabel (2), für deren Punkte C_1 stets $x_1 < e$ bleibt, ist die absolute Länge von C_1B gleich der absoluten Länge C_1D_1 des von C_1 auf die Directrix dd gefällten Perpendikels (vgl. Fig. 2), also:

$$C_1B = C_1D_1 = e - x_1.$$

Indem wir daher r als gemeinsame Bezeichnung für r und r' einführen, *stellt der Ausdruck:*

$$(5) \qquad r = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z^2}+e-x_1$$

mit unbestimmtem Vorzeichen der Quadratwurzel die eine und die andere der Grössen r und r' in (3) und (4) dar.

Dabei besteht zwischen x_1 und y_1 die Gleichung:

$$(6) \qquad y_1^2+2ex_1-e^2=0.$$

Um die Maxima und Minima der Function (5) mit Rücksicht auf die Bedingung (6) zu bestimmen, eliminiren wir x_1 und betrachten y_1 als unabhängige Veränderliche.

In dieser Auffassung ist:

$$(7) \qquad r=\varrho+\frac{e}{2}+\frac{y_1^2}{2e},$$

mit:

$$(8) \qquad \varrho^2=\frac{y_1^4}{4e^2}+\left(x+\frac{e}{2}\right)\frac{y_1^2}{e}-2yy_1+\left(x-\frac{e}{2}\right)^2+y^2+z^2,$$

und lautet die Bedingung für die Maxima und Minima der Function (7):

$$(9) \qquad \frac{\frac{y_1^3}{2e^2}+\left(x+\frac{e}{2}\right)\frac{y_1}{e}-y}{\varrho}+\frac{y_1}{e}=0.$$

Diese Gleichung ist, rational gemacht, in y_1 vom 3. Grade und würde, da x_1 nach (6) rational von y_1 abhängt, die Coordinaten x_1, y_1 der Knickpunkte C_1 der drei gebrochenen Focaldistanzen r_1, r_2, r_3 bestimmen. Nur unter den Bedingungen:

$$(2') \qquad y=0, \quad z^2-2ex=0$$

würden die sämmtlichen Coefficienten der Gleichung verschwinden und C_1 unbestimmt werden.

Ohne dieses Verfahren weiter zu verfolgen, wollen wir direct eine Gleichung für r_1, r_2, r_3 selbst aufstellen.

§ 4.

Die kubische Gleichung der drei gebrochenen Focaldistanzen.

Zu dem Ende stellen wir zunächst durch Elimination von ϱ aus (7) und (9) die Gleichung:

$$\frac{y_1^3}{2e^2}+\left(x+\frac{e}{2}\right)\frac{y_1}{e}-y+\left(r-\frac{e}{2}-\frac{y_1^2}{2e}\right)\frac{y_1}{e}=0$$

her, welche sich auf:

$$(x+r)\,y_1 - ey = 0 \tag{10}$$

zusammenzieht. Alsdann multipliciren wir die beiden, mit Rücksicht auf das doppelte Vorzeichen von ϱ in der Formel (7) enthaltenen Gleichungen:

$$r - \frac{e}{2} - \frac{y_1^2}{2e} - \varrho = 0, \quad r - \frac{e}{2} - \frac{y_1^2}{2e} + \varrho = 0$$

miteinander und erhalten unter Benutzung von (8):

$$\left(r - \frac{e}{2}\right)^2 - \left(r - \frac{e}{2}\right)\frac{y_1^2}{e} + \frac{y_1^4}{4e^2} = \frac{y_1^4}{4e^2} + \left(x + \frac{e}{2}\right)\frac{y_1^2}{e} - 2yy_1 + \left(x - \frac{e}{2}\right)^2 + y^2 + z^2$$

oder:

$$(x+r)\frac{y_1^2}{e} - 2yy_1 = \left(r - \frac{e}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{e}{2}\right)^2 - y^2 - z^2. \tag{11}$$

Setzen wir hier endlich den aus (10) folgenden Werth von y_1 ein, so gewinnen wir als Resultat der Elimination von y_1:

$$\left\{\left(r - \frac{e}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{e}{2}\right)^2 - y^2 - z^2\right\}(r+x) + ey^2 = 0.$$

Bei dieser Berechnung ist die specielle Möglichkeit: $r + x = 0$ ausser Acht gelassen, welche auf den bereits am Schlusse des § 3 bei (2′) erwähnten Ausnahmefall zurückführen würde, aber bei allgemeiner Lage des Punktes P nicht besteht.

Nach Potenzen von r geordnet, lautet die gefundene Gleichung:

$$r^3 + (x-e)\,r^2 - (x^2+y^2+z^2)\,r + e\,(x^2+y^2) - x\,(x^2+y^2+z^2) = 0. \tag{12}$$

Dieser in r kubischen Gleichung müssen die Maxima und Minima der Function (7), also *die drei gebrochenen Focaldistanzen r_1, r_2, r_3 genügen.*

Damit ist zugleich dargethan, dass ihre Gesammtzahl nicht grösser als drei sein kann. Dass aber die Wurzeln der Gleichung (12) alle drei reell sind, werden wir am Schluss von § 6 beweisen.

§ 5.

Unmittelbare Folgerungen aus der kubischen Gleichung der gebrochenen Focaldistanzen.

Die Coordinaten x_i, y_i des Knickpunktes C_i einer jeden der drei gebrochenen Focaldistanzen ergeben sich aus (10) und (6) rational durch die betreffende Wurzel r der Gleichung (12) dargestellt.

Mit Rücksicht auf den Coefficienten von r^2 folgt ferner aus (12):

Zwischen den drei gebrochenen Focaldistanzen und der x-Coordinate des Punktes P besteht stets die Relation:

$$r_1 + r_2 + r_3 - e + x = 0. \tag{13}$$

§ 6.

Die kubische Gleichung für die Summen je zweier gebrochener Focaldistanzen.

Die Summen: $x_2 + x_3$, $x_3 + x_1$, $x_1 + x_2$ je zweier der Wurzeln x_1, x_2, x_3 einer beliebigen kubischen Gleichung:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

genügen bekanntlich der kubischen Gleichung:

$$x^3 + 2px^2 + (p^2 + q)\,x + (pq - r) = 0.$$

Nach diesem Satze ergiebt sich aus der Gleichung (12) sofort:

Die Summen: $r_2 + r_3$, $r_3 + r_1$, $r_1 + r_2$ je zweier gebrochener Focaldistanzen sind die Wurzeln der in s kubischen Gleichung:

$$s^3 + 2(x - e)\,s^2 + (e^2 - 2ex - y^2 - z^2)\,s + ez^2 = 0,$$

die auch in der Form geschrieben werden kann:

$$-sy^2 - (s - e)\,z^2 + s\,(s - e)\,(2x + s - e) = 0.$$

Es besteht daher identisch in s die Gleichung:

$$-s\,(e - s)\left\{\frac{y^2}{e - s} + \frac{z^2}{-s} + 2x + s - e\right\}$$
$$= (s - r_2 - r_3)\,(s - r_3 - r_1)\,(s - r_1 - r_2)$$

oder, wenn wir $s = e - p$ setzen, die Gleichung:

$$(14) \qquad -p(p-e)\left\{\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{p-e}+2x-p\right\}$$
$$=(p-e+r_2+r_3)(p-e+r_3+r_1)(p-e+r_1+r_2),$$

wozu man die Gleichung § 1, (1) vergleiche.

Dass die Wurzeln der in p kubischen Gleichung:

$$(15) \qquad -p(p-e)\left\{\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{p-e}+2x-p\right\}=0,$$

welche bei festem e ein System confocaler Paraboloide mit dem Parameter p darstellt, alle drei reell sind und zwischen den Grenzen $-\infty$ und 0, 0 und e, e und $+\infty$ liegen, ist bekannt. Danach sind r_2+r_3, r_3+r_1, r_1+r_2 und damit *auch* r_1, r_2, r_3 *alle drei reell.*

§ 7.

Die Focaleigenschaften der Paraboloide.

In Folge der Identität (14) hat das Paraboloid (15) je nach der Grösse von p eine der drei Focaleigenschaften:

$$(16) \qquad \begin{cases} r_2+r_3-e+p=0 \\ r_3+r_1-e+p=0 \\ r_1+r_2-e+p=0. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf die Relation (13) können wir diese Eigenschaften auch in der folgenden Form ausdrücken:

$$(17) \qquad \begin{cases} r_1+x-p=0 \\ r_2+x-p=0 \\ r_3+x-p=0, \end{cases}$$

welche den in § 1, (1') erwähnten Focaleigenschaften der Parabel noch mehr analog sind.

§ 8.

Beziehung zur Theorie der parabolischen Coordinaten.

Schreiben wir in der Gleichung (15) für:

$$p, \qquad e, \qquad x$$

bezüglich

$$\beta-\tau, \quad \beta-\gamma, \quad x+\frac{\beta}{2},$$

so geht sie in die Gleichung:

$$(18)\quad -(\beta-\tau)(\gamma-\tau)\left\{\frac{y^2}{\beta-\tau}+\frac{z^2}{\gamma-\tau}+2x+\tau\right\}=0$$

über, deren Wurzeln $\tau=\lambda, \mu, \nu$ die parabolischen Coordinaten des laufenden Punktes x, y, z sind[1]). Es ergiebt sich daher, kurz ausgedrückt, das Resultat:

Die Definitionsgleichung der parabolischen Coordinaten ist die kubische Gleichung für die Summen je zweier gebrochener Focaldistanzen.

In diesem Sinne ist die Theorie der parabolischen Coordinaten und die der gebrochenen Focaldistanzen als vollkommen gleichwerthig zu betrachten, und kann behufs der Entscheidung darüber, welche von den drei Wurzeln der kubischen Gleichung (12) das oben in § 2 mit r_1 bezeichnete Minimum des Ausdruckes r in (3), welche das Maximum r_2 und welche das Minimum r_3 des Ausdruckes r' in (4) ist, auf die Untersuchungen meines eben citirten Buches verwiesen werden. Aus diesen ergiebt sich, dass, wenn die parabolischen Coordinaten λ, μ, ν den Ungleichungen:

$$-\infty<\lambda<\gamma<\mu<\beta<\nu<+\infty$$

entsprechend bezeichnet werden, die geometrisch unterschiedenen drei gebrochenen Focaldistanzen sich so darstellen:

$$(19)\quad \begin{cases} r_1=\frac{1}{2}(-\lambda+\mu+\nu-\gamma) \\ r_2=\frac{1}{2}(\ \lambda-\mu+\nu-\gamma) \\ r_3=\frac{1}{2}(\ \lambda+\mu-\nu-\gamma). \end{cases}$$

Von diesen ist r_1 (in meinem Buche r_0 genannt) als die kürzeste Entfernung der Punkte P und B (vgl. Fig. 2) über die Focalparabel (2) die stabile Gleichgewichtslage eines von P nach B gespannten und über die Focalparabel frei gleitenden Fadens. Aber auch die Focaldistanz r_3 in (19) kann, mit Benutzung der Dupin'schen Focaleigenschaften der beiden »conjugirten Focalparabeln« § 2, (2) und § 3, (2′) des Paraboloides, durch die kürzeste Entfernung s_0 des Punktes P vom Brennpunkte C der Parabel (2′) über diese hinweg vertreten werden. Es ist nämlich

$$r_3=\frac{\beta-\gamma}{2}-s_0.$$

1) Wie in meinem Buche: Die Focaleigenschaften der Flächen 2. Ordnung, Leipzig 1896, S. 149, 15.

Die stabilen Gleichgewichtsfiguren r_0 und s_0 eines Fadens gehen daher in die 1. und 3. Gleichung (17) und in die 2. Gleichung (16) ein, welche bei Einführung von r_0 und s_0 und λ, μ, ν lauten:

$$(20)\qquad \begin{cases} r_0 + x - \frac{\beta}{2} = -\lambda \\ r_0 - s_0 = \mu - \frac{\beta+\gamma}{2} \\ s_0 - x + \frac{\gamma}{2} = \nu . \end{cases}$$

In dieser Form habe ich die Focaleigenschaften der Paraboloide in meinem Buche angegeben (vgl. daselbst S. 153, Formeln (55) mit den Werthen von d und d' Z. 5 v. o. und mit $\lambda^0 = \gamma$, $\nu^0 = \beta$, $r = r_0$, $s = s_0$, und S. 158, Formel (58)).

Rostock, Februar 1897.

Sophus Lie, *Das Abel'sche Theorem und die Translationsmannigfaltigkeiten.*

In dieser Abhandlung stellen wir uns die Aufgabe, die vier Functionalgleichungen:

$$A_{k_1}(t_1) + A_{k_2}(t_2) + A_{k_3}(t_3) = \tilde{A}_{k_1}(\tau_1) + \tilde{A}_{k_2}(\tau_2) + \tilde{A}_{k_3}(\tau_3)$$
$$(k = 1, 2, 3, 4)$$

in allgemeinster Weise zu befriedigen. Dabei setzen wir voraus, dass die sechs Grössen:

$$t_1, t_2, t_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3$$

durch drei und nur durch drei Relationen gebunden sind, die sowohl nach den t wie nach den τ aufgelöst werden können.

Bezeichnen wir eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit des Raumes x_1, x_2, x_3, x_4 als eine Translations-M_3, wenn sie durch vier Gleichungen von der Form:

$$x_k = B_{k_1}(t_1) + B_{k_2}(t_2) + B_{k_3}(t_3)$$

dargestellt werden kann, so dürfen wir sagen, dass unser Problem darauf hinauskommt, im vierfachen Raume $x_1 \dots x_4$ alle dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten zu finden, die in zweifacher (oder mehrfacher) Weise als Translations-M_3 aufgefasst werden können.

In früheren Arbeiten [1]) kündigten wir an, dass alle Lösungen unseres Problems, die nicht nur auf lineare Relationen: $c_1 x_1 + \dots + c_4 x_4 + c = 0$ führen, durch eine gewisse *Deutung* bez. *Umkehrung* des *Abel'schen Theorems* gefunden werden können. Immerhin ist zu beachten, dass wir in diesen älteren Arbeiten die sich übrigens auf n-fach ausgedehnte Räume bezogen) aus-

1) Vgl. insbesondere eine im Jahre 1892 in den Comptes rendus veröffentlichte Note: »*Sur une interprétation nouvelle du théorème d'Abel*«, sowie eine noch ältere Abhandlung im Norwegischen Archiv, Bd. 7, 1882.

drücklich die beschränkende Voraussetzung einführten, dass die sechs Grössen t_i und τ_i durch keine Relation verknüpft sein dürften, die weniger als vier unter diesen Grössen enthielte.

In dieser Arbeit lassen wir diese Beschränkung fallen und geben die vollständige Lösung des oben aufgestellten Problems, das sich auf den vierfach ausgedehnten Raum bezieht. Ich behalte mir vor, später meine analogen Untersuchungen über Translationsgebilde des n-fachen Raumes in extenso zu veröffentlichen.

Hoffentlich wird es mir auch gelingen, meine Untersuchungen über Mannigfaltigkeiten, die in *mehrfacher* Weise durch Gleichungen von der Form:

$$x_k = A_k(t_1, t_2 \dots t_q) + B_k(t_{q+1} \dots t_m) + C_k(\dots) + \cdot\cdot$$

darstellbar sind, zum befriedigenden Abschluss zu bringen. Vorläufig möchte ich nur bemerken, dass bei diesen schwierigen Untersuchungen die allgemeine *Theorie der höheren complexen Zahlen* verwerthet werden kann.

Kapitel I.

Erledigung eines Hülfsproblems.

Eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit des n-fachen Raumes $z_1 z_2 \dots z_n$, die durch n Gleichungen von der Form:

$$z_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) \qquad (k = 1, 2 \dots n)$$

dargestellt wird, enthält zwei Schaaren congruenter und gleichgestellter Curven, die wir erhalten, wenn wir entweder dem Parameter t_1 oder aber dem Parameter t_2 constante Werthe: $t_1 = a_1$, bez. $t_2 = a_2$ ertheilen. Eine solche Mannigfaltigkeit bezeichnen wir als eine *Translations-M_2 des n-fachen Raumes*. Sie besitzt die charakteristische Eigenschaft, dass sie in zwei verschiedenen Weisen durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden kann.

Hierbei ist nun wohl zu beachten, dass eine M_2, die in *einer* Weise durch Translation einer Curve c_1 erzeugt werden kann, immer noch eine zweite derartige Erzeugung gestattet. Wird nämlich eine M_2 durch Translationsbewegung einer Curve c_1 beschrieben, so durchlaufen alle auf c_1 gelegenen Punkte Bahncurven c_2, die unter einander congruent und gleichgestellt sind;

diese M_2 lässt sich daher auch durch Translationsbewegung einer c_2 erzeugen.

Kann eine M_2 in mehreren, etwa in q Weisen durch Translation von Curven erzeugt werden, so ist q entweder eine gerade Zahl oder aber unendlich; denn die betreffenden Erzeugungen ordnen sich offenbar paarweise zusammen.

Wir wollen annehmen, dass eine vorgelegte M_2 durch Translation einer Curve c_1 erzeugt wird, und dass alle Punkte dieser Curve die congruenten Bahncurven c_2 durchlaufen; wir nehmen ferner an, dass dieselbe M_2 auch durch Translationsbewegung einer Curve $\varkappa_1$ beschrieben wird, und dass die entsprechenden Bahncurven $\varkappa_2$ heissen. Es ist dabei nicht ausgeschlossen, dass die Curve c_1 mit der Curve $\varkappa_1$ identisch ist, obgleich die Bahncurven c_2 von den Bahncurven $\varkappa_2$ verschieden sind. Liegt ein solcher Fall vor, so giebt es zwei verschiedene *infinitesimale* Translationen, die eine Curve der Schaar c_1 in eine benachbarte Curve derselben Schaar überführen. Dann aber gestattet c_1 eine infinitesimale Translation in sich, und ist somit eine Gerade. Die M_2 enthält dementsprechend ∞^1 parallele Geraden und kann naturgemäss als eine *cylindrische* Mannigfaltigkeit bezeichnet werden.

Wir formuliren dieses Resultat als Satz:

Satz I. *Kann eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit des n-fachen Raumes in zwei Weisen als Translations-M_2 aufgefasst werden, so ist sie entweder cylindrisch und kann dementsprechend in unendlich vielen Weisen durch Translation einer Curve erzeugt werden, oder aber sie enthält (mindestens) vier verschiedene Schaaren congruenter und gleichgestellter Curven.*

Wir richten jetzt unsere Aufmerksamkeit auf nicht-cylindrische M_2 des n-fachen Raumes, die in zwei (oder noch mehr) Weisen als Translations-M_2 aufgefasst werden können. Wie soeben, bezeichnen wir die vier auf dieser M_2 gelegenen Schaaren congruenter und gleichgestellter Curven mit c_1, c_2, $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$; dabei nehmen wir an, dass die beiden Curvenschaaren c_1, c_2 zu der einen Erzeugung, die beiden anderen Schaaren $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ zu der anderen Erzeugung gehören. Durch jeden Punkt allgemeiner Lage dieser M_2 geht eine Curve aus jeder Schaar; wir bezeichnen die zugehörigen Tangenten der Curven c_1 und c_2 mit t_1 und t_2, ferner die Tangenten der Curven $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ mit τ_1 und τ_2. Nach unseren Voraussetzungen sind diese vier Tangenten paar-

weise von einander verschieden, und daher giebt es in dem betreffenden Punkte unserer M_2 immer zwei ganz bestimmte Tangenten ω_1 und ω_2, die sowohl zu dem Geradenpaare t_1, t_2 wie zu dem Paare τ_1, τ_2 harmonische Lage haben.

In dieser Weise ordnen wir jedem Punkte unserer M_2 zwei Tangenten ω_1 und ω_2 zu. Sodann denken wir uns die beiden Curvenschaaren:

$$\Omega_1 = \text{Const.}, \quad \Omega_2 = \text{Const.}$$

bestimmt, deren Curven in jedem Punkte von einer Gerade ω_1 bez. ω_2 berührt werden. Es ist dann leicht zu sehen, dass die hiermit gefundenen Curvenschaaren: $\Omega_1 = \text{Const.}$ und $\Omega_2 = \text{Const.}$ gewisse charakteristische Eigenschaften besitzen. Projiciren wir in der That unsere M_2 durch Orthogonalprojection in irgend einen dreifachen Raum, so erhalten wir *immer* eine Fläche dieses Raumes, die in zweifacher Weise als Translationsfläche aufgefasst werden kann, und dabei sind *die Projectionen der Curven $\Omega_1 = Const.$ und $\Omega_2 = Const.$ immer die Hauptangentencurven dieser Fläche.*

Unsere M_2 dachten wir uns im n-dimensionalen Raume $z_1 z_2 \dots z_n$ gelegen, und dieser Raum möge im $(n+2)$-dimensionalen Raume $z_1 z_2 \dots z_n x_1, x_2$ enthalten sein. Alsdann kann unsere M_2 nach Ausführung einer passenden Bewegung des $(n+2)$-fachen Raumes durch n Gleichungen von der Form:

$$z_k = \varphi_k(x_1 x_2) \qquad (k = 1, 2 \dots n)$$

dargestellt werden.

Projiciren wir nun diese M_2 durch Orthogonalprojection in den dreifachen Raum z_k, x_1, x_2, so geht sie in die Fläche $z_k = \varphi_k(x_1 x_2)$ dieses Raumes über, und es sind die Projectionen der beiden Curvenschaaren: $\Omega_1 = \text{Const.}$, $\Omega_2 = \text{Const.}$ für *jedes* k die Integralcurven der Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z_k}{\partial x_1^2} dx_1^2 + 2 \frac{\partial^2 z_k}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 z_k}{\partial x_2^2} dx_2^2 = 0 .$$

Hieraus folgt nun, dass die beiden Gleichungen:

$$(2) \qquad \frac{\dfrac{\partial^2 z_k}{\partial x_1^2}}{\dfrac{\partial^2 z_i}{\partial x_1^2}} = \frac{\dfrac{\partial^2 z_k}{\partial x_1 \partial x_2}}{\dfrac{\partial^2 z_i}{\partial x_1 \partial x_2}} = \frac{\dfrac{\partial^2 z_k}{\partial x_2^2}}{\dfrac{\partial^2 z_i}{\partial x_2^2}}$$

immer bestehen, welche unter den Zahlen 1, 2 ... n auch k und i sein mögen.

Es sind daher $z_1, z_2, \ldots z_n$ gemeinsame particuläre Lösungen zweier linearer partieller Differentialgleichungen, die immer auf die Form:

$$3) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = \alpha(x_1 x_2)\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \beta(x_1 x_2)\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}$$

gebracht werden können. Und da die quadratische Gleichung (1) zwei verschiedene Wurzeln hat, so muss auch die äquivalente Gleichung:

$$\alpha dx_1^2 + 2\beta dx_1 dx_2 + dx_2^2 = 0$$

zwei verschiedene Wurzeln haben, was wieder heisst, dass die Grösse $\alpha - \beta^2$ nicht identisch verschwindet.

Nun aber finden wir durch Differentiation von (3) vier Gleichungen dritter Ordnung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 z}{\partial x_1^3} - \alpha\frac{\partial^3 z}{\partial x_1 \partial x_2^2} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \\
\frac{\partial^3 z}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \alpha\frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \\
\frac{\partial^3 z}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \beta\frac{\partial^3 z}{\partial x_1 \partial x_2^2} &= \frac{\partial \beta}{\partial x_1}\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \\
\frac{\partial^3 z}{\partial x_1 \partial x_2^2} - \beta\frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3} &= \frac{\partial \beta}{\partial x_2}\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2},
\end{aligned}$$

deren Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta \end{vmatrix} \equiv \beta^2 - \alpha$$

nicht identisch verschwindet. Hieraus können wir schliessen, dass die allgemeinste gemeinsame Lösung der beiden linearen partiellen Differentialgleichungen (3) von *vier* willkürlichen Constanten abhängt, und dass daher fünf beliebige particuläre Lösungen, z. B. $z_1, z_2, \ldots z_5$ immer durch eine lineare und homogene Relation:

$$k_1 z_1 + k_2 z_2 + \cdots + k_5 z_5 = 0 \quad (k_i = \text{Const.})$$

verbunden sind.

Also ist unsere M_2 immer in einer *sechsdimensionalen ebenen* Mannigfaltigkeit des Raumes: $x_1, x_2, z_1, z_2 \ldots z_n$ enthalten, und diese sechsdimensionale Ebene enthält überdies die ebene Mannigfaltigkeit:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0 \ldots z_n = 0 .$$

Nun aber liegt es in der Natur der Sache, dass die ebene Mannigfaltigkeit: $z_1 = 0, \ldots z_n = 0$ keine besondere Stellung einnimmt, und also dürfen wir schliessen, dass unsre M_2 in einem dreidimensionalen ebenen Raume enthalten ist.

Hiermit ist das folgende beachtenswerthe Theorem gefunden:

Theorem I. *Kann eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit des n-fachen Raumes in zwei oder noch mehr Weisen als Translations-M_2 aufgefasst werden, so ist sie entweder cylindrisch, d. h. von ∞^1 parallelen Geraden erzeugt, oder aber sie liegt in einem dreifachen ebenen Raume, und in diesem Raume ist sie dann eine Fläche, die in mehrfacher Weise als Translationsfläche aufgefasst werden kann.*

Hiermit ist die Bestimmung aller zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten, die in zweifacher Weise als Translations-M_2 aufgefasst werden können, geleistet.

Ich behalte mir vor, in späteren Publicationen diesen schönen Satz nach mehreren Richtungen zu verallgemeinern. (Vgl. Norw. Archiv 1882, Bd. 7, S. 176.)

Kapitel II.

Formulirung eines allgemeinen Problems.

Wie in früheren Arbeiten bezeichnen wir eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit des vierdimensionalen Raumes x_1, x_2, x_3, x_4 als eine Translations-Mannigfaltigkeit, präciser als eine Translations-M_3, wenn sie durch vier Gleichungen von der Form

$$x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

dargestellt werden kann. Die Grössen t_1, t_2 und t_3 sind Parameter, deren Elimination eine und nur eine Gleichung zwischen den x:

$$\Omega(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

liefert, und diese Gleichung giebt, dürfen wir sagen, die *Cartesische* Darstellung unsrer M_3.

Ertheilen wir den beiden Parametern t_2 und t_3 constante Werthe a_2 und a_3, fassen dagegen t_1 als einen veränderlichen Parameter auf, so bestimmen die hervorgehenden Gleichungen:

$$x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(a_2) + A_{k3}(a_3) \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

eine *eindimensionale* Mannigfaltigkeit, oder wie wir sagen wollen, eine *Curve*, die auf unsrer M_3 gelegen ist und mit dem Symbole c_{t_1, a_2, a_3} bezeichnet werden möge. Und da a_2 und a_3 beliebige Constanten darstellen können, so erhalten wir zweifach unendlich viele Curven c_{t_1, a_2, a_3}; alle diese Curven sind unter einander *congruent* und *gleichgestellt*. Wir drücken dies kürzer aus, indem wie sagen, dass *unsere M_3 durch Translationsbewegung einer Curve c_{t_1, a_2, a_3} erzeugt* werden kann.

Es leuchtet unmittelbar ein, dass *unsere M_3 in drei verschiedenen Weisen durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt wird*, und wir wählen

$$c_{t_1, a_2, a_3}; \quad c_{a_1, t_2, a_3}; \quad c_{a_1, a_2, t_3}$$

als Symbole dieser drei Curvenschaaren. Durch jeden Punkt der M_3 geht eine (und im Allgemeinen nur eine) Curve aus jeder Schaar.

Unsere M_3 kann aber noch in anderer Weise in congruente und gleichgestellte Mannigfaltigkeiten zerlegt werden. Ertheilen wir nämlich *einem einzelnen* unter den drei Parametern t_k etwa t_3 einen constanten Werth a_3, so bestimmen die hervorgehenden Gleichungen:

$$x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(a_3)$$

für jeden Werth der Grösse a_3 eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit:

$$m_{t_1, t_2, a_3},$$

und die hiermit definirten ∞^1 zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten m_{t_1, t_2, a_3} sind unter einander congruent und gleichgestellt. Aehnliche Zerlegungen unserer M_3 erhalten wir, wenn wir dem Parameter t_1 (oder aber dem Parameter t_2) nach und nach verschiedene constante Werthe ertheilen. Wir finden also

drei Mannigfaltigkeitsschaaren, deren jede aus ∞^1 congruenten und gleichgestellten zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten besteht; diese Mannigfaltigkeiten, die sämmtlich auf unserer M_3 liegen, bezeichnen wir mit den Symbolen:

$$m_{a_1, t_2, t_3}; \quad m_{t_1, a_2, t_3}; \quad m_{t_1, t_2, a_3};$$

durch jeden Punkt der M_3 geht eine Mannigfaltigkeit aus jeder Schaar.

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen, indem wir sagen, *dass unsre M_3 in drei Weisen durch Translationsbewegung einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit erzeugt werden kann.*

Ertheilen wir in den Gleichungen:

$$x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(a_3) \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

einer solchen zweidimensionalen Mannigfaltigkeit m_{t_1, t_2, a_3} dem einen Parameter, etwa t_2, nach und nach verschiedene feste Werthe a_2, so sehen wir, dass diese Mannigfaltigkeit einfach unendlich viele congruente und gleichgestellte Curven c_{t_1, a_2, a_3} enthält; sie enthält aber offenbar auch ∞^1 congruente und gleichgestellte Curven c_{a_1, t_2, a_3}.

Um die Sprache zu erleichtern, werden wir von jetzt ab die Curven der Schaar c_{t_1, a_2, a_3} kurz mit c_1 und dementsprechend die Curven der Schaaren c_{a_1, t_2, a_3} und c_{a_1, a_2, t_3} mit c_2 bez. c_3 bezeichnen. Wir bezeichnen andererseits die Mannigfaltigkeiten m_{t_1, t_2, a_3} mit m_3 und dementsprechend die Mannigfaltigkeiten m_{t_1, a_2, t_3} und m_{a_1, t_2, t_3} mit m_2 bez. m_1. Jede auf unserer M_3 gelegene m_1 enthält ∞^1 Curven c_2, sowie ∞^1 Curven c_3. Ist überhaupt i, k, j *eine beliebige Permutation der Zahlen* 1, 2, 3, *so enthält jede m_i einfach unendlich viele Curven c_k und ebenfalls ∞^1 Curven c_j.*

Führt man in die Gleichungen:

$$x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) \qquad (k = 1, 2, 3)$$

statt der Parameter t_k neue Parameter τ_1, τ_2, τ_3 durch die Substitution:

$$t_i = \varphi_i(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ein, so werden die neuen Gleichungen:

$$x_k = B_k(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

im Allgemeinen nicht die Form:

$$(2) \qquad x_k = \mathsf{A}_{k1}(\tau_1) + \mathsf{A}_{k2}(\tau_2) + \mathsf{A}_{k3}(\tau_3) \qquad (k = 1 \ldots 4)$$

besitzen. Ausnahmsweise kann dies doch eintreten, und *wir stellen uns in dieser Abhandlung grade die Aufgabe, alle Translations-M_3 zu finden, deren Gleichungen in mehreren Weisen auf die Form:*

$$(1) \qquad x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

gebracht werden können. Dabei setzen wir von vornherein ausdrücklich voraus, dass der Uebergang von einer bestimmten Darstellung (1) einer M_3 zu einer anderen derartigen Darstellung:

$$x_k = \mathsf{A}_{k1}(\tau_1) + \mathsf{A}_{k2}(\tau_2) + \mathsf{A}_{k3}(\tau_3) \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

derselben M_3 nicht durch drei Gleichungen: $t_i = \varphi_i(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ vermittelt wird, deren jede nur *eine* Grösse τ enthält.

Die eben vorgetragene Fassung unseres allgemeinen Problems müssen wir als eine *analytisch-synthetische* bezeichnen. Unter Umständen kann aber eine rein analytische Fassung vortheilhafter sein, und wir heben daher ausdrücklich hervor, dass unser Problem auch in der folgenden Weise formulirt werden kann:

Wie findet man alle Lösungen der vier Functionalgleichungen:

$$A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) = \mathsf{A}_{k1}(\tau_1) + \mathsf{A}_{k2}(\tau_2) + \mathsf{A}_{k3}(\tau_3)$$
$$(k = 1, 2, 3, 4)$$

zwischen den vierundzwanzig Functionen:

$$A_{ki}(t_i), \quad \mathsf{A}_{kj}(\tau_j), \qquad (k = 1 \ldots 4;\ i, j = 1, 2, 3),$$

deren jede nur von einem Argumente abhängt. Es wird vorausgesetzt, erstens dass die sechs Argumente $t_1, t_2, t_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ durch drei und nur durch drei Relationen verknüpft sind, zweitens dass diese Relationen sowohl nach t_1, t_2, t_3 wie nach *τ_1, τ_2, τ_3 auflösbar sind, drittens dass nicht jedes t_k nur von einem τ_i abhängt.*

Dass wir den Fall, dass jedes t_k nur von einem τ_i abhängt, von vorneherein ausschliessen, beruht darauf, dass unser Problem in diesem Falle keine Schwierigkeit und auch kein Interesse darbietet. Setzten wir nämlich zum Beispiel:

$$t_k = \varphi_k(\tau_k), \qquad (k = 1, 2, 3),$$

so erhielten wir, welche auch die Functionen $\varphi_i(\tau_j)$, sowie die Functionen $A_{ki}(t_i)$ wären, immer eine Lösung, und zwar in der Regel die allgemeinste zugehörige Lösung unseres Problems, indem wir den $\mathsf{A}_{ki}(\tau_i)$ die Formen:

$$\mathsf{A}_{ki}(\tau_i) \equiv A_{ki}(\varphi_i(\tau_i)) \qquad (k = 1 \ldots 4;\ \tau_i = 1, 2, 3)$$

ertheilten.

Wenn wir später unser allgemeines Problem ernstlich in Angriff nehmen, werden wir sehen, dass noch weitere Lösungen als selbstverständlich oder jedenfalls relativ uninteressant abgetrennt werden können; so z. B. erhalten wir eine selbstverständliche und triviale Lösung, wenn wir den *achtzehn* Functionen:

$$A_{1i}(t_i),\ A_{2i}(t_i),\ A_{3i}(t_i),\ \mathsf{A}_{1i}(\tau_i),\ \mathsf{A}_{2i}(\tau_i),\ \mathsf{A}_{3i}(\tau_i)$$

arbiträre Formen ertheilen, — die nur der Beschränkung unterworfen sind, dass die drei Gleichungen:

$$A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) = \mathsf{A}_{k1}(\tau_1) + \mathsf{A}_{k2}(\tau_2) + \mathsf{A}_{k3}(\tau_3)$$
$$(k = 1, 2, 3)$$

sowohl nach den t wie nach den τ auflösbar sein sollen —, und sodann die A_{4i} und A_{4i} durch die beiden Gleichungen:

$$A_{4i}(t_i) = c_1 A_{1i}(t_i) + c_2 A_{2i}(t_i) + c_3 A_{3i}(t_i)$$
$$\mathsf{A}_{4j}(\tau_j) = c_1 \mathsf{A}_{1j}(\tau_j) + c_2 \mathsf{A}_{2j}(\tau_j) + c_3 \mathsf{A}_{3j}(\tau_j)$$

mit denselben constanten Coëfficienten c_1, c_2, c_3 bestimmen. In diesem Falle stellen die Gleichungen (1) eine *ebene* Mannigfaltigkeit dar; denn die durch Elimination der Parameter t_1, t_2, t_3 hervorgehende Gleichung:

$$x_4 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$$

ist in den x *linear*. Diese Betrachtungen zeigen, dass *jede* dreidimensionale Ebene des vierfachen Raumes in *unendlich vielen* Weisen durch vier Gleichungen von der Form:

$$x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) \quad (k = 1 \ldots 4)$$

dargestellt werden kann; sie zeigen überdies, wie man *alle derartigen* Darstellungen einer bestimmten dreidimensionalen Ebene findet.

Wir können und wollen daher in den folgenden Entwickelungen von den ebenen Translations-M_3 absehen.

Kapitel III.

Partielle Differentialgleichungen, deren Integralgebilde Translations-M_3 sind.

Wir werden jetzt gewisse partielle Differentialgleichungen ableiten, deren Integralgebilde Translations-M_3 des vierdimensionalen Raumes x_1, x_2, x_3, x_4 darstellen. Um uns der gewöhnlichen Formelsprache möglichst genau anzuschliessen, ersetzen wir x_4 durch z und betrachten dementsprechend x_1, x_2, x_3, z als *Cartesische* Punktcoordinaten des vierdimensionalen Raumes.

Wird nun eine M_3 durch eine Gleichung von der Form: $z = f(x_1 x_2 x_3)$ definirt, so ist es im Allgemeinen zweckmässig, für die partiellen Ableitungen von z nach den x abgekürzte Bezeichnungen einzuführen, und wir setzen daher, wie bei früheren Gelegenheiten:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} = r_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3);$$

später werden wir für die höheren Ableitungen ähnliche Abkürzungen einführen.

Bestimmen die vier Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} x_i = A_{i1}(t_1) + A_{i2}(t_2) + A_{i3}(t_3), & (i = 1, 2, 3) \\ z = C_1(t_1) + C_2(t_2) + C_3(t_3) \end{cases}$$

eine Translations-M_3 des Raumes z, x_1, x_2, x_3, so liefert jedes Werthsystem t_1, t_2, t_3 einen Punkt dieser Translations-M_3, und dementsprechend definirt jedes benachbarte Werthsystem $t_1 + dt_1$, $t_2 + dt_2$, $t_3 + dt_3$ einen benachbarten Punkt der M_3. Zu jedem Punkte t_1, t_2, t_3 gehören somit ∞^2 Fortschreitungsrichtungen, die auf der M_3 liegen, und als Bestimmungsstücke dieser ∞^2 Richtungen $dx_1 : dx_2 : dx_3 : dz$ können wir die Verhältnisse $dt_1 : dt_2 : dt_3$ anwenden. Der Inbegriff dieser Fortschreitungsrichtungen bildet ein zweidimensionales *ebenes* Gebiet, das in den folgenden Untersuchungen eine wichtige Rolle spielen wird; die Differentiale dt_1, dt_2, dt_3 können wir gradezu als *homogene Coordinaten* der betreffenden Fortschreitungsrichtungen auffassen.

Der analytische Zusammenhang zwischen den Differentialen:

dz, dx_1, dx_2, dx_3 und den Ableitungen erster Ordnung p_1, p_2, p_3 wird durch die bekannte Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - p_3 dx_3 = 0$$

gegeben, die wir auf die Form:

$$\sum_1^3{}_k \left(\frac{\partial z}{\partial t_k} - p_1 \frac{\partial x_1}{\partial t_k} - p_2 \frac{\partial x_2}{\partial t_k} - p_3 \frac{\partial x_3}{\partial t_k}\right) dt_k = 0$$

oder auf die äquivalente Form:

$$\sum_1^3{}_k \left\{C_k'(t_k) - p_1 A_{1k}'(t_k) - p_2 A_{2k}'(t_k) - p_3 A_{3k}'(t_k)\right\} dt_k = 0$$

bringen können. Diese letzte Gleichung zerlegt sich, da die Differentiale dt_1, dt_2, dt_3 von einander unabhängig sind, in die drei Gleichungen:

$$C_k'(t_k) - p_1 A_{1k}'(t_k) - p_2 A_{2k}'(t_k) - p_3 A_{3k}'(t_k) = 0$$
$$(k = 1, 2, 3).$$

Aus diesen Relationen leiten wir neue ab, indem wir nach t_i differentiiren; setzen wir dabei voraus, dass die Indices i und k von einander verschieden sind, so erhalten wir die drei Gleichungen:

$$0 = \frac{\partial p_1}{\partial t_i} A_{1k}'(t_k) + \frac{\partial p_2}{\partial t_i} A_{2k}'(t_k) + \frac{\partial p_3}{\partial t_i} A_{3k}'(t_k),$$

die durch Substitution der Werthe:

$$\frac{\partial p_j}{\partial t_i} = r_{j1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + r_{j2} \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + r_{j3} \frac{\partial x_3}{\partial t_i}$$
$$= r_{j1} A_{1i}'(t_i) + r_{j2} A_{2i}'(t_i) + r_{j3} A_{3i}'(t_i)$$

die Gestalt:

$$(3)\quad \begin{cases} 0 = r_{11} A_{1i}'(t_i) \cdot A_{1k}'(t_k) + r_{22} A_{2i}'(t_i) \cdot A_{2k}'(t_k) + r_{33} A_{3i}'(t_i) A_{3k}'(t_k) \\ \quad + r_{12}(A_{1i}'(t_i) \cdot A_{2k}'(t_k) + A_{2i}'t_i \cdot A_{1k}'t_k) + r_{23}(A_{2i}' A_{3k}' + A_{3i}' A_{2k}') \\ \quad + r_{13}(A_{1i}' \cdot A_{3k}' + A_{3i}' \cdot A_{1k}') \\ \qquad\qquad (i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k) \end{cases}$$

annehmen. Denken wir uns hier die Parameter t_1, t_2 und t_3 als Functionen von p_1, p_2 und p_3 vermöge der Gleichungen:

$$C_k'(t_k) - p_1 A_{1k}'(t_k) - p_2 A_{2k}'(t_k) - p_3 A_{3k}'(t_k) = 0$$

ausgedrückt, so erhalten wir die angekündigten partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die wir jetzt deuten wollen. Wir werden sehen, dass sie zunächst aussagen, dass zwischen den drei früher besprochenen Curvenschaaren c_1, c_2 und c_3 charakteristische Beziehungen stattfinden.

Durch jeden Punkt einer M_3 gehen zweifach unendlich viele Geraden, die unsere M_3 berühren und als *Tangenten* bezeichnet werden. Unter diesen ∞^2 Tangenten, die sämmtlich in der dreidimensionalen Tangentialebene liegen, giebt es einfach unendlich viele, die unsere M_3 *osculiren* und dementsprechend als *Haupttangenten*[1]) bezeichnet werden können. Diese Haupttangenten, oder präciser gesagt die ∞^1 Fortschreitungsrichtungen längs einer Haupttangente werden durch die Gleichung:

$$0 = r_{11}dx_1^2 + r_{22}dx_2^2 + r_{33}dx_3^2 + 2r_{12}dx_1dx_2 + 2r_{23}dx_2dx_3 + 2r_{13}dx_1dx_3 \tag{2}$$

zusammen mit

$$0 = dz - p_1dx_1 - p_2dx_2 - p_3dx_3$$

bestimmt.

Diese Formeln zeigen, dass die ∞^1 durch einen Punkt einer M_3 gehenden Haupttangenten im Allgemeinen einen Kegel zweiten Grades bilden, der in der dreidimensionalen Tangentialebene enthalten ist. Die ∞^2 Tangenten im betreffenden Punkte bilden ja ein zweidimensionales *ebenes* Gebiet, und als homogene Coordinaten der einzelnen Tangenten können wir anstatt der drei Differentiale dt_1, dt_2, dt_3 ebensogut die drei Differentiale dx_1, dx_2, dx_3 anwenden; den Zusammenhang zwischen diesen beiden Coordinatensystemen liefern eben die linearen Gleichungen:

$$dx_k = A'_{k1}(t_1)\cdot dt_1 + A'_{k2}(t_2)\cdot dt_2 + A'_{k3}(t_3)\cdot dt_3 \quad (k = 1, 2, 3).$$

Es ergiebt sich daher, dass die obenstehende Gleichung (2) der Haupttangenten, die in den dx_k homogen und vom zweiten Grade ist, wirklich einen Kegel zweiten Grades darstellt.

---

1) Die Ausdehnung der Begriffe Haupttangente und Haupttangentencurve auf n Dimensionen deutete ich im Jahre 1872 in den Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania, S. 133, an.

Aus der projectiven Geometrie ist es nun bekannt, dass in dem zweidimensionalen ebenen Gebiete: $dx_1 : dx_2 : dx_3$ aller Tangenten einer M_2 in einem beliebigen Punkte die beiden Tangenten: $dx_1 : dx_2 : dx_3$ und $\delta x_1 : \delta x_2 : \delta x_3$ dann und nur dann hinsichtlich des Kegels der Haupttangenten:

$$0 = r_{11}dx_1^2 + r_{22}dx_2^2 + r_{33}dx_3^2 + 2r_{12}dx_1dx_2 + 2r_{13}dx_1dx_3 + 2r_{23}dx_2dx_3$$

conjugirt sind, wenn die Gleichung:

$$0 = r_{11}dx_1\delta x_1 + r_{22}dx_2\delta x_2 + r_{33}dx_3\delta x_3 + r_{12}(dx_1\delta x_2 + \delta x_1 dx_2) + r_{13}(dx_1\delta x_3 + \delta x_1 dx_3) + r_{23}(dx_2\delta x_3 + \delta x_2 dx_3)$$

besteht. Beachten wir andererseits, dass die früher besprochenen Curven c_1 der Translations-M_2 (1) durch Gleichungen von der Form:

$$x_k = A_{k1}(t_1) + \text{Const.}$$

definirt werden, und dass somit im Punkte t_1, t_2, t_3 die Tangentialrichtung der hindurchgehenden Curve c_1 durch die Gleichungen:

$$dx_k = A_{k1}'(t_1)dt_1, \quad dz = C_1'(t_1)dt_1$$

bestimmt wird, so sehen wir, dass die früher gefundenen Differentialgleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} 0 = r_{11}A_{1i}'A_{1k}' + r_{22}A_{2i}'A_{2k}' + r_{33}A_{3i}'A_{3k}' + r_{12}(A_{1i}'A_{2k}' \\ + A_{2i}'A_{1k}') + r_{13}(A_{1i}'A_{3k}' + A_{3i}'A_{1k}') + r_{23}(A_{2i}'A_{3k}' + A_{3i}'A_{2k}'), \end{cases}$$

die jede Translations-M_2 (1) befriedigt, direct aussagen, dass in jedem Punkte einer solchen M_2 die Tangenten der drei hindurchgehenden Curven c_1, c_2, c_3 paarweise hinsichtlich des Kegels der ∞^1 Haupttangenten in diesem Punkte conjugirt sind.

Wir fassen die hiermit gefundenen Ergebnisse zu einem Theorem zusammen.

Theorem 2. *Ertheilt man in den Gleichungen:*

$$(4)\quad \begin{cases} x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3), \quad (k = 1, 2, 3) \\ z = C_1(t_1) + C_2(t_2) + C_3(t_3) \end{cases}$$

einer Translations-M_2 den beiden Parametern t_2 und t_3 constante Werthe, so bestimmen die hervorgehenden Gleichungen ∞^2 auf der M_2 gelegene Curven c_1, die unter einander congruent und gleichgestellt sind. Eine

Translations-M_3 enthält drei solche Curvenschaaren: c_1, c_2 und c_3, deren jede aus ∞^2 congruenten und gleichgestellten Curven besteht. Durch jeden Punkt allgemeiner Lage der M_3 geht eine Curve aus jeder Schaar, und die Tangenten dieser drei Curven im betreffenden Punkte sind paarweise zu dem Kegel der Haupttangenten conjugirt. Diese Beziehungen finden ihren analytischen Ausdruck in den Differentialgleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} 0 = r_{11}A'_{i1}A'_{ik} + r_{22}A'_{2i}A'_{2k} + r_{33}A'_{3i}A'_{3k} + r_{12}(A'_{i1}A'_{2k} + A'_{2i}A'_{ik}) \\ \qquad + r_{13}(A'_{i}\cdot A'_{3k} + A'_{3i}A'_{ik}) + r_{23}(A'_{2i}A'_{3k} + A'_{3i}A'_{2k}) \\ \qquad\qquad (i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k) \end{cases}$$

und diese Gleichungen verwandeln sich in drei lineare partielle Differentialgleichungen, die z als Function von x_1, x_2, x_3 definiren, sobald jedes t_k durch Auflösung der Gleichung:

$$C_k(t_k) - p_1 A'_{1k}(t_k) - p_2 A'_{2k}(t_k) - p_3 A'_{3k}(t_k) = 0$$

als Function von p_1, p_2, p_3 ausgedrückt wird.

Jede Translations-M_3, deren Gleichungen in der Form

$$(4)\quad \begin{aligned} x_k &= A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3), \quad (k = 1, 2, 3, 4) \\ z &= C_1(t_1) + C_2(t_2) + C_3(t_3) \end{aligned}$$

vorliegen, bestimmt somit drei lineare partielle Differentialgleichungen, in denen z als Function von x_1, x_2, x_3 auftritt. Unter den gemeinsamen Lösungen dieser drei partiellen Differentialgleichungen ist uns eine bekannt; richtiger gesagt, wir finden eine solche Lösung, wenn wir zwischen den Gleichungen (4) die Parameter t_1, t_2 und t_3 eliminiren und die hervorgehende Relation nach z auflösen. Es ist aber leicht zu sehen, dass unsere drei simultanen partiellen Differentialgleichungen (3) noch weitere gemeinsame Lösungen besitzen. Dies folgt schon daraus, dass diese drei Gleichungen in den r_{ik} linear und homogen sind, während die Coefficienten der r_{ik} nur von p_1, p_2, p_3 abhängen; ist in der That $z = f(x_1, x_2, x_3)$ eine Lösung einer oder mehrerer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\sum_{i,k}^{1,2,3} \varphi_{ik}(p_1, p_2, p_3) r_{ik} = 0,$$

die in den r_{ik} (linear und) homogen sind, während die Coefficienten φ_{ik} nur von p_1, p_2, p_3 abhängen, so liefert die Gleichung:

$$z = m \cdot f(x_1 + n_1,\ x_2 + n_2,\ x_3 + n_3) + k$$

immer eine allgemeinere Lösung mit *fünf* willkürlichen Constanten.

In der Sprache der Mannigfaltigkeitslehre drücken wir dieses Ergebniss in der folgenden Weise aus:

Die drei linearen partiellen Differentialgleichungen (3), *die wir aus den Gleichungen* (1) *einer vorgelegten Translations-M_3 ableiteten, werden nicht allein von dieser M_3, sondern zugleich von allen ähnlichen und gleichgestellten M_3, die offenbar selbst Translations-M_3 sind, befriedigt.*

Unsere drei linearen partiellen Differentialgleichungen (3) besitzen aber noch weitere gemeinsame Lösungen. Das werden wir jetzt nachweisen und gleichzeitig alle diese gemeinsamen Lösungen bestimmen. Wir werden finden, dass sie von drei arbiträren Functionen abhängen und dass sie lauter Translations-M_3 darstellen. Um dies zu beweisen, erscheint es zweckmässig, zunächst einige begriffliche Betrachtungen vorauszuschicken.

Auf der Translations M_3:

$$(1)\quad \begin{cases} x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3), & (k = 1, 2, 3) \\ z = C_1(t_1) + C_2(t_2) + C_3(t_3) \end{cases}$$

nehmen wir eine Curve der Schaar c_1, die etwa durch die Gleichungen: $t_2 = a_2$, $t_3 = a_3$ definirt wird. In jedem Punkte dieser Curve ziehen wir die Tangente, deren Richtung durch die drei Gleichungen:

$$(4)\qquad \frac{dx_k}{dz} = \frac{A_{k1}'(t_1)}{C_1'(t_1)}$$

bestimmt wird. Der Inbegriff dieser ∞^1 Tangenten bildet eine zweidimensionale *developpable* Mannigfaltigkeit d_1, und wir werden unsere Aufmerksamkeit auf die *unendlich fernen* Punkte dieser Mannigfaltigkeit d_1 richten.

Indem wir die Begriffe der projectiven Geometrie auf den vierdimensionalen Raum ausgedehnt voraussetzen, können wir sagen, dass der Raum z, x_1, x_2, x_3 *dreifach unendlich viele unendlich ferne Punkte* besitzt, die ihrerseits einen dreidimensio-

nalen *ebenen Raum* U_3 bilden. Wir benutzen dx_1, dx_2, dx_3, dz als homogene Punktcoordinaten im U_3; dies ist gestattet, indem die Differentiale dx_1, dx_2, dx_3, dz eine Fortschreitung im vierdimensionalen Raume bestimmen, während andererseits parallele Geraden des vierfachen Raumes ihren unendlich fernen Punkt gemein haben.

Wenn wir die hier vorgetragene Auffassung und Terminologie zu Grunde legen, können wir sagen, dass die drei Gleichungen:

$$(4) \qquad dx_1 : dx_2 : dx_3 : dz = A'_{11}(t_1) : A'_{21}(t_1) : A'_{31}(t_1) : C'_1(t_1)$$

einen unendlich fernen Punkt bestimmen, nämlich den unendlich fernen Punkt auf der Tangente, die wir an die Curve c_1 im Punkte t_1 gezogen haben. Eliminiren wir t_1 zwischen diesen drei Gleichungen, so finden wir zwei homogene Gleichungen:

$$f_1\left(\frac{dx_1}{dz}, \frac{dx_2}{dz}, \frac{dx_3}{dz}\right) = 0\,, \quad \varphi_1\left(\frac{dx_1}{dz}, \frac{dx_2}{dz}, \frac{dx_3}{dz}\right) = 0\,,$$

die eine unendlich ferne Curve in U_3 bestimmen. Diese unendlich ferne Curve, die wir K_1 nennen, ist offenbar die Schnittcurve der oben betrachteten Developpablen d_1 mit der unendlich fernen Mannigfaltigkeit U_3.

Es leuchtet nun ein, dass diese Curve K_1, die in den folgenden Entwickelungen eine wichtige Rolle spielen wird, immer dieselbe bleibt, welche Curve der Schaar c_1 wir auch wählen. Dies ist analytisch evident; es ist aber auch begrifflich klar; denn wenn auf eine Curve c_1 und auf die Developpable d_1, die von allen Tangenten dieser Curve erzeugt wird, irgend eine Translationsbewegung ausgeführt wird, so bleiben die unendlich fernen Punkte dieser Developpablen in Ruhe.

In entsprechender Weise erkennen wir, dass die Developpablen d_2 aller Curven c_2 die unendlich ferne Mannigfaltigkeit U_3 nach einer gemeinsamen Curve K_2 schneiden, sowie dass die Developpablen d_3 aller Curven c_3 eine unendlich ferne Curve K_3 gemein haben.

Es ist jetzt nicht schwer zu sehen, dass die drei oben aufgestellten linearen partiellen Differentialgleichungen (3) aussagen, dass zwischen ihren Integral-M_3 und je zwei unter den unendlich fernen Curven K_1, K_2 und K_3 eine gewisse Beziehung stattfindet.

Aus den Gleichungen der Curve K_i:

$$\frac{dx_k}{dz} = \frac{A_{ki}'(t_i)}{C_i'(t_i)} \equiv \xi_{ki}(t_i) \qquad (k = 1, 2, 3)$$

können wir durch Elimination des Parameters t_i zwei Relationen: $f_i = 0$, $\varphi_i = 0$ herleiten, die in den Differentialen dx_1, dx_2, dx_3, dz homogen sind und sich somit durch Auflösung auf die Form:

$$(5) \qquad \xi_{2i} - \omega_{2i}(\xi_{1i}) = 0\,, \quad \xi_{3i} - \omega_{3i}(\xi_{1i}) = 0$$

bringen lassen. Von jetzt ab wollen wir diese beiden letzten Gleichungen als *analytische Definition der unendlich fernen Curve* K_i betrachten.

Tragen wir andererseits in eine unter den Gleichungen (3) statt der Grössen A_{ki}' die proportionalen Grössen ξ_{ki} ein, und ersetzen sodann in der neuen Gleichung:

$$(3') \quad \begin{cases} 0 = r_{11}\xi_{1i}\xi_{1k} + r_{22}\xi_{2i}\xi_{2k} + r_{33}\xi_{3i}\xi_{3k} + r_{12}(\xi_{1i}\xi_{2k} + \xi_{2i}\xi_{1k}) \\ \qquad + r_{13}(\xi_{1i}\xi_{3k} + \xi_{3i}\xi_{1k}) + r_{23}(\xi_{2i}\xi_{3k} + \xi_{3i}\xi_{2k}) \end{cases}$$

die $\xi_{j\nu}$ durch diejenigen Functionen von p_1, p_2, p_3, die sich durch Auflösung des Gleichungssystems:

$$1 - p_1\xi_{1\nu} - p_2\xi_{2\nu} - p_3\xi_{3\nu} = 0,\ \xi_{2\nu} = \omega_{2\nu}(\xi_{1\nu}),\ \xi_{3\nu} = \omega_{3\nu}(\xi_{1\nu})$$

ergeben, so übersehen wir unmittelbar, dass die Form der hiermit abgeleiteten linearen partiellen Differentialgleichung durch die Form der beiden Gleichungssysteme:

$$\xi_{2j} = \omega_{2j}(\xi_{1j}),\ \xi_{3j} = \omega_{3j}(\xi_{1j}) \qquad (j = i, k)$$

vollständig bestimmt ist.

Hieraus folgt, dass jede einzelne Differentialgleichung (3') wirklich nur aussagt, dass zwischen ihren Integral-M_2 und den beiden Curven K_i und K_k eine gewisse Beziehung stattfindet. Nichts ist leichter, als zu erkennen, worin diese Beziehung besteht. Die Gleichungen:

$$\frac{dx_1}{\xi_{1i}} = \frac{dx_2}{\xi_{2i}} = \frac{dx_3}{\xi_{3i}} = dz$$

bestimmen ja im Punkte x_1, x_2, x_3, z einer Integral-M_2 eine Tangente, die dadurch definirt ist, dass sie die unendlich ferne Curve K_i schneidet; und dementsprechend bestimmen die Gleichungen:

$$\frac{dx_1}{\xi_{1k}} = \frac{dx_2}{\xi_{2k}} = \frac{dx_3}{\xi_{3k}} = dz$$

diejenige Tangente im selben Punkte, deren unendlich ferner Punkt auf der Curve K_k gelegen ist. Eine Integral-M_3 der partiellen Differentialgleichung (3') ist daher dadurch charakterisirt, dass sie in jedem Punkte zwei hinsichtlich des Haupttangentenkegels conjugirte Tangenten besitzt, unter denen die eine die Curve K_i, die andere die Curve K_k schneidet.

Hiermit ist der folgende Satz gefunden:

Satz 1. *Bestimmt man in der Gleichung*:

$$(3') \quad \begin{cases} \xi_{1i}\xi_{1k}r_{11} + \xi_{2i}\xi_{2k}r_{22} + \xi_{3i}\xi_{3k}r_{33} + (\xi_{1i}\xi_{2k} + \xi_{2i}\xi_{1k})r_{12} \\ \quad + (\xi_{1i}\xi_{3k} + \xi_{3i}\xi_{1k})r_{13} + (\xi_{2i}\xi_{3k} + \xi_{3i}\xi_{2k})r_{23} = 0 \end{cases}$$

die Grössen ξ aus den Gleichungen:

$$1 - p_1\xi_{1j} - p_2\xi_{2j} - p_3\xi_{3j} = 0\,, \quad \xi_{2j} = \omega_{2j}(\xi_{1j});\ (\xi_{3j}) = \omega_{3j}(\xi_{1j}) \qquad (j = i,\ k)$$

als Functionen von p_1, p_2, p_3, so lassen sich die Integral-M_3 der hervorgehenden linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung dadurch charakterisiren, dass sie in jedem Punkte zwei hinsichtlich des Kegels der Haupttangenten conjugirte Tangenten besitzt, deren unendlich ferne Punkte auf zwei gegebenen Curven, nämlich auf den Curven:

$$\xi_{2j} - \omega_{2j}(\xi_{1j}) = 0\,, \quad \xi_{2j} - \omega_{3j}(\xi_{1j}) \qquad (j = i,\ k)$$

gelegen sind.

Sind die beiden Curven K_i und K_k gegeben, so ist die partielle Differentialgleichung (3') vollständig bestimmt. Sie hat eo ipso Integral-M_3 in unendlicher Anzahl. Diese M_3 (die wir gelegentlich bestimmen werden) lassen sich keineswegs immer durch Translationsbewegung *einer* Curve erzeugen. Wir werden sehen, dass die Sache anders steht, wenn wir die *gemeinsamen* Integral-M_3 von *drei* solchen Gleichungen suchen, die sich auf je zwei unter drei gegebenen unendlich fernen Curven K_1, K_2 und K_3 beziehen. Dann sind die gemeinsamen Integral-M_3, wie schon früher angekündigt, immer Translations-M_3. Vorläufig begnügen wir uns aber mit der Aufstellung des folgenden wichtigen Satzes, der unmittelbar als Corollar aus unseren früheren Entwickelungen hervorgeht:

Satz 2. *Ersetzt man in den drei Gleichungen:*

$$(3)\quad \begin{cases} \xi_{1i}\xi_{1k}r_{11} + \xi_{2i}\xi_{2k}r_{22} + \xi_{3i}\xi_{3k}r_{33} + r_{12}(\xi_{1i}\xi_{2k} + \xi_{2i}\xi_{1k}) \\ \quad + r_{13}(\xi_{1i}\xi_{3k} + \xi_{3i}\xi_{1k}) + r_{23}(\xi_{2i}\xi_{3k} + \xi_{3i}\xi_{2k}) = 0 \\ \qquad (i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k) \end{cases}$$

die Grössen $\xi_{\alpha\beta}$ durch diejenigen Functionen von p_1, p_2, p_3, die sich durch Auflösung der Gleichungen:

$$1 - p_1\xi_{1i} - p_2\xi_{2i} - p_3\xi_{3i} = 0,$$
$$\xi_{2i} - \omega_{2i}(\xi_{1i}) = 0,\quad \xi_{3i} - \omega_{3i}(\xi_{1i}) = 0$$

ergeben, so erhält man ein System von drei linearen partiellen Differentialgleichungen, die ein sogenanntes Involutionssystem bilden. Diese Gleichungen haben ∞^∞ viele gemeinsame Integral-M_3, die lauter Translations-M_3 darstellen. Bestimmen die Gleichungen:

$$x_1 = B_{1i}(\tau_i),\ x_2 = B_{2i}(\tau_i),\ x_3 = B_{3i}(\tau_i),\ z = C_i(\tau_i),$$

in denen i nach und nach die Zahlen 1, 2, 3 bezeichnet, jedesmal eine Curve, deren Tangenten die unendlich ferne Curve

$$(5)\qquad \xi_{2i} - \omega_{2i}(\xi_{1i}) = 0,\quad \xi_{3i} - \omega_{3i}(\xi_{1i}) = 0$$

treffen, so ist die Translations-M_3:

$$x_k = B_{k1}(\tau_1) + B_{k2}(\tau_2) + B_{k3}(\tau_3),\qquad (k = 1, 2, 3)$$
$$z = C_1(\tau_1) + C_2(\tau_2) + C_3(\tau_3)$$

immer eine gemeinsame Integral-M_3 der drei oben besprochenen partiellen Differentialgleichungen. Die drei auf dieser M_3 gelegenen Schaaren congruenter und gleichgestellter Curven besitzen die charakteristische Eigenschaft, dass die Tangenten jeder Curve dieser Schaaren eine unter den drei unendlich fernen Curven (5) treffen.

Bei der Fassung dieses Satzes haben wir schon angedeutet, wenn auch nicht ausdrücklich gesagt, dass *alle* gemeinsamen Integral-M_3 unserer drei partiellen Differentialgleichungen (3′) Translations-M_3 sind. Bewiesen ist das aber noch nicht; unsere Entwickelungen zeigen ja nur, dass ∞^∞ viele gemeinsame Integral-M_3 vorhanden sind, die Translations-M_3 darstellen; wir werden zeigen, dass keine weitere gemeinsame Integral-M_3 existiren.

Unter den gemeinsamen Integral-M_3 der drei partiellen Differentialgleichungen (3) greifen wir eine heraus, die keiner weiteren Beschränkung unterworfen sein soll als die, dass sie keine Developpable sein darf, anders ausgesprochen, wir nehmen an, dass die betreffende Integral-M_3 *dreifach* unendlich

viele dreidimensionale Tangentialebenen besitzt. Construiren wir nun in irgend einem Punkte p dieser M_3 die berührende dreidimensionale Ebene, so schneidet diese Ebene jede unter den drei unendlich fernen Curven K_i in einem Punkte, dem der Parameterwerth t_i zugeordnet ist. In dieser Weise ordnen wir jedem Punkte unserer Integral-M_3 drei Zahlen t_1, t_2, t_3 zu, *und diese drei Zahlen wollen wir als Punktcoordinaten auf der M_3 benutzen.* Ertheilen wir z. B. dem Parameter t_1 einen bestimmten Werth a_1, so scheiden wir auf unserer M_3 zweifach unendlich viele Punkte aus, die dadurch charakterisirt sind, dass die dreidimensionalen Tangentialebenen der M_3 in diesen Punkten sämmtlich die Curve K_1 in dem Punkte $t_1 = a_1$ schneiden. Auf unserer M_3 werden hiermit drei Schaaren zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten bestimmt, deren jede durch eine Gleichung von der Form $t_i = a_i$ definirt wird. Greifen wir nun z. B. auf der Mannigfaltigkeit: $t_1 = a_1$ drei unendlich benachbarte Punkte heraus und construiren in jedem die zugehörige dreidimensionale Tangentialebene, so schneiden diese drei Ebenen einander nach einer Geraden, die K_1 trifft. Unsere Deutung der Gleichungen (3) zeigt also, dass die Mannigfaltigkeit: $t_1 = a_1$ in jedem Punkte zwei Tangenten enthält, die K_2 bez. K_3 treffen. Hieraus folgt, dass zwei Gleichungen $t_i = a_i$, $t_k = a_k$ immer eine Curve definiren, deren Tangenten eine Curve K_j treffen, und dabei ist i, k, j jedesmal eine Permutation der Zahlen 1, 2, 3.

Die Coordinaten x_1, x_2, x_3 und z der Punkte unserer M_3 lassen sich als Functionen von t_1, t_2 und t_3 ausdrücken. Dementsprechend bestehen Gleichungen von der Form:

$$6 \qquad \begin{cases} dx_k = \alpha_{k1}(t_1 t_2 t_3)dt_1 + \alpha_{k2}(\ldots)dt_2 + \alpha_{k3}(\ldots)dt_3 \\ dz = \gamma_1(t_1 t_2 t_3)dt_1 \quad + \gamma_2(\ldots)dt_2 \quad + \gamma_3(\ldots)dt_3 . \end{cases}$$

Setzen wir hier $dt_2 = 0$, $dt_3 = 0$, so sollen die hervorgehenden Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{\alpha_{11}} = \frac{dx_2}{\alpha_{21}} = \frac{dx_3}{\alpha_{31}} = \frac{dz}{\gamma_1}$$

Curven bestimmen, deren Tangenten die Curve K_1 treffen. Daher erfüllen die Verhältnisse der Coefficienten α_{11}, α_{21}, α_{31} und γ_1 die Relationen:

$$\frac{\alpha_{11}}{\xi_{11}(t_1)} = \frac{\alpha_{21}}{\xi_{21}(t_1)} = \frac{\alpha_{31}}{\xi_{31}(t_1)} = \frac{\gamma_1}{1},$$

und dementsprechend können wir

$$\alpha_{11} = \varrho_1 \xi_{11}(t_1), \quad \alpha_{21} = \varrho_1 \xi_{21}(t_1), \quad \alpha_{31} = \varrho_1 \xi_{31}(t_1), \quad \gamma_1 = \varrho_1$$

setzen. Eine ganz analoge Betrachtung geben uns die allgemeinen Formeln:

$$\alpha_{ki} = \varrho_i \cdot \xi_{ki}(t_i), \quad \gamma_i = \varrho_i, \qquad (k = 1, 2, 3)$$

und also erhalten die totalen Differentialgleichungen (6) die Gestalt:

$$dx_k = \varrho_1 \xi_{k1}(t_1) dt_1 + \varrho_2 \xi_{k2}(t_2) dt_2 + \varrho_3 \xi_{k3}(t_3) dt_3 \quad (k = 1, 2, 3)$$
$$dz = \varrho_1 \, dt_1 + \varrho_2 \, dt_2 + \varrho_3 \, dt_3 .$$

Hier müssen die Integrabilitätsbedingungen:

$$\frac{\partial \{\varrho_i \xi_{ki}(t_i)\}}{\partial t_j} = \frac{\partial \{\varrho_j \cdot \xi_{kj}(t_j)\}}{\partial t_i}$$

$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial t_j} = \frac{\partial \varrho_j}{\partial t_i} \quad (k, i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j)$$

erfüllt sein. Diese Bedingungen lassen sich aber auf die Form

$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial t_j} \{\xi_{ki}(t_i) - \xi_{kj}(t_j)\} = 0, \quad \frac{\partial \varrho_i}{\partial t_j} = \frac{\partial \varrho_j}{\partial t_i}$$

bringen, und da die Differenzen

$$\xi_{ki}(t_i) - \xi_{kj}(t_j) \quad (i \neq j)$$

im Allgemeinen von Null verschieden sind, sehen wir, dass jedes ϱ_i nur von dem entsprechenden Parameter t_i abhängen darf.

Die Differentialgleichungen jeder einzelnen nicht developpablen, gemeinsamen Integral-M_2 der drei partiellen Differentialgleichungen (3') besitzen daher die Form:

$$dx_k = \varrho_1(t_1) \cdot \xi_{k1}(t_1) dt_1 + \varrho_2(t_2) \cdot \xi_{k2}(t_2) dt_2 + \varrho_3(t_3) \cdot \xi_{k3}(t_3) dt_3$$
$$dz = \varrho_1(t_1) \cdot dt_1 + \varrho_2(t_2) \cdot dt_2 + \varrho_3(t_3) \cdot dt_3$$

und die entsprechenden endlichen Gleichungen:

$$x_k = \sum_i^{1,2,3} \int \varrho_i(t_i) \cdot \xi_{ki}(t_i) dt_i, \qquad (k = 1, 2, 3)$$
$$z = \sum_i^{1,2,3} \int \varrho_i(t_i) \cdot dt_i$$

stellen offenbar, wie früher angekündigt, eine Translations-M_2 dar.

Hiermit ist es uns gelungen, das folgende beachtenswerthe Theorem zu beweisen:

Theorem 3. *Sind im vierdimensionalen Raume: z, x_1, x_2, x_3 drei unendlich ferne Curven durch die Gleichungen:*

$$\frac{dx_2}{dz} = \omega_{2i}\left(\frac{dx_1}{dz}\right), \quad \frac{dx_3}{dz} = \omega_{3i}\left(\frac{dx_1}{dz}\right) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

definirt, und schneidet jede dreidimensionale Tangentialebene einer nicht developpablen Mannigfaltigkeit: $z = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ jene unendlich ferne Curven in drei Punkten, die paarweise zu dem zugehörigen Haupttangentenkegel conjugirt sind, so kann diese Mannigfaltigkeit: $z - \varphi = 0$ immer durch Gleichungen von der Form:

$$x_k = \sum^{1,2,3}{}_i \int \varrho_i(t_i) \cdot \xi_{ki}(t_i) \cdot dt_i, \qquad (k = 1, 2, 3)$$

$$z = \sum^{1,2,3}{}_i \int \varrho_i(t_i) \cdot dt_i$$

dargestellt werden, und ist daher eine Translations-M_3. Die drei Grössen $\varrho_i(t_i)$ sind ganz beliebige Functionen ihres Argumentes; dagegen sind die Functionen $\xi_{ki}(t_i)$ durch die Relationen:

$$\xi_{2i} = \omega_{2i}(\xi_{1i}), \quad \xi_{3i} = \omega_{3i}(\xi_{1i}) \quad (i = 1, 2, 3)$$

gebunden. Sind die drei unendlich fernen Curven, oder was auf dasselbe hinauskommt, die sechs Functionen ω_{2i}, ω_{3i} gegeben, so lassen sich alle M_3, die zu diesen drei Curven in der betreffenden Beziehung stehen, als die gemeinsamen Integral-M_3 der drei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{c} \xi_{1i}\xi_{1k}r_{11} + \xi_{2i}\xi_{2k}r_{22} + \xi_{3i}\xi_{3k}r_{33} + (\xi_{1i}\xi_{2k} + \xi_{2i}\xi_{1k})r_{12} \\ + (\xi_{1i}\xi_{3k} + \xi_{3i}\xi_{1k})r_{13} + (\xi_{2i}\xi_{3k} + \xi_{3i}\xi_{2k})r_{23} = 0 \\ (i, k = 1, 2, 3) \end{array}\right.$$

definiren, wobei vorausgesetzt wird, dass für die ξ_{kr} diejenigen Functionen von p_1, p_2, p_3 gesetzt werden, die sich durch Auflösung der drei Gleichungen:

$$1 - p_1\xi_{1i} - p_2\xi_{2i} - p_3\xi_{3i} = 0, \quad \xi_{2i} = \omega_{2i}(\xi_{1i}), \quad \xi_{3i} = \omega_{1i}(\xi_{1i})$$

ergeben.

Auch die Entwickelungen dieses Kapitels können nach mehreren Richtungen wesentlich verallgemeinert werden.

Kapitel IV.

Ausscheidung der trivialen Lösungen unseres Problems.

Eine krumme Fläche des Raumes: x, y, z hat im Allgemeinen ∞^2 Tangentialebenen. Hat sie eine geringere Anzahl Tangentialebenen, so ist sie *developpabel*, d. h. sie ist von ∞^1 Ebenen umhüllt und von ∞^1 Geraden erzeugt, unter denen zwei consecutive sich immer schneiden. Eine Fläche: $z - f(xy) = 0$ ist dann und nur dann developpabel, wenn die partiellen Ableitungen erster Ordnung p und q durch eine Relation: $\Phi(pq) = 0$ gebunden sind, anders ausgesprochen, wenn $z \equiv f$ die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} \equiv rt - s^2$$

erfüllt. Sind p und q insbesondere durch eine *lineare* Relation mit *constanten* Coefficienten:

$$ap + bq + c = 0$$

verknüpft, so ist die Fläche cylindrisch; sie wird von ∞^1 parallelen Geraden erzeugt und von ∞^1 Ebenen umhüllt, die einen unendlich fernen Punkt gemein haben.

In einer früheren Arbeit (diese Berichte, 1896, S. 171) haben wir gezeigt, dass eine *Translationsfläche nur dann developpabel* sein kann, wenn sie eine Cylinderfläche oder aber eine Ebene ist; in beiden Fällen kann die betreffende Fläche in *unendlich vielen* Weisen durch Gleichungen von der Form:

$$x = A_1(t_1) + A_2(t_2),\ y = B_1(t_1) + B_2(t_2),\ z = C_1(t_1) + C_2(t_2)$$

dargestellt werden.

Wir wollen nun diese Betrachtungen auf den vierdimensionalen Raum ausdehnen.

Eine M_3 des Raumes z, x_1, x_2, x_3 hat in jedem Punkte eine dreidimensionale Tangentialebene, deren Gleichung:

$$Z - z - p_1(X_1 - x_1) - p_2(X_2 - x_2) - p_3(X_3 - x_3) = 0$$

wir auf die Form

$$Z - p_1 X_1 - p_2 X_2 - p_3 X_3 - (z - p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3) = 0$$

bringen können. Daher ist es gestattet die vier Grössen:

$$(1) \qquad p_1, p_2, p_3, z - p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3$$

als *Coordinaten der Tangentialebene* aufzufassen. Hat die M_3 *dreifach* unendlich viele verschiedene Tangentialebenen, so sind die Ebenencoordinaten (1) nur durch *eine* Relation gebunden, und diese Gleichung enthält immer die Grösse $z - p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3$; denn eine Gleichung von der Form:

$$\Omega(p_1, p_2, p_3)$$

definirt wohl ∞^3 Ebenen; diese Ebenen umhüllen aber keine M_3, sondern eine *unendlichferne*, im Allgemeinen zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

Erfüllt daher eine Mannigfaltigkeit: $z - f(x_1 x_2 x_3) = 0$ eine und nur eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung von der Form:

$$\Omega(p_1, p_2, p_3) = 0,$$

so besitzt sie nie dreifach unendlich viele, sondern nur zweifach unendlich viele Tangentialebenen; sie lässt sich dementsprechend als Umhüllungsgebilde von zweifach unendlich vielen Ebenen:

$$z - a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3 - b = 0$$

auffassen, deren Parameter durch zwei Relationen von der Form:

$$\Omega(a_1 a_2 a_3) = 0 \quad b - \Phi(a_1 a_2 a_3) = 0$$

gebunden sind. Bestimmt man aber nach den gewöhnlichen Regeln die Umhüllungsfigur dieser ∞^3 Ebenen, so sieht man, dass die hervorgehende M_3 zweifach unendlich viele *Gerade* enthält, und dass sie längs jeder Geraden von *derselben* Tangentialebene berührt wird.

Es ist leicht, alle diese M_3 als Integral-M_3 einer gewissen partiellen Differentialgleichung zu definiren. Differentiirt man nämlich die vorgelegte Gleichung: $\Omega(p_1, p_2, p_3) = 0$ nach den x, so erhält man durch Elimination die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(2) \qquad 0 = \sum \pm \frac{\partial p_1}{\partial x_1} \frac{\partial p_2}{\partial x_2} \frac{\partial p_3}{\partial x_3} \equiv \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} \equiv |r_{ik}|,$$

die somit von den besprochenen M_3 mit zweifach unendlich vielen Tangentialebenen erfüllt wird. Stellt man die Frage, ob diese partielle Differentialgleichung noch weitere Integral-M_3 besitzt, so ist die Antwort leicht zu geben. Die Theorie der Functionaldeterminanten zeigt ja, dass die Gleichung (2) in allgemeinster Weise befriedigt wird, wenn p_1, p_2, p_3 durch eine oder mehrere endliche Relationen verknüpft werden. Sind die p nur durch *eine* Relation gebunden, so erhält man die oben besprochenen M_3 mit zweifach unendlich vielen Tangentialebenen; sind sie dagegen durch *zwei* Relationen gebunden, so erhält man alle M_3, die nur ∞^1 Tangentialebenen besitzen. Erfüllen endlich die p *drei* unabhängige Relationen, so ist die M_3 *eben*.

Wir fassen alle Integral-M_3 der partiellen Differentialgleichung

$$|r_{ik}| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

unter der Bezeichnung developpable M_3 zusammen. Eine developpable M_3 hat im Allgemeinen ∞^2 verschiedene Tangentialebenen. Sie hat nur ∞^1 Tangentialebenen, wenn alle zweireihigen Determinanten der Matrix $|r_{ik}|$ verschwinden; sie ist eine Ebene, wenn alle r_{ik} gleich Null sind.

Wir wollen uns jetzt mit den Haupttangenten einer developpablen M_3 beschäftigen. Der Haupttangentenkegel einer M_3 im Punkte z, x_1, x_2, x_3 wird, wie wir schon früher bemerkten, durch die Gleichung:

$$0 = r_{11}dx_1^2 + r_{22}dx_2^2 + r_{33}dx_3^2 + 2r_{12}dx_1dx_2 + 2r_{13}dx_1dx_3 + 2r_{23}dx_2dx_3$$

bestimmt, die in dx_1, dx_2, dx_3 homogen und vom zweiten Grade ist. Daher bilden die durch einen Punkt gehenden Haupttangenten, die in der dreidimensionalen Tangentialebene unsrer M_3 gelegen sind, im Allgemeinen einen *irreduciblen Kegel zweiten Grades*. Dieser Kegel artet in ein Ebenenpaar aus, sobald die Determinante $|r_{ik}|$ gleich Null ist, während einige zweireihige Unterdeterminanten von Null verschieden sind. Ver-

schwinden ferner alle zweireihigen Unterdeterminanten, während die r_{ik} selbst nicht sämmtlich gleich Null sind, so artet der Kegel in eine doppeltzählende Ebene aus. Sind endlich alle r_{ik} gleich Null, so ist der Kegel der Haupttangenten unbestimmt und alle Tangenten im betreffenden Punkte sind Haupttangenten.

Verbinden wir diese Bemerkungen mit den vorhergehenden Entwickelungen, so erhalten wir den

Satz 1. *Die Haupttangenten einer Mannigfaltigkeit:*

$$z - f(x_1 x_2 x_3) = 0$$

in einem Punkte allgemeiner Lage bilden einen irreduciblen Kegel zweiten Grades, wenn die M_3 dreifach unendlich viele verschiedene Tangentialebenen besitzt. Auf einer developpablen M_3 mit ∞^2 verschiedenen Tangentialebenen besteht der Haupttangentenkegel aus zwei Ebenen, die nur in Punkten specieller Lage zusammenfallen können. Auf einer developpablen M_3 mit nur ∞^1 verschiedenen Tangentialebenen artet der Haupttangentenkegel in eine doppeltzählende Ebene aus. Die ebenen M_3 sind die einzigen M_3, deren sämmtliche Tangenten Haupttangenten sind.

Jetzt können wir alle developpablen Translations-M_3 bestimmen. Setzen wir zunächst voraus, dass die betreffende M_3 zweifach unendlich viele verschiedene Tangentialebenen besitzt. Wählen wir auf einer solchen M_3 einen Punkt allgemeiner Lage, so zerfällt, wie wir grade sahen, der Kegel der Haupttangenten in zwei Ebenen, die e und ε heissen mögen. Wir wissen andererseits, dass durch den gewählten Punkt eine Curve aus der Schaar c_1, eine Curve c_2 und eine Curve c_3 hindurchgehen, sowie dass die drei Tangenten dieser Curven paarweise zu dem Kegel der Haupttangenten, das heisst zu dem Ebenenpaar e, ε conjugirt sind. Hieraus schliessen wir, dass die Schnittlinie der Ebenen e und ε eine unter den drei besprochenen Curven: c_1, c_2 und c_3, z. B. die Curve c_1 berührt. Wenn aber der Kegel der Haupttangenten:

$$r_{11}dx_1^2 + r_{22}dx_2^2 + r_{33}dx_3^2 + 2r_{12}dx_1dx_2 + 2r_{13}dx_1dx_3 + 2r_{23}dx_2dx_3 = 0$$

in zwei Ebenen e und ε zerfällt, dann wird die Richtung der Schnittlinie dieser Ebenen nach den Regeln der projectiven Geometrie durch die Gleichungen:

$$r_{k1}\,dx_1 + r_{k2}\,dx_2 + r_{k3}\,dx_3 = 0 \quad (k = 1, 2, 3)$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch die unmittelbar integrablen Gleichungen:

$$dp_1 = 0\,, \quad dp_2 = 0\,, \quad dp_3 = 0$$

bestimmt. In dieser Weise ergiebt sich, dass die drei Ebenencoordinaten p_1, p_2, p_3, also auch die vierte Ebenencoordinate $z - p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3$ längs jeder c_1 constante Werthe haben, dass also unsere Translations-M_3 von jeder dreidimensionalen Tangentialebene längs einer c_1 berührt wird; die ∞^2 Curven c_1 sind somit Gerade und offenbar *parallele* Gerade, da jede c_1 durch eine Translationsbewegung in jede andere c_1 übergeführt werden kann.

Besitzt daher eine developpable Translations-M_3 zweifach unendlich viele dreidimensionale Tangentialebenen, so sind die ∞^1 Geraden, nach denen die Tangentialebenen diese M_3 berühren, unter einander parallel.

Bezeichnen wir jede M_3, die ∞^2 parallele Gerade enthält, als eine *cylindrische* M_3, so können wir unser Ergebniss auch folgendermassen aussprechen:

Satz 2. *Besitzt eine developpable Translations-M_3 zweifach unendlich viele dreidimensionale Tangentialebenen, so ist sie cylindrisch und wird dementsprechend von ∞^2 parallelen Geraden erzeugt.*

Die Gleichungen einer solchen M_3 können, wie man leicht einsieht, auf die Form:

$$\begin{aligned} x_k &= b_k t_1 + B_{k2}(t_2) + B_{k3}(t_3), \qquad (k = 1, 2, 3) \\ z &= c\,t_1 \;\; + C_2(t_2) \;\; + C_3(t_3) \end{aligned}$$

gebracht werden, wobei b_1, b_2, b_3 und c Constante, t_1 einen Parameter darstellen. Führt man hier die Grössen:

$$\mathfrak{x}_k = x_k - \frac{b_k}{c}\,z \qquad (k = 1, 2, 3)$$

mit z zusam[illegible]e Cartesische Coordinaten ein, so nehmen unse[illegible] Gestalt an:

$$[illegible] + B_{k3}(t_3)\,, \qquad (k = 1, 2, 3)$$
$$[illegible]\; C_3(t_3)\,,$$

es ergiebt sich somit, dass unsere M_3 durch eine einzige Gleichung von der Form:

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$$

dargestellt wird, und dass diese Gleichung eine Translationsfläche des dreidimensionalen Raumes ξ_1, ξ_2, ξ_3 definirt. Ist andererseits irgend eine Translationsfläche des dreidimensionalen Raumes ξ_1, ξ_2, ξ_3 vorgelegt, so leuchtet unmittelbar ein, dass sie sich als *cylindrische* Translations-M_3 des vierdimensionalen Raumes ξ_1, ξ_2, ξ_3, z auffassen lässt. Ja man kann sogar einen Schritt weiter gehen, und nachweisen, dass eine solche Mannigfaltigkeit in *unendlich vielen* Weisen als Translations-M_3 des vierdimensionalen Raumes aufgefasst werden kann. Sind nämlich

$$\xi_k = A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) \qquad (k = 1, 2, 3)$$

die Gleichungen einer beliebigen Translationsfläche des dreifachen Raumes ξ_1, ξ_2, ξ_3, so stellen die Gleichungen:

$$\xi_k = A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3), \qquad (k = 1, 2, 3)$$
$$z = C_1(t_1) + C_2(t_2) + C_3(t_3),$$

welche auch die Functionen C_1, C_2 und C_3 sein mögen, immer dieselbe cylindrische Translations-M_3 des Raumes $z\, \xi_1\, \xi_2\, \xi_3$ dar.

Hiermit haben wir den Satz:

Satz 3. *Besitzt eine Translations-M_3 des vierfachen Raumes ∞^2 und nur ∞^2 dreidimensionale Tangentialebenen, so kann sie in unendlich vielen Weisen als Translations-M_3 aufgefasst werden.*

Wir werden jetzt alle Translations-M_3 des Raumes x_1, x_2, x_3, z bestimmen, die nur *einfach* unendlich viele Tangentialebenen besitzen. Eine solche M_3 befriedigt die partielle Differentialgleichung:

$$| r_{ik} | = 0,$$

und noch mehr: sie befriedigt alle Gleichungen, die man erhält, wenn man alle zweireihigen Unterdeterminanten der $|r_{ik}|$ gleich Null setzt. *Eine solche M_3 berührt jede dreidimensionale Tangentialebene in ∞^2 Punkten, die jedesmal eine zweidimensionale Ebene E_2 bilden*, und offenbar enthält die M_3 ∞^1 solche Ebenen E_2.

Der Kegel der Haupttangenten zerfällt andererseits in eine doppeltzählende zweidimensionale Ebene e_2, die nach den Regeln der projectiven Geometrie durch eine beliebige unter den drei äquivalenten Gleichungen:

$$0 = r_{k1}\,dx_1 + r_{k2}\,dx_2 + r_{k3}\,dx_3 \equiv dp_k$$

dargestellt wird. Diese drei Gleichungen sind unmittelbar integrabel; sie zeigen, dass sich die dreidimensionale Tangentialebene unserer M_3 gar nicht ändert, wenn sich der Berührungspunkt nach der Richtung einer beliebigen Haupttangente verschiebt. *Jede Haupttangente ist somit in ihrer ganzen Ausdehnung in einer unter den ∞^1 zweidimensionalen Ebenen E_2 gelegen, nach denen die dreidimensionalen Tangentialebenen unsere M_3 berühren.*

Durch jeden Punkt der M_3 geht eine Curve aus der Schaar c_1, ferner eine Curve c_2, sowie eine Curve c_3. Die drei Tangenten dieser Curven sollen dabei ein Polartrieder hinsichtlich des Kegels der Haupttangenten bilden, und *da dieser Kegel in eine doppeltzählende Ebene e_2 ausartet, die mit einer unter den oben besprochenen E_2 identisch ist*, sehen wir, dass in jedem Punkte unserer Translations-M_3 die hindurchgehende ebene E_2 zwei unter den Curven c_1, c_2 und c_3 z. B. die beiden Curven c_1 und c_2 berührt. Hieraus folgt unmittelbar, dass jede E_2 einfach unendlich viele Curven c_1 und ebenso ∞^1 Curven c_2 enthält. Unsere M_3 wird somit durch Translationsbewegung einer E_2 erzeugt, und es sind alle ∞^1 E_2 unter einander *parallel*.

Unsere M_3 wird also von ∞^1 zweidimensionalen *ebenen* Mannigfaltigkeiten E_2 erzeugt, die unter einander parallel sind. Wird eine unter diesen E_2 durch die beiden linearen Gleichungen:

$$0 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + az + \alpha \equiv A,$$
$$0 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + bz + \beta \equiv B$$

bestimmt, so leuchtet unmittelbar ein, dass jede unter den ∞^1 dreidimensionalen Tangentialebenen unserer M_3 durch eine Gleichung von der Form:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + az + \alpha + \lambda(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + bz + \beta) + \mu = 0$$

dargestellt wird, und dass dabei die beiden Parameter λ und μ durch eine Relation:

$$\Phi(\lambda, \mu) = 0$$

gebunden sind.

Sind andererseits $A = 0$, $B = 0$ zwei ganz beliebige lineare Gleichungen in den Veränderlichen x_1, x_2, x_3, z, so ist:

$$A + \lambda B + \mu = 0$$

die analytische Darstellung eines Bündels von ∞^2 dreidimensionalen Ebenen, deren gemeinsame Gerade unendlich fern gelegen ist. Stellt man hier zwischen λ und μ eine ganz beliebige Relation: $\Phi(\lambda, \mu) = 0$ fest, so umhüllen die ∞^1 hiermit bestimmten dreidimensionalen Ebenen im Allgemeinen eine M_3. Diese M_3 ist, behaupten wir, immer eine developpable Translations-M_3, die nur ∞^1 Tangentialebenen besitzt.

Zum Beweis bemerken wir, dass die von uns construirte M_3 offenbar immer ∞^1 zweidimensionale und parallele Ebenen E_2 enthält, und dass sie somit sicher zwei von einander unabhängige infinitesimale Translationen gestattet. Es kann daher die Cartesische Gleichung dieser M_3 sicher bei passender Coordinatenwahl auf die Form:

$$\Phi(x_1, x_2) = 0$$

gebracht werden. Diese Gleichung lässt sich aber immer durch zwei Gleichungen

$$x_1 = B_1(t_1), \qquad x_2 = B_2(t_1)$$

ersetzen, die x_1 und x_2 als Functionen eines Parameters ausdrücken.

Es liefern daher die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= B_1(t_1), \qquad x_2 = B_2(t_1), \\ x_3 &= C_1(t_1) + C_2(t_2) + C_3(t_3), \\ z &= D_1(t_1) + D_2(t_2) + D_3(t_3), \end{aligned}$$

welche Form auch die Functionen $C_k(t_k)$ und $D_i(t_i)$ haben mögen, immer eine analytische Darstellung unserer M_3, die somit in unendlich vielen Weisen als Translations-M_3 aufgefasst werden kann.

Die hiermit erhaltenen Ergebnisse über developpable Translations-M_3 fassen wir zu dem folgenden Theorem zusammen:

Theorem 4. *Ist eine Translations-M_3 des Raumes x, x_1, x_2, x_3 developpabel, so kann sie immer auf unendlich viele Weisen als Translations-M_3 aufgefasst werden.*

Hat sie zweifach unendlich viele dreidimensionale Tangentialebenen, so enthält sie ∞^2 parallele Gerade; sie wird daher nach passender Coordinatenwahl durch eine Gleichung:

$$\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$$

in drei Veränderlichen dargestellt, und diese Gleichung definirt immer eine Translationsfläche des dreifachen Raumes ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Hat dagegen eine vorgelegte developpable Translations-M_3 nur einfach unendlich viele dreidimensionale Tangentialebenen, so kann sie nach einer passenden orthogonalen Transformation durch eine Gleichung:

$$W(\xi_1, \xi_2) = 0$$

dargestellt werden, die nur zwei Coordinaten enthält.

Die hier vorgetragenen Entwickelungen über developpable Translations-M_3 werden uns jetzt gestatten, nachzuweisen, dass mehrere Fälle, die sich bei der Erledigung unseres allgemeinen Problems darbieten, in dem Sinne trivial sind, dass sie nur auf *developpable* Translations-M_3 führen, die wir unmittelbar angeben können. *Mit den Entwickelungen dieses Kapitels ist es eben unsere Absicht, triviale Lösungen unseres Problems auszuscheiden.*

Wir wollen annehmen, dass eine M_3 sowohl durch die Gleichungen:

$$x_k = \sum_1^3{}_i A_{ki}(t_i), \qquad z = \sum_1^3{}_i C_i(t_i),$$

wie durch die Gleichungen

$$x_k = \sum_1^3{}_i A_{ki}(\tau_i), \qquad z = \sum_1^3{}_i \Gamma_i(\tau_i)$$

dargestellt werden kann und dass nicht jedes τ_i nur von einem t abhängt.

Es liegt in der Natur der Sache, dass zwischen den drei ersten Parametern t_1, t_2, t_3 und den drei letzten Parametern τ_1, τ_2, τ_3 drei Relationen bestehen, die sowohl nach den t, wie nach den τ auflösbar sind.

Wie früher bezeichnen wir die Curven: $t_i = a_i$, $t_k = a_k$ mit c_j, dabei vorausgesetzt, dass i, k, j eine beliebige Permutation der Zahlen 1, 2, 3 darstellt. Dementsprechend bezeichnen wir die Curven:

$$\tau_2 = b_2, \quad \tau_3 = b_3$$

mit $\varkappa_1$, die Curven:

$$\tau_3 = b_3, \quad \tau_1 = b_1$$

mit $\varkappa_3$, und endlich die Curven:

$$\tau_1 = b_1, \quad \tau_2 = b_2$$

mit $\varkappa_2$.

Auf unserer M_3 liegen somit sechs ausgezeichnete Curvenschaaren, nämlich die Curven: c_1, c_2, c_3, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$. Jede Schaar besteht aus ∞^2 congruenten und gleichgestellten Curven, und durch jeden nicht-singulären Punkt der M_3 geht eine Curve aus jeder Schaar. Ziehen wir nun in einem Punkte der M_3 die sechs hindurchgehenden Curven, so bilden die Tangenten der drei Curven c_1, c_2, c_3 nach einer früheren Bemerkung ein *Polartrieder* des Haupttangentenkegels; dementsprechend bilden auch die drei Tangenten der Curven $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$ ein Polartrieder desselben Kegels. *Die verschiedenen Fälle, die sich bei der Behandlung unseres Problems darbieten, lassen sich am besten durch die gegenseitige Lage dieser beiden Polartrieder charakterisiren.* Dass diese Polartrieder verschieden sind, ist sicher, denn sonst würde jeder Parameter τ_i nur von einem $t_\varkappa$ abhängen, und dieser triviale Fall wurde von vornherein ausgeschlossen.

Jedes unter den beiden Polartriedern hat drei Kanten und drei Ebenen. Es ist nun denkbar, dass diese Trieder eine allgemeine gegenseitige Lage haben, das heisst, dass keine Kante bez. Ebene) des einen Trieders mit einer Kante (bez. einer Ebene) des zweiten Trieders identisch ist, und dass andererseits keine Kante des einen Trieders in eine Ebene des zweiten Trieders hineinfällt. Die beiden Polartrieder können aber auch eine specielle gegenseitige Lage haben, indem Kanten (bez. Ebenen) des einen Trieders mit Kanten (bez. Ebenen) des zweiten Trieders zusammenfallen, oder aber eine Kante des einen Trieders in eine Ebene des zweiten hineinfällt. Wir werden der Reihe nach alle speciellen gegenseitigen Lagen der beiden Trieder betrachten, und die zugehörigen Translations-M_3 suchen. Indem

wir uns auf unsere Bestimmung derjenigen *Flächen* des *dreifachen* Raumes stützen, die in mehrfacher Weise als Translationsflächen aufgefasst werden können, gelingt es uns, ohne weiteres alle Translations-M_3 zu bestimmen, auf denen die beiden Polartriëder eine specielle gegenseitige Lage haben.

Sodann nehmen wir in den folgenden Kapiteln den allgemeinen Fall unseres Problems in Angriff, das heisst, wir setzen voraus, dass die beiden oben besprochenen Polartriëder eine allgemeine gegenseitige Lage haben. Es ist nicht schwer zu sehen, dass das ABEL'sche Theorem, angewandt auf die allgemeine Schnittcurve einer Fläche zweiten Grades mit einer Fläche dritten Grades uns Lösungen unseres Problems liefert, die dieser Hypothese entsprechen. Durch Betrachtungen und Rechnungen, die recht ausführlich sind, doch aber ein bedeutendes Interesse darbieten, gelingt es uns nachzuweisen, dass wir in dieser Weise *alle* fehlenden Lösungen unseres Problems erhalten. Dabei ist es allerdings nothwendig, ebensowohl die reduciblen, wie die irreduciblen Schnittcurven zwischen Flächen zweiten und dritten Grades zu berücksichtigen. Wir können das thun, denn bei seinem Beweise des ABEL'schen Theorems setzte der grosse Bahnbrecher keineswegs voraus, dass die betreffenden algebraischen Relationen irreducibel sind. Wir heben das hervor, da ABEL's Nachfolger sich wohl kaum mit dem ABEL'schen Theorem, angewandt auf reducible algebraische Relationen, näher beschäftigt haben.

Setzen wir zunächst voraus, dass die Kante $dt_2 = 0$, $dt_3 = 0$ mit der Kante $d\tau_2 = 0$, $d\tau_3 = 0$ zusammenfällt, während die vier anderen Kanten der beiden Polartriëder unter einander verschieden sind. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn τ_2 und τ_3 nur von t_2 und t_3 abhängen:

$$\tau_2 = \varphi_2(t_2 t_3), \qquad \tau_3 = \varphi_3(t_2 t_3),$$

während τ_1 selbstverständlich nicht von t_1 unabhängig sein kann. Dieser Fall lässt sich auch dadurch charakterisiren, dass für jeden Punkt der M_3 die hindurchgehende Curve c_1 mit der hindurchgehenden Curve x_1 identisch ist. Bei der Discussion dieses Falles können wir von den developpablen M_3 absehen; denn wir kennen ja alle developpablen Translations-M_3 und wissen

überdies, dass jede derartige M_3 in *unendlich vielen Weisen* als Translations-M_3 aufgefasst werden kann.

Wenn aber der Haupttangentenkegel irreducibel ist, und die Kante: $dt_2 = 0$, $dt_3 = 0$ des einen Polartriëders mit einer Kante: $d\tau_2 = 0$, $d\tau_3 = 0$ des zweiten Triëders zusammenfällt, so fallen auch die beiden entgegenstehenden Ebenen unserer Polartriëder, also die Ebenen: $dt_1 = 0$ und $d\tau_1 = 0$ zusammen; dann aber ist die Schaar der zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten $t_1 = \text{Const.}$ mit der Schaar der Mannigfaltigkeiten $\tau_1 = \text{Const.}$ identisch, und eine jede unter diesen ∞^1 Mannigfaltigkeiten enthält nicht allein ∞^1 Curven c_2 und ∞^1 Curven c_3, sondern auch ∞^1 Curven $\varkappa_2$ sowie ∞^1 Curven $\varkappa_3$. Unsere M_3 zerfällt somit in ∞^1 zweidimensionale M_2, die unter einander congruent und gleichgestellt sind, und dabei in *vier* verschiedenen Weisen durch Translation einer Curve erzeugt werden können. Nach den Entwickelungen des ersten Kapitels ist aber jede derartige M_2 in einem *ebenen* dreidimensionalen Raume enthalten; und wir finden daher die allgemeinste M_3 mit den verlangten Eigenschaften, wenn wir im dreifachen Raume: x_1, x_2, x_3, $z = 0$ irgend eine nicht developpable Fläche nehmen, die in zweifacher Weise als Translationsfläche aufgefasst werden kann und etwa die beiden Darstellungen:

$$x_k = A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{3}$$

und

$$x_k = \mathsf{A}_{k2}(\tau_2) + \mathsf{A}_{k3}(\tau_3) \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{4}$$

zulässt; betrachten wir diese Translationsfläche als eine Mannigfaltigkeit des vierfachen Raumes x_1, x_2, x_3, z — was wir dadurch zum Ausdruck bringen können, dass wir sowohl zu dem Gleichungssystem (3), wie zu dem Systeme (4) die Gleichung: $z = 0$ hinzufügen, — so können wir dieser M_2 dadurch ∞^1 verschiedene Lagen im vierfachen Raume ertheilen, dass wir auf sie nach und nach einfach unendlich viele Translationsbewegungen des vierfachen Raumes ausüben; die hiermit erhaltenen einfach unendlich vielen Mannigfaltigkeiten M_3 erzeugen eo ipso im vierfachen Raume eine M_3, die sowohl die Darstellung:

$$z = C_1(t_1),\ x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) \quad (k = 1, 2, 3)$$

wie die Darstellung:

$$z = C_1(\tau_1),\ x_k = A_{k1}(\tau_1) + A_{k2}(\tau_2) + A_{k3}(\tau_3) \quad (k = 1, 2, 3)$$

zulässt.

Die hiermit gefundene M_3 besitzt die verlangten Eigenschaften, und sie ist zugleich die allgemeinste M_3, die unsere speciellen Forderungen erfüllt. Es ist dabei wohl zu beachten, dass die vier Functionen $C_1(t_1)$, $A_{k1}(t_1)$ gar keiner Beschränkung unterworfen sind, während die zwölf Functionen A_{k2}, A_{k3}, A_{k2} und A_{k3} ABEL'sche Integrale sind, deren Classenzahl p gleich oder kleiner als drei ist.

Fallen die beiden Kanten $dt_1 = dt_2 = 0$ und $dt_1 = dt_3 = 0$ des einen Polartrieders mit den beiden Kanten $d\tau_1 = d\tau_2 = 0$ und $d\tau_1 = d\tau_3 = 0$ des zweiten Trieders zusammen, so besteht der Haupttangentenkegel entweder aus einem Ebenenpaar oder aus einer doppeltzählenden Ebene. In beiden Fällen ist die M_3 developpabel und in Folge dessen cylindrisch; sie kann überdies nach unseren früheren Untersuchungen in unendlich vielen Weisen als Translations-M_3 des vierfachen Raumes aufgefasst werden.

Sodann nehmen wir an, dass unsere beiden Polartrieder keine gemeinsame Kante haben, während sie eine, und dann auch nur eine gemeinsame Ebene besitzen, die etwa durch: $dt_1 = 0$ und gleichzeitig durch: $d\tau_1 = 0$ dargestellt werden möge. In diesem Falle artet der Haupttangentenkegel in eine doppeltzählende Ebene aus, und die Gleichung der M_3 kann daher die Form:

$$\Phi(x_1, x_2) = 0$$

erhalten. Derartige M_3 können immer in unendlich vielen Weisen als Translations-M_3 aufgefasst werden, wie früher gezeigt wurde.

Endlich wollen wir annehmen, dass die beiden Polartrieder verschiedene Kanten und Ebenen haben, dass aber eine Kante des einen Trieders in eine Ebene des zweiten Polartrieders hineinfällt. Ist z. B. die Kante: $dt_1 = 0$, $dt_2 = 0$ in der Ebene: $d\tau_1 = 0$ gelegen, so enthält jede Mannigfaltigkeit: $\tau_1 = \text{Const.}$ nicht allein ∞^1 Curven x_2 und ∞^1 Curven x_3, sondern zugleich ∞^1 Curven c_3; das heisst aber, dass jede zweidimensionale Mannigfaltigkeit $\tau_1 = \text{Const.}$ *in drei verschiedenen Weisen* durch

Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden kann. Nach den Entwickelungen des ersten Kapitels sind daher zwei Fälle möglich. Es ist denkbar, dass jede zweidimensionale Mannigfaltigkeit: $\tau_1 = \text{Const.}$ in einer dreidimensionalen Ebene enthalten ist, und überdies in *vier* verschiedenen Weisen durch Translation einer Curve erzeugt werden kann; diese Hypothese giebt uns offenbar nur solche M_3, die wir schon früher gefunden haben. Die andere Möglichkeit, die wir berücksichtigen müssen, besteht darin, dass jede Mannigfaltigkeit: $\tau_1 = \text{Const.}$ einfach unendlich viele parallele Gerade enthält. Die M_3 wird also dadurch erzeugt, dass eine *cylindrische*, zweidimensionale Mannigfaltigkeit des Raumes z, x_1, x_2, x_3 in Translationsbewegung geführt wird. Eine in dieser Weise erzeugte Translations-M_3 ist offenbar selbst cylindrisch und kann daher in unendlich vielen Weisen als Translations-M_3 aufgefasst werden. Alle derartigen M_3 sind aber schon früher (Theor. IV) bestimmt.

Wir wollen nun unsere bisherigen Resultate zusammenfassen. Um das in übersichtlicher Weise machen zu können, erscheint es zweckmässig, zunächst die verschiedenen Hypothesen, die wir nach und nach betrachtet und erledigt haben, analytisch zu formuliren.

Eine Kante des einen Polartriëders fällt mit einer Kante des zweiten Polartriëders zusammen, wenn zwei unter den Grössen τ etwa τ_1 und τ_2 nur von zwei Grössen t etwa t_1 und t_2 abhängen. Bestehen z. B. Gleichungen von der Form

$$\tau_1 = \Theta_1(t_1 t_2), \quad \tau_2 = \Theta_2(t_1 t_2),$$

so ist jede Curve $t_1 = a$, $t_2 = b$ identisch mit der Curve: $\tau_1 = \Theta_1(ab)$, $\tau_2 = \Theta_2(ab)$, das heisst jede Curve c_3 ist gleichzeitig eine Curve $\mathfrak{x}_3$. Ist andererseits eine Ebene des ersten Polartriëders etwa die Ebene $dt_1 = 0$ mit einer Ebene des zweiten Polartriëders etwa der Ebene $d\tau_1 = 0$ identisch, so ist τ_1 eine Function von t_1 allein. Fällt endlich die Kante $dt_1 = 0$, $dt_2 = 0$ des ersten Triëders in die Ebene $d\tau_1 = 0$ des zweiten Triëders hinein, so hängt τ_1, wie wir früher sahen, nur von t_1 und t_2 ab.

Alle unsere speciellen Voraussetzungen kommen somit darauf hinaus, dass jedenfalls eine unter den drei τ nur von zwei oder gar von einem einzigen t abhängt. Und umgekehrt ist leicht zu sehen, dass wir *jedesmal*, wenn ein τ nur von einem t

$$r_{k1}\,dx_1 + r_{k2}\,dx_2 + r_{k3}\,dx_3 = 0 \quad (k = 1, 2, 3)$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch die unmittelbar integrablen Gleichungen:

$$dp_1 = 0, \quad dp_2 = 0, \quad dp_3 = 0$$

bestimmt. In dieser Weise ergiebt sich, dass die drei Ebenencoordinaten p_1, p_2, p_3, also auch die vierte Ebenencoordinate $z - p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3$ längs jeder c_1 constante Werthe haben, dass also unsere Translations-M_3 von jeder dreidimensionalen Tangentialebene längs einer c_1 berührt wird; die ∞^2 Curven c_1 sind somit Gerade und offenbar *parallele* Gerade, da jede c_1 durch eine Translationsbewegung in jede andere c_1 übergeführt werden kann.

Besitzt daher eine developpable Translations-M_3 zweifach unendlich viele dreidimensionale Tangentialebenen, so sind die ∞^2 Geraden, nach denen die Tangentialebenen diese M_3 berühren, unter einander parallel.

Bezeichnen wir jede M_3, die ∞^2 parallele Gerade enthält, als eine *cylindrische* M_3, so können wir unser Ergebniss auch folgendermassen aussprechen:

Satz 2. *Besitzt eine developpable Translations-M_3 zweifach unendlich viele dreidimensionale Tangentialebenen, so ist sie cylindrisch und wird dementsprechend von ∞^2 parallelen Geraden erzeugt.*

Die Gleichungen einer solchen M_3 können, wie man leicht einsieht, auf die Form:

$$\begin{aligned} x_k &= b_k t_1 + B_{k2}(t_2) + B_{k3}(t_3), \qquad (k = 1, 2, 3) \\ z &= c t_1 \;\; + C_2(t_2) \;\; + C_3(t_3) \end{aligned}$$

gebracht werden, wobei b_1, b_2, b_3 und c Constante, t_1 einen Parameter darstellen. Führt man hier die Grössen:

$$\xi_k = x_k - \frac{b_k}{c} z \qquad (k = 1, 2, 3)$$

mit z zusammen als neue Cartesische Coordinaten ein, so nehmen unsere Gleichungen die Gestalt an:

$$\begin{aligned} \xi_k &= B_{k2}(t_2) + B_{k3}(t_3), \qquad (k = 1, 2, 3) \\ z &= c t_1 + C_2(t_2) + C_3(t_3), \end{aligned}$$

es ergiebt sich somit, dass unsere M_3 durch eine einzige Gleichung von der Form:

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$$

dargestellt wird, und dass diese Gleichung eine Translationsfläche des dreidimensionalen Raumes ξ_1, ξ_2, ξ_3 definirt. Ist andererseits irgend eine Translationsfläche des dreidimensionalen Raumes ξ_1, ξ_2, ξ_3 vorgelegt, so leuchtet unmittelbar ein, dass sie sich als *cylindrische* Translations-M_3 des vierdimensionalen Raumes ξ_1, ξ_2, ξ_3, z auffassen lässt. Ja man kann sogar einen Schritt weiter gehen, und nachweisen, dass eine solche Mannigfaltigkeit in *unendlich vielen* Weisen als Translations-M_3 des vierdimensionalen Raumes aufgefasst werden kann. Sind nämlich

$$\xi_k = A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) \qquad (k = 1, 2, 3)$$

die Gleichungen einer beliebigen Translationsfläche des dreifachen Raumes ξ_1, ξ_2, ξ_3, so stellen die Gleichungen:

$$\xi_k = A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3), \qquad (k = 1, 2, 3)$$
$$z = C_1(t_1) + C_2(t_2) + C_3(t_3),$$

welche auch die Functionen C_1, C_2 und C_3 sein mögen, immer dieselbe cylindrische Translations-M_3 des Raumes $z\, \xi_1\, \xi_2\, \xi_3$ dar.

Hiermit haben wir den Satz:

Satz 3. *Besitzt eine Translations-M_3 des vierfachen Raumes ∞^3 und nur ∞^2 dreidimensionale Tangentialebenen, so kann sie in unendlich vielen Weisen als Translations-M_3 aufgefasst werden.*

Wir werden jetzt alle Translations-M_3 des Raumes x_1, x_2, x_3, z bestimmen, die nur *einfach* unendlich viele Tangentialebenen besitzen. Eine solche M_3 befriedigt die partielle Differentialgleichung:

$$| r_{ik} | = 0,$$

und noch mehr: sie befriedigt alle Gleichungen, die man erhält, wenn man alle zweireihigen Unterdeterminanten der $|r_{ik}|$ gleich Null setzt. *Eine solche M_3 berührt jede dreidimensionale Tangentialebene in ∞^2 Punkten, die jedesmal eine zweidimensionale Ebene E_2 bilden,* und offenbar enthält die M_3 ∞^1 solche Ebenen E_2.

finden, so müssen wir von vorneherein feststellen, dass *jede Gleichung*: $\tau_i = \varphi_i(t_1 t_2 t_3)$ *alle drei Parameter* $t_1 t_2$ *und* t_3 *enthalten soll.*

Von jetzt ab wollen wir daher an dieser Annahme festhalten, die nach unseren früheren Auseinandersetzungen sich damit deckt, dass die beiden Polartriëder des Haupttangentenkegels, die durch die beiden Gleichungssysteme:

$$dt_1 = 0\,,\quad dt_2 = 0\,,\quad dt_3 = 0$$

und

$$d\tau_1 = 0\,,\quad d\tau_2 = 0\,,\quad d\tau_3 = 0$$

definirt werden, eine allgemeine gegenseitige Lage haben sollen.

Setzen wir nun wie früher:

$$\frac{\partial x_k}{\partial t_i} : \frac{\partial z}{\partial t_i} = \xi_{ki}\,, \qquad (k = 1, 2, 3;\ i = 1, 2, 3)$$

und definiren wir dementsprechend durch die beiden Gleichungen:

$$\xi_{2i} = \omega_{2i}(\xi_{1i})\,,\ \xi_{3i} = \omega_{3i}(\xi_{1i}) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

die gemeinsame unendlich ferne Curve K_i der Developpablen aller Curven c_i, so befriedigt die gesuchte M_3, wie wir früher sahen, die drei linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} \xi_{1i}\xi_{1k}r_{11} + \xi_{2i}\xi_{2k}r_{22} + \xi_{3i}\xi_{3k}r_{33} + (\xi_{1i}\xi_{2k} + \xi_{2i}\xi_{1k})\,r_{12} \\ \quad + (\xi_{1i}\xi_{3k} + \xi_{3i}\xi_{1k})r_{13} + (\xi_{2i}\xi_{3k} + \xi_{3i}\xi_{2k})r_{23} = 0 \\ \qquad\qquad (i, k = 1, 2, 3)\,, \end{cases}$$

in denen die ξ durch diejenigen Functionen von p_1, p_2, p_3 zu ersetzen sind, die durch Auflösung der Gleichungen:

$$1 - p_1\xi_{1i} - p_2\xi_{2i} - p_3\xi_{3i} = 0\,,$$
$$\xi_{2i} - \omega_{2i}(\xi_{1i}) = 0\,,\ \xi_{3i} - \omega_{3i}(\xi_{1i}) = 0$$

gefunden werden.

Setzen wir andererseits

$$\frac{\partial x_k}{\partial \tau_i} : \frac{\partial z}{\partial \tau_i} = \xi_{k,\,i+3} \qquad (k, i = 1, 2, 3)$$

und betrachten dementsprechend das Gleichungssystem:

$$\xi_{2,\,i+3} = \omega_{2,\,i+3}(\xi_{1,\,i+3})\,,\ \xi_{3,\,i+3} = \omega_{3,\,i+3}(\xi_{1,\,i+3}) \quad (i = 1, 2, 3)$$

als analytische Definition der unendlich fernen Curve K_i, die auf allen Developpablen der Curven $\varkappa_i$ gelegen ist, so erhalten

wir zur Bestimmung der gesuchten M_3 drei neue lineare partielle Differentialgleichungen, wenn wir in die Gleichungen:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{c} \xi_{1\alpha}\xi_{1\beta}r_{11}+\xi_{2\alpha}\xi_{2\beta}r_{22}+\xi_{3\alpha}\xi_{3\beta}r_{33}+(\xi_{1\alpha}\xi_{2\beta}+\xi_{2\alpha}\xi_{1\beta})r_{12} \\ +(\xi_{1\alpha}\xi_{3\beta}+\xi_{3\alpha}\xi_{1\beta})r_{13}+(\xi_{2\alpha}\xi_{3\beta}+\xi_{3\alpha}\xi_{2\beta})r_{23}=0 \\ (\alpha,\beta=4,5,6,\ \alpha\neq\beta) \end{array}\right.$$

für die ξ diejenigen Functionen von p_1, p_2, p_3 eintragen, die sich durch Auflösung der Gleichungen:

$$\begin{gathered} 1-p_1\xi_{1j}-p_2\xi_{2j}-p_3\xi_{3j}=0, \\ \xi_{2j}-\omega_{2j}(\xi_{1j})=0,\ \xi_{3j}-\omega_{3j}(\xi_{1j})=0 \\ (j=4,5,6) \end{gathered}$$

ergeben.

Wir sehen also, dass die gesuchten M_3 *sechs* partielle Differentialgleichungen befriedigen, die wir allerdings erst dann aufstellen können, wenn wir die sechs unendlich fernen Curven

$$K_1, K_2, K_3, \mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2, \mathsf{K}_3$$

schon kennen. Diese sechs Differentialgleichungen sind *linear* und *homogen* in den sechs Ableitungen zweiter Ordnung:

$$r_{11}, r_{22}, r_{33}, r_{12}, r_{13}, r_{23}.$$

Sehen wir daher von den *ebenen* M_3 ab, für welche alle r_{ik} verschwinden, so dürfen wir behaupten, dass die Determinante, die von den Coefficienten der r_{ik} gebildet wird, gleich Null sein muss.

Die hiermit gefundene Bedingungsgleichung:

$$0=\left|\begin{array}{cccccc} \xi_{11}\xi_{12} & \xi_{21}\xi_{22} & \xi_{31}\xi_{32} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{11}\xi_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{12}\xi_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{15}\xi_{16} & \xi_{25}\xi_{26} & \xi_{35}\xi_{36} & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right| \equiv D(\xi),$$

die zwischen den achtzehn Grössen ξ_{iv} stattfindet, kann leicht gedeutet werden, und das sogar in zwei Weisen, die allerdings nur *formal* verschieden sind.

Deuten wir die Grössen:

$$\xi_{1i},\ \xi_{2i},\ \xi_{3i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

als Bestimmungsstücke der Tangente, die wir in einem Punkte unsrer M_3 an die hindurchgehende Curve c_i gezogen haben, und betrachten wir dementsprechend die Grössen

$$\xi_{1,j+3},\ \xi_{2,j+3},\ \xi_{3,j+3}$$

als Bestimmungsstücke der Tangente im selben Punkte an die hindurchgehende Curve $\varkappa_j$, so sagt die gefundene Gleichung: $D(\xi) = 0$, dass unsere *sechs Tangenten der Curven c_i und $\varkappa_j$ auf einem Kegel zweiten Grades liegen.* Und nach einem bekannten Satze der projectiven Geometrie folgt dies in der That unmittelbar daraus, dass diese sechs Tangenten sich als die Kanten zweier Polartriëder des Haupttangentenkegels auffassen lassen.

Deuten wir andererseits die Grössen $\xi_{1i},\ \xi_{2i},\ \xi_{3i}$ als Coordinaten des unendlich fernen Punktes auf der oben besprochenen Tangente unserer Curve c_i, und betrachten wir dementsprechend die Grössen $\xi_{1,j+3},\ \xi_{2,j+3},\ \xi_{3,j+3}$ als Coordinaten des unendlich fernen Punktes auf der Tangente der Curve $\varkappa_j$, so sagt die Gleichung: $D(\xi) = 0$, dass die sechs Tangenten, die wir in einem Punkte unserer M_3 an die hindurchgehenden Curven c_1, c_2, c_3, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$ gezogen haben, die unendlich ferne ebene Mannigfaltigkeit U_3 in sechs Punkten treffen, die auf einem Kegelschnitte gelegen sind. Beachten wir dabei, dass diese sechs Punkte auf je einer unter den sechs unendlich fernen Curven K_1, K_2, K_3, K_1, K_2 und K_3 liegen, und dass sie andererseits in einer dreidimensionalen Tangentialebene unserer M_3 enthalten sind, so sehen wir, dass jede dreidimensionale Tangentialebene unserer M_3 die sechs unendlich fernen Curven K_i und K_j in sechs Punkten schneidet, die auf einem Kegelschnitte liegen. Und da durch jede zweidimensionale Ebene der unendlich fernen Mannigfaltigkeit U_3 eine dreidimensionale Tangentialebene an unsere (nicht developpable) M_3 gelegt werden kann, so zeigt das Verschwinden der Determinante $D(\xi)$, dass *die sechs Curven K_i und K_j des dreifachen ebenen Raumes U_3 jede Ebene dieses Raumes in sechs Punkten treffen, die auf einem Kegelschnitte liegen.*

Die hiermit gefundene Deutung der Gleichung: $D(\xi) = 0$ soll uns zunächst zu einem schönen geometrischen Satze führen.

Wir wollen annehmen, dass im gewöhnlichen dreifachen Raume x, y, z sechs Curven $C_1, C_2 \ldots C_6$ vorliegen, die jede Ebene dieses Raumes in sechs Punkten treffen, die auf einem Kegelschnitte liegen. Wir behaupten und werden beweisen, dass dann *unsere sechs Curven* $C_1, C_2 \ldots C_6$ *auf einer Fläche zweiten Grades gelegen sind.*

Bezeichnen wir die Coordinaten eines laufenden Punktes der Curve C_1 mit x_1, y_1, z_1, und überhaupt die Coordinaten eines laufenden Punktes der Curve C_i mit x_i, y_i, z_i, so sind die achtzehn Grössen

$$x_i, y_i, z_i \qquad (i = 1, 2 \ldots 6)$$

durch vier Gleichungen verbunden, unter denen drei die Form:

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_k & y_k & z_k & 1 \end{vmatrix} \equiv \Delta_k \qquad (k = 4, 5, 6)$$

besitzen und nur aussagen, dass die sechs Punkte in einer Ebene enthalten sind, während die vierte Gleichung etwa auf die Form:

$$0 = \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1 y_1 & x_1 z_1 & y_1 z_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & x_6 y_6 & x_6 z_6 & y_6 z_6 \end{vmatrix} \equiv D(x)$$

gebracht werden kann. Diese letzte Gleichung sagt, dass unsere sechs Punkte auf einem Kegel zweiten Grades liegen und dass sie somit auf der Schnittcurve dieses Kegels mit einer Ebene, d. h. auf einem Kegelschnitte gelegen sind.

Aus den vier hiermit gefundenen Gleichungen leiten wir jetzt durch Differentiation neue Relationen ab, in denen neben den achtzehn Grössen x_i, y_i, z_i noch die Ableitungen:

$$\frac{dy_i}{dx_i} = y_i', \quad \frac{dz_i}{dx_i} = z_i', \quad \frac{d^2 y_i}{dx_i^2} = y_i'' \ldots .$$

eingehen.

Denken wir uns, dass die sechs Curven $C_1 \ldots C_6$ schon vorliegen, dass also y_i und z_i gegebene Functionen von x_i sind, so erkennen wir leicht, dass wir x_1, x_2 und x_3 als unabhängige

Veränderliche und alle übrigen Grössen als Functionen dieser unabhängigen Veränderlichen betrachten können. Wenn wir nämlich x_1 einen bestimmten Werth ertheilen, so werden auch y_1 und z_1 und gleichzeitig ein gewisser Punkt der Curve K_1 bestimmt. Ertheilen wir daher sowohl x_1 wie x_2 und x_3 bestimmte Werthe, so greifen wir factisch auf jeder unter den drei Curven C_1, C_2 und C_3 einen Punkt heraus. Legen wir aber durch die drei hiermit gefundenen Punkte eine Ebene, so schneidet sie jede unter den drei übrigen Curven: C_4, C_5 und C_6 in einem bestimmten Punkte, dessen Coordinaten somit als Functionen von x_1, x_2, x_3 aufgefasst werden können.

Differentiiren wir zunächst die Gleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \Delta_4$$

nach x_1 und betrachten dabei x_1, x_2, x_3 als unabhängige Veränderliche, so bestimmt die hervorgehende Gleichung:

$$0 = \frac{\partial \Delta_4}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta_4}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial \Delta_4}{\partial z_1} z_1' + \left\{ \frac{\partial \Delta_4}{\partial x_4} + \frac{\partial \Delta_4}{\partial y_4} y_4' + \frac{\partial \Delta_4}{\partial z_4} z_4' \right\} \frac{\partial x_4}{\partial x_1}$$

die partielle Ableitung der Grösse x_4 nach x_1 als Function der Grössen:

$$x_i,\ y_i,\ z_i,\ y_1',\ z_1',\ y_4',\ z_4' \qquad (i = 1, 2 \ldots 6).$$

In entsprechender Weise gelingt es uns, alle neun Ableitungen der Grössen x_4, x_5 und x_6 nach x_1, x_2 und x_3 zu bestimmen.

Differentiiren wir sodann die Gleichung $D(x) = 0$ successive nach x_1, x_2 und x_3, so erhalten wir drei Gleichungen von der Form:

$$\frac{\partial D}{\partial x_i} + \frac{\partial D}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial D}{\partial z_i} z_i' + \sum_j^{4..6} \left(\frac{\partial D}{\partial x_j} + \frac{\partial D}{\partial y_j} y_j' + \frac{\partial D}{\partial z_j} z_j' \right) \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = 0,$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

die mit den neun vorhergehenden Gleichungen verbunden drei Relationen liefern, die zwischen den achtzehn Grössen x_i, y_i, z_i und den zwölf Grössen y_i', z_i' statttfinden.

Es ist nicht schwer, sich den begrifflichen Sinn dieser drei Gleichungen klar zu machen.

Wählen wir im Raume x, y, z eine beliebige Ebene und in dieser Ebene sechs Punkte: x_i, y_i, z_i, die auf einem Kegelschnitte liegen, und ziehen wir überdies in jedem unter den drei Punkten: x_4, y_4, z_4; x_5, y_5, z_5; x_6, y_6, z_6 eine Gerade mit den Richtungscoefficienten

$$1, y_i', z_i' \qquad (i = 4, 5, 6),$$

so giebt es nach den Theorien der projectiven Geometrie *einfach* unendlich viele Flächen zweiten Grades, die unseren Kegelschnitt enthalten und überdies jene drei Gerade in ihrem Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte berühren.

Diese ∞^1 Flächen zweiten Grades enthalten einen gemeinsamen Kegelschnitt und berühren einander in drei verschiedenen Punkten dieser Curve. Dann aber können wir schliessen, dass diese Flächen ein Büschel bilden, dass sie einander längs des gemeinsamen Kegelschnittes berühren und dass sie daher in jedem unter den drei Punkten

$$x_j, y_j, z_j \qquad (j = 1, 2, 3)$$

dieselbe Tangentialebene haben.

Es erfüllen also die Grössen

$$y_j' \text{ und } z_j' \qquad (j = 1, 2, 3)$$

für jedes j eine lineare Relation:

$$(4') \qquad 0 = \lambda_j y_j' + \mu_j z_j' + \gamma_j \equiv W_j \qquad (j = 1, 2, 3),$$

deren Coefficienten $\lambda_j \mu_j$ und γ_j nur von den x_i, y_i, z_i und den sechs Ableitungen $y_4', z_4', y_5', z_5', y_6', z_6'$ abhängen.

Die zwölf Ableitungen erster Ordnung y_i', z_i' sind daher wirklich durch drei unabhängige Gleichungen gebunden.

Wir wollen nun weiter gehen und Relationen zwischen den zwölf Differentialquotienten zweiter Ordnung y_i'', z_i'' ableiten.

Wenn wir, wie oben, die Grössen x_1, x_2 und x_3 als unabhängige Veränderliche betrachten und unter dieser Voraussetzung die vier Gleichungen

$$\frac{d\Delta_1}{dx_1} = 0, \quad \frac{d\Delta_2}{dx_1} = 0, \quad \frac{d\Delta_3}{dx_1} = 0, \quad \frac{dD}{dx_1} = 0$$

bilden und sodann zwischen ihnen die drei Ableitungen

$$\frac{\partial x_4}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial x_5}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial x_6}{\partial x_1}$$

eliminiren, so erhalten wir, wie wir sahen, eine Relation zwischen den achtzehn Grössen x_i, y_i, z_i und den *acht* Ableitungen y_1', z_1', y_4', z_4', y_5', z_5', y_6', z_6'

$$W_1(x_1 y_1 z_1 \ldots x_6 y_6 z_6 y_1' z_1' y_4' z_4' y_5' z_5' y_6' z_6') = 0.$$

Wir fügen hinzu, obgleich das für die folgenden Betrachtungen unwesentlich ist, dass unsere analytische wie geometrische Ueberlegungen überdies gezeigt haben, dass die Gleichung: $W_1 = 0$ in den beiden Grössen: y_1', z_1' (und dementsprechend in zwei beliebigen Grössen y_i', z_i') *linear* ist.

Um nun Relationen zwischen den Differentialquotienten zweiter Ordnung y'', z'' zu finden, könnten wir die Gleichung $W_1 = 0$ sowie die beiden analogen Gleichungen $W_2 = 0$ und $W_3 = 0$ successive nach x_1, x_2 und x_3, die fortwährend als unabhängige Veränderliche betrachtet wurden, differentiiren. Gingen wir aber in dieser Weise vor, so könnten wir nicht unmittelbar übersehen, *wie viele unabhängige* Relationen zwischen den y'', z'' wirklich vorhanden sind. Wir finden es daher zweckmässig neue unabhängige Veränderliche einzuführen, und zwar wollen wir bis auf weiteres die drei Grössen x_1, x_4 und x_5 als solche auffassen, was offenbar gestattet ist. Differentiiren wir bei Zugrundelegung dieser Auffassung die Gleichung $W_1 = 0$ nach x_1, so erhalten wir eine Relation von der Form:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial W_1}{\partial y_1} y_1' + \dfrac{\partial W_1}{\partial z_1} z_1' + \sum_k^{2,3,6} \left(\dfrac{\partial W_1}{\partial x_k} + \dfrac{\partial W_1}{\partial y_k} y_k' + \dfrac{\partial W_1}{\partial z_k} z_k' \right) \dfrac{\partial x_k}{\partial x_1} \\ \quad + \dfrac{\partial W_1}{\partial y_1'} y_1'' + \dfrac{\partial W_1}{\partial z_1'} z_1'' + \left(\dfrac{\partial W_1}{\partial y_6'} y_6'' + \dfrac{\partial W_1}{\partial z_6'} z_6'' \right) \dfrac{\partial x_6}{\partial x_1} = 0, \end{cases}$$

und aus ihr schaffen wir die Ableitungen

$$(6)\qquad \frac{\partial x_k}{\partial x_1} \qquad (k = 2, 3, 6)$$

weg, indem wir die drei Gleichungen

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_5 & y_5 & z_5 & 1 \\ x_i & y_i & z_i & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (i = 2, 3, 6)$$

nach x_i differentiiren, und die hervorgehenden Werthe der Ableitungen (6) in die Gleichung (5) eintragen.

Es ergiebt sich hierbei, dass die vier Differentialquotienten zweiter Ordnung y_i'', z_i'', y_6'', z_6'' durch eine lineare Relation

$$\lambda_i y_i'' + \mu_i z_i'' + \lambda_6 y_6'' + \mu_6 z_6'' + \sigma = 0$$

gebunden sind, deren Coefficienten nur von den x_i, y_i, z_i, y_j', z_j' abhängen.

In entsprechender Weise erkennen wir, dass die zwölf Differentialquotienten zweiter Ordnung y_j'', z_j'' durch *fünf* lineare Gleichungen

$$(7) \quad 0 = \alpha_k y_k'' + \beta_k z_k'' + \gamma_k y_6'' + \delta_k z_6'' + \varepsilon_k \qquad (k = 1, 2 \ldots 5,$$

gebunden sind, deren Coefficienten nur von den x_i, y_i, z_i, y_i', z_i) abhängen.

Hiermit sind fünf lineare und *unabhängige* Relationen zwischen den zwölf Differentialquotienten zweiter Ordnung y_j'', z_j'' gefunden; wir können nachweisen, dass hiermit alle derartige Relationen abgeleitet sind.

Nehmen wir nämlich im Raume x, y, z irgend eine Fläche zweiten Grades und greifen wir unter allen auf ihr gelegenen Curven sechs beliebige heraus, so leuchtet unmittelbar ein, dass diese sechs Curven jede Ebene des Raumes in sechs Punkten treffen, die auf einem Kegelschnitte liegen.

Wählen wir andererseits sechs beliebige Punkte x_i, y_i, z_i, die auf irgend einem Kegelschnitte gelegen sind, ertheilen wir ferner den sechs Grössen: y_4', z_4', y_5', z_5', y_6', z_6', sowie den beiden Grössen: y_6'', z_6'' beliebige Zahlenwerthe, so giebt es immer *eine ganz bestimmte Fläche zweiten Grades*, die unseren Kegelschnitt enthält, die ferner in jedem unter den drei Punkten $x_4 y_4 z_4$; $x_5 y_5 z_5$; $x_6 y_6 z_6$ diejenige hindurchgehende Gerade berührt, deren Richtungscosinus mit den drei entsprechenden Zahlen:

$$1, x_j', z_j' \qquad (j = 4, 5, 6)$$

proportional sind, die endlich im Punkte x_6, y_6, z_6 denjenigen Kreis osculirt, der durch die vier Zahlen: y_6', z_6', y_6'', z_6'' bestimmt wird.

Liegen daher im Raume xyz sechs Curven $C_1, C_2 \ldots C_6$ vor, die jede Ebene in sechs Punkten eines Kegelschnittes schneiden, so giebt es immer eine und nur eine Fläche zweiten Grades, die erstens die sechs Schnittpunkte der Curven $C_1 \ldots C_6$ mit einer bestimmten Ebene enthält, die ferner C_6 osculirt und überdies C_4 und C_5 berührt; wir behaupten, dass diese Fläche zweiten Grades alle sechs Curven C_i *osculirt*.

Dass die von uns construirte Fläche zweiten Grades alle Curven C_i *berührt*, ist eine directe Folge der drei früher abgeleiteten Gleichungen:

$$4') \qquad \lambda_j y_j' + \mu_j z_j' + \nu_j = 0 \qquad (j = 1, 2, 3),$$

deren Coefficienten λ_j, μ_j, ν_j nur von den Grössen x_i, y_i, z_i; y_4', z_4'; y_5', z_5'; y_6', z_6' abhängen. Setzen wir zum Beispiel $j = 1$, so giebt es ∞^1 Werthsysteme y_4', z_4', die unsere letzte Gleichung erfüllen, und jedes derartiges Werthsystem bestimmt eine durch den Punkt x_4, y_4, z_4 gehende Gerade, die unsere Fläche zweiten Grades berührt.

Eine ganz analoge Ueberlegung zeigt, dass die früher (p. 227) abgeleitete Gleichung:

$$7) \quad \alpha_k y_k'' + \beta_k z_k'' + \gamma_k y_6'' + \delta_k z_6'' + \varepsilon_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots 5)$$

nach sich zieht, dass unsere Fläche zweiten Grades eben, weil sie C_6 osculirt, zugleich jede Curve C_k osculiren muss.

Nun können wir leicht weiter gehen. Fassen wir zum Beispiel in der Gleichung:

$$\alpha_3 y_3'' + \beta_3 z_3'' + \gamma_3 y_6'' + \delta_3 z_6'' + \varepsilon_3 = 0$$

die Grössen x_4, x_2, x_3 als unabhängige Veränderliche auf, so erhalten wir durch Differentiation nach x_4 eine Gleichung:

$$\alpha_3 y_6''' + \beta_3 z_6''' + \omega_3 = 0,$$

die in y_6''' und z_6''' linear ist, während die drei Coefficienten nur von den x_i, y_i, z_i, $y_i' z_i'$, $y_i'' z_i''$ abhängen. Diese Gleichung zeigt, dass die Curve C_6 mit der von uns construirten Fläche zweiten Grades eine Berührung *dritter* Ordnung besitzt. Und in entsprechender Weise ergiebt sich zunächst, dass jede Curve C_i mit der Fläche zweiten Grades eine Berührung dritter Ordnung hat, sodann dass jede C_i mit der Fläche eine Berührung von vierter, ja von *beliebig hoher* Ordnung haben muss.

Hiermit ist das folgende Theorem bewiesen:

Theorem VI. *Wenn im Raume x, y, z sechs Curven vorliegen, die jede Ebene allgemeiner Lage in sechs Punkten treffen, die einem irreduciblen Kegelschnitte gehören, dann liegen diese sechs Curven immer auf einer gewissen Fläche zweiten Grades.*

Es lässt sich beweisen, dass dieses Theorem nur ein ganz specieller Fall eines viel allgemeineren Theorems ist, das sich auf q-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten des n-fachen Raumes bezieht. Hier begnügen wir uns mit dieser Andeutung, indem wir zur Illustration nur noch das folgende Beispiel formuliren: *Liegen im Raume x, y, z zehn Curven vor, die jede Ebene in zehn Punkten treffen, die auf einer und nur auf einer irreduciblen Curve dritter Ordnung liegen, dann giebt es immer eine Fläche dritter Ordnung, die unsere zehn Curven enthält.*

Jetzt kehren wir zu unserem allgemeinen Probleme zurück. Die sechs Curven $K_1 K_2 K_3 \mathsf{K}_1 \mathsf{K}_2 \mathsf{K}_3$ der dreidimensionalen unendlichfernen Mannigfaltigkeit U_3 schneiden nach unseren früheren Ergebnissen jede zweidimensionale Ebene des Raumes U_3 in sechs Punkten eines Kegelschnittes; nach dem eben abgeleiteten Theorem VI *sind daher unsere Curven K_i und K_j sämmtlich auf einer gewissen Fläche zweiten Grades des Raumes U_3 gelegen,* und diese Fläche zweiten Grades kann zwar in einen Kegel, nicht aber in ein Ebenenpaar ausarten.

Wir können daher das folgende Theorem aufstellen.

Theorem VII. *Können die Gleichungen einer nicht-developpablen M_3 des Raumes z, x_1, x_2, x_3 sowohl die Form:*

$$x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3), \qquad (k = 1, 2, 3),$$
$$z = C_1(t_1) + C_2(t_2) + C_3(t_3),$$

wie die Form:

$$x_k = \mathsf{A}_{k1}(\tau_1) + \mathsf{A}_{k2}(\tau_2) + \mathsf{A}_{k3}(\tau_3), \qquad (k = 1, 2, 3),$$
$$z = \Gamma_1(\tau_1) + \Gamma_2(\tau_2) + \Gamma_3(\tau_3)$$

erhalten, und lässt sich dabei aus den Gleichungen:

$$\tau_i = \varphi_i(t_1 t_2 t_3) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

die den Uebergang von den alten zu den neuen Parametern vermitteln, keine Relation herleiten, die weniger als vier unter den sechs Parametern t und τ enthält, dann giebt es immer eine gewisse irreducible, qua-

dratische und homogene Relation in drei Veränderlichen y_1, y_2, y_3:

$$0 = a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2 + 2a_{12}y_1y_2 + 2a_{13}y_1y_3 + 2a_{23}y_2y_3 \qquad (a_{ik} = \text{Const.}),$$

die bei jeder einzelnen unter den drei Substitutionen

$$y_1 = A'_{1i}(t_i),\ y_2 = A'_{2i}(t_i),\ y_3 = A'_{3i}(t_i) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

und zugleich bei jeder einzelnen unter den drei Substitutionen

$$y_1 = A'_{1j}(\tau_j),\ y_2 = A'_{2j}(\tau_j),\ y_3 = A'_{3j}(\tau_j)$$

identisch befriedigt wird.

Wir können diesen Satz als eine Integrabilitätsbedingung betrachten, die unsere sechs linearen partiellen Differentialgleichungen (3) und (4) erfüllen müssen. Dabei ist nun zunächst zu bemerken, dass wir keineswegs wissen, ob diese nothwendige Integrabilitätsbedingung auch hinreichend ist, und es stellt sich daher die Frage, ob noch weitere Integrabilitätsbedingungen vorhanden sind. Zu bemerken ist ferner, dass unsere sechs partiellen Differentialgleichungen (3) und (4) (S. 220 u. 221) sich, sobald die gefundene Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, auf *fünf* Gleichungen reduciren.

Es ist nun leicht zu beweisen, dass diese fünf partiellen Differentialgleichungen, die in den sechs Differentialquotienten r_{ik} linear und homogen sind, unter den von uns gemachten Voraussetzungen immer von einander unabhängig sind, und dass sie daher die *Verhältnisse* der r_{ik} vollständig bestimmen. Unsere partiellen Differentialgleichungen sagen ja eben, dass der Haupttangentenkegel der gesuchten M_3 zu zwei gegebenen Triedern (deren sechs Kanten auf einem Kegel zweiten Grades liegen) conjugirt sein soll. Und da diese beiden Trieder eine allgemeine gegenseitige Lage haben sollen, giebt es, sobald die Grössen $z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3$ gegeben sind, *einen und nur einen Kegel*, der zu diesen beiden Triedern conjugirt ist. Die Gleichung der Haupttangenten:

$$0 = r_{11}dx_1^2 + r_{22}dx_2^2 + r_{33}dx_3^2 + 2r_{12}dx_1dx_2 + 2r_{13}dx_1dx_3 + 2r_{23}dx_2dx_3$$

ist also durch die partiellen Differentialgleichungen vollständig bestimmt, und somit giebt es unter unseren sechs *partiellen Differentialgleichungen fünf unabhängige, aus denen sich die Verhältnisse der* r_{ik} *bestimmen lassen.*

Wir behaupten, dass wir immer annehmen können, dass nicht drei unter diesen partiellen Differentialgleichungen die Form:

$$r_{11} = 0,\ r_{22} = 0,\ r_{33} = 0$$

besitzen. Wäre das nämlich der Fall, so besässen die Gleichungen der zugehörigen Integral-M_3 jedenfalls die Form:

$$z = c_{123}x_1x_2x_3 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + c_{23}x_2x_3 + d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + e,$$

und da wir von den *ebenen* M_3 absehen, müsste jedenfalls einer unter den vier Coefficienten c_{123}, c_{12}, c_{13}, c_{23} von Null verschieden sein. Daher können wir immer, jedenfalls durch eine passende Vertauschung der vier gleichberechtigten Grössen z, x_1, x_2, x_3, erreichen, dass mindestens eine unter den drei Ableitungen r_{11}, r_{22}, r_{33} von Null verschieden wird.

Wir können daher annehmen, dass unsere partiellen Differentialgleichungen von vornherein in einer solchen Form vorliegen, dass sie nicht die Gleichung $r_{33} = 0$ nach sich ziehen, und dass sie somit durch Auflösung auf die Form:

$$(8)\quad r_{11} = ar_{33},\ r_{12} = br_{33},\ r_{22} = cr_{33},\ r_{13} = dr_{33},\ r_{23} = er_{33}$$

gebracht werden können. Und in diesen Gleichungen sind die Coefficienten $a, b \ldots e$ Functionen von p_1, p_2, p_3.

Indem wir jetzt die Aufgabe in Angriff nehmen, die Integrabilitätsbedingungen eines solchen Systems von Differentialgleichungen abzuleiten, können und wollen wir davon absehen, dass die Form der Coefficienten $a, b \ldots$ als Functionen von p_1, p_2, p_3 durch die Beschaffenheit unseres allgemeinen Problems von vorneherein in hohem Maasse particularisirt ist. Wir wollen uns vielmehr die ungleich allgemeinere und unter mehreren Gesichtspunkten wichtige Aufgabe stellen:

Ein System partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$r_{11} = ar_{33},\ r_{12} = br_{33},\ r_{22} = cr_{33},\ r_{13} = dr_{33},\ r_{23} = er_{33}$$

ist vorgelegt, deren Coefficienten $a, b \ldots$ *beliebig gegebene Func-*

tionen von p_1, p_2 und p_3 darstellen. Es sollen die Integrabilitätsbedingungen dieses Gleichungssystems abgeleitet werden.

Wir differentiiren unsere fünf Gleichungen zunächst nach x_3 und erhalten so, wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j} = r_{ikj}$$

setzen, und überdies in den hervorgehenden Relationen nur die Glieder mitnehmen, die eine Ableitung dritter Ordnung enthalten, die fünf folgenden Gleichungen

$$r_{113} = a r_{333} + \cdots, \quad r_{123} = b r_{333} + \cdots, \quad r_{223} = c r_{333} + \cdots,$$
$$r_{133} = d r_{333} + \cdots, \quad r_{233} = e r_{333} + \cdots$$

Wir finden ferner durch Differentiation nach x_1, bez. x_2 und durch Verwerthung der soeben erhaltenen Gleichungen dritter Ordnung die folgenden Relationen

$$r_{111} = a r_{331} + \cdots = a d r_{333} + \cdots$$
$$r_{112} = a r_{332} + \cdots = a e r_{333} + \cdots$$
$$r_{121} = b r_{331} + \cdots = b d r_{333} + \cdots$$
$$r_{122} = b r_{332} + \cdots = b e r_{333} + \cdots$$
$$r_{221} = c r_{331} + \cdots = c d r_{333} + \cdots$$
$$r_{222} = c r_{332} + \cdots = c e r_{333} + \cdots$$
$$r_{131} = d r_{331} + \cdots = d^2 r_{333} + \cdots$$
$$r_{132} = d r_{332} + \cdots = d e r_{333} + \cdots$$
$$r_{231} = e r_{331} + \cdots = d e r_{333} + \cdots$$
$$r_{232} = e r_{332} + \cdots = e^2 r_{333} + \cdots$$

Hiermit sind nun alle Ableitungen dritter Ordnung r_{ikj} ausgedrückt durch r_{333} und die Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Im Allgemeinen gelingt es auch, r_{333} durch Ableitungen erster und zweiter Ordnung auszudrücken. Eine solche Bestimmung geben z. B. die beiden Gleichungen:

$$r_{112} = a e r_{333} + \cdots, \quad r_{121} = b d r_{333} + \cdots,$$

wenn nicht zufälligerweise die Relation besteht:

$$a e - b d = 0 .$$

Durch Betrachtungen von dieser Art erkennt man, dass alle r_{ikj} sich als Functionen der p_i und r_{33} ausdrücken lassen, wenn

nicht zufälligerweise die fünf Coefficienten $a, b \ldots e$ durch die drei Relationen:

$$a = d^2, \quad b = de, \quad c = e^2$$

gebunden sind. In diesem Falle zeigt aber die Differentialgleichung der Haupttangenten:

$$0 = r_{11}dx_1^2 + r_{22}dx_2^2 + r_{33}dx_3^2 + 2r_{12}dx_1dx_2 + 2r_{13}dx_1dx_3 + 2r_{23}dx_2dx_3$$

die jetzt die Form:

$$0 = d^2dx_1^2 + e^2dx_2^2 + dx_3^2 + 2de\,.\,dx_1dx_2 + 2d\,.\,dx_1dx_3 + 2e\,.\,dx_2\,.\,dx_3$$

oder aber die Form:

$$0 = (d\,.\,dx_1 + e\,.\,dx_2 + dx_3)^2$$

annimmt, dass der Haupttangentenkegel aus einer doppeltzählenden Ebene besteht.

Das hiermit gefundene Resultat kann nach mehreren Richtungen verallgemeinert werden. Hier beschränken wir uns auf die Bemerkung, dass unsere Betrachtungen auch dann gültig bleiben, wenn die Coefficienten $ab \ldots$ nicht allein von den p, sondern auch von z, x_1, x_2, x_3 abhängen. Wir können daher den folgenden Satz aufstellen:

Satz. *Liegen in den Veränderlichen z, x_1, x_2, x_3 fünf partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung vor, aus denen sich die Verhältnisse der r_{ik} bestimmen lassen, so hängt die Gleichung: $z - \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$ der allgemeinsten gemeinsamen Integral-M_3, die sich nicht als Umhüllungsfigur von ∞^1 dreidimensionalen Ebenen auffassen lässt, höchstens von fünf willkürlichen Constanten ab. Enthalten die vorgelegten Differentialgleichungen nicht die Veränderlichen z, x_1, x_2, x_3, sondern nur die Ableitungen erster und zweiter Ordnung, so lässt sich aus jeder Lösung $z - \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$ eine allgemeinere:*

$$z + k - \varphi(mx_1 + a_1, mx_2 + a_2, mx_3 + a_3) = 0$$

herleiten, die fünf im Allgemeinen wesentliche Constanten enthält.

Definiren unsere fünf partiellen Differentialgleichungen insbesondere nicht-cylindrische M_3, die in zwei verschiedenen Weisen als Translations-M_3 aufgefasst werden können, so giebt es immer ∞^5 und auch nicht mehr gemeinsame, nicht-developpable Integral-M_3.

Wir wenden uns nun wieder zur Betrachtung eines beliebigen integrablen Systems von fünf partiellen Differentialgleichungen:

$$r_{11} = ar_{33},\ r_{12} = br_{33},\ r_{22} = cr_{33},\ r_{13} = dr_{33},\ r_{23} = er_{33},$$

deren Coefficienten $ab \ldots e$ nur von p_1, p_2 und p_3 abhängen. Ehe wir in der Discussion der Integrabilitätsbedingungen weiter gehen, finden wir es zweckmässig, auf unser Gleichungssystem die Berührungstransformation

$$(9)\quad z' = z - p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3,\ x_k' = p_k,\ p_k' = -x_k$$

auszuführen, deren Ursprung bis auf LAGRANGE, EULER und LEGENDRE zurückgeführt werden kann. Dass diese Transformation wirklich eine Berührungstransformation ist, folgt, nach meiner allgemeinen Theorie, unmittelbar daraus, dass die Gleichung:

$$\begin{aligned} d(z - p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3) + x_1 dp_1 + x_2 dp_2 + x_3 dp_3 \\ = dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - p_3 dx_3 \end{aligned}$$

identisch besteht.

Die entsprechenden Werthe der r_{ik}' werden aus den Gleichungen:

$$dp_k' - r_{k1}' dx_1' - r_{k2}' dx_2' - r_{k3}' dx_3' = 0 \quad (k = 1, 2, 3)$$

gefunden, die durch die Substitution: $p_k' = -x_k,\ x_k' = p_k$ die Form:

$$dx_k + r_{k1}' dp_1 + r_{k2}' dp_2 + r_{k3}' dp_3 = 0$$

oder, durch Ausführung, die Form:

$$\begin{aligned} 0 = dx_k &+ r_{k1}'(r_{11} dx_1 + r_{12} dx_2 + r_{13} dx_3) \\ &+ r_{k2}'(r_{21} dx_1 + r_{22} dx_2 + r_{23} dx_3) \\ &+ r_{k3}'(r_{31} dx_1 + r_{32} dx_2 + r_{33} dx_3) \qquad (k = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

annehmen. In dieser Weise findet man neun Gleichungen, unter denen die drei ersten:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + r_{11}' r_{11} + r_{12}' r_{21} + r_{13}' r_{31}, \\ 0 &= \quad r_{11}' r_{12} + r_{12}' r_{22} + r_{13}' r_{32}, \\ 0 &= \quad r_{11}' r_{13} + r_{12}' r_{23} + r_{13}' r_{33}, \end{aligned}$$

durch Auflösung die Werthe von r_{11}', r_{12}' und r_{13}' liefern. Setzen wir zur Abkürzung:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = \Delta(r)$$

und bezeichnen die Unterdeterminanten nach den r_{ik} mit $\Delta_{ik}(r)$, so erhalten wir die Formeln:

$$r_{11}' = -\frac{\Delta_{11}(r)}{\Delta(r)}, \quad r_{12}' = -\frac{\Delta_{12}(r)}{\Delta(r)}, \quad r_{13}' = -\frac{\Delta_{13}(r)}{\Delta(r)}$$

und dementsprechend die allgemeine Formel:

$$r_{ik}' = -\frac{\Delta_{ik}(r)}{\Delta(r)}. \tag{10}$$

Wollen wir nun diese Berührungstransformation auf das vorliegende System (8) partieller Differentialgleichungen anwenden, so haben wir zu berücksichtigen, dass die Verhältnisse der r_{ik} und gleichzeitig auch die Verhältnisse der $\Delta_{ik}(r)$ gegebene Functionen von p_1, p_2 und p_3 sind. Da nun andererseits die Determinante $\Delta(r)$ von Null verschieden ist, erkennen wir, dass auch die Verhältnisse der r_{ik}' sich als bekannte Functionen von p_1, p_2, p_3, und gleichzeitig als bekannte Functionen von x_1', x_2', x_3' ausdrücken lassen. Wir können hinzufügen, dass die Determinante $|r_{ik}'|$ von Null verschieden sein muss, indem die gemeinsamen Integral-M_3 der gegebenen Gleichungen (8) *dreidimensionale* Mannigfaltigkeiten des Raumes z, x_1, x_2, x_3 sind; hieraus folgt ja, dass die transformirten Gebilde des Raumes z', x_1', x_2', x_3' ∞^3 verschiedene dreidimensionale Tangentialebenen besitzen, und das heisst ja eben, dass die Determinante $|r_{ik}'|$ von Null verschieden ist.

Wir erkennen ferner durch Betrachtungen, die mit früher (S. 234) angestellten Ueberlegungen identisch sind, dass wir annehmen können, dass r_{33}' von Null verschieden ist, und dass somit alle r_{ik}' Gleichungen von der Form $r_{ik}' = \alpha_{ik}(x_1' x_2' x_3') r_{33}'$ erfüllen. Da die Determinante der r_{ik} nicht identisch verschwindet, können wir nach der Theorie der quadratischen Formen durch passende Coordinatenwahl erreichen, dass in der quadratischen Form:

$$\Sigma \alpha_{ik}(x_1' x_2' x_3') dx_i' dx_k'$$

die Coefficienten α_{ik} für allgemeine Werthe der x' keine speciellen *endlichen* Relationen erfüllen.

Wir können also annehmen, dass unser System partieller Differentialgleichungen auf die Form:

$$r_{11} = \alpha r_{33},\ r_{12} = \beta r_{33},\ r_{22} = \gamma r_{33},\ r_{23} = \delta r_{33},\ r_{13} = \varepsilon r_{33}$$

gebracht ist, und dass die Coefficienten $\alpha\beta \ldots \varepsilon$ gegebene Functionen der unabhängigen Veränderlichen x_1, x_2, x_3 darstellen. Wir wollen die Integrabilitätsbedingungen dieses Gleichungssystems aufsuchen.

Wir wissen, dass wir durch einmalige Differentiation fünfzehn Differentialgleichungen dritter Ordnung erhalten, aus denen sich die zehn Ableitungen dritter Ordnung r_{ikj} als Functionen von x_1, x_2, x_3 und r_{33} berechnen lassen, die in r_{33} linear und homogen sind:

$$r_{ikj} = \lambda_{ikj} \cdot r_{33}.$$

Eliminirt man daher die r_{ikj} und die fünf Ableitungen $r_{11}, r_{12}, r_{22}, r_{23}$ und r_{13} zwischen diesen fünfzehn Differentialgleichungen dritter Ordnung, so findet man fünf Gleichungen von der Form

$$W_k(\alpha_1, \beta_1 \ldots \varepsilon_1, \alpha_2, \beta_2 \ldots \varepsilon_2, \alpha, \beta, \ldots \varepsilon) = 0$$
$$(k = 1, 2 \ldots 5),$$

die als Integrabilitätsbedingungen aufzufassen sind. *Wir wollen jetzt zeigen, dass diese fünf Gleichungen, die wir sogleich aufstellen werden*, die vollständigen Integrabilitätsbedingungen des Gleichungssystems: $r_{11} = \alpha r_{33} \ldots r_{13} = \varepsilon r_{33}$ liefern. Von vorneherein ist das keineswegs evident; denn nach der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen wäre es eigentlich nothwendig die Gleichungen dritter Ordnung

$$r_{ikj} = \lambda_{ikj}(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \cdot r_{33}$$

einmal nach x_1, x_2 und x_3 zu differentiiren und zu constatiren, dass sich in dieser Weise kein Widerspruch ergiebt; dass also die Gleichung

$$\frac{\partial \lambda_{112}}{\partial x_2} = \frac{\partial \lambda_{122}}{\partial x_1}$$

und alle damit analogen Gleichungen identisch erfüllt sind.

Wir führen den angekündigten Nachweis, indem wir die folgenden Betrachtungen anstellen.

Differentiiren wir eine jede unter den fünf Gleichungen $r_{11} = \alpha r_{33} \ldots r_{13} = \varepsilon r_{33}$ einmal nach x_1, x_2 oder x_3, so erhalten wir, wie schon bemerkt, *fünfzehn* Differentialgleichungen

dritter Ordnung. Differentiiren wir noch einmal, so finden wir dreissig Differentialgleichungen vierter Ordnung, die wir wiederum auf die Form:

$$r_{ikj\nu} = \mu_{ikj\nu} \cdot r_{33}$$

bringen können.

Nun aber giebt es zehn Ableitungen r_{ikj} und fünfzehn Ableitungen $r_{ikj\nu}$. Durch Elimination finden wir daher

$$15 + 30 - (10 + 15) = 20$$

unabhängige Relationen zwischen den Coefficienten: $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$, ihren zehn Ableitungen erster Ordnung: $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \varepsilon_1, \varepsilon_2$ und den Ableitungen zweiter Ordnung $\alpha_{11}, \alpha_{12} \ldots \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}$. Unter diesen zwanzig Gleichungen, die uns die vollständigen Integrabilitätsbedingungen liefern, giebt es fünf von erster Ordnung, nämlich die früher besprochenen Gleichungen

$$W_1 = 0 \ldots W_5 = 0,$$

hierzu kommen nun fünfzehn Gleichungen zweiter Ordnung

$$\Phi_k(\alpha \ldots \varepsilon, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \varepsilon_2, \alpha_{11}, \ldots \varepsilon_{22}) = 0.$$

Wollen wir nun beweisen, dass die Gleichungen $W_1 = 0 \ldots W_5 = 0$ die vollständigen Integrabilitätsbedingungen liefern, dass also die fünfzehn Gleichungen $\Phi_k = 0$ nichts weiteres aussagen, als die vereinigten Gleichungen

$$(11) \qquad W_k = 0, \quad \frac{\partial W_k}{\partial x_i} = 0 \qquad (k, i = 1, 2, 3),$$

so brauchen wir nur nachzuweisen, dass die zwanzig Gleichungen (11) von einander unabhängig sind.

Diesen Nachweis, der ziemlich weitläufige Rechnungen verlangt, wollen wir jetzt führen.

Um die fünf Gleichungen: $W_k = 0$ in einfachster Weise zu finden, nehmen wir unseren Ausgangspunkt in den Gleichungen

$$dp_k = r_{k1}\,dx_1 + r_{k2}\,dx_2 + r_{k3}\,dx_3,$$

die uns zeigen, dass die drei Differentialausdrücke

$$(12) \qquad \begin{cases} \alpha\,dx_1 + \beta\,dx_2 + \varepsilon\,dx_3 \\ \beta\,dx_1 + \gamma\,dx_2 + \delta\,dx_3 \\ \varepsilon\,dx_1 + \delta\,dx_2 + \quad dx_3 \end{cases}$$

integrabel sind, und überdies einen gemeinsamen Integrabilitätsfactor

$$M \equiv r_{33}$$

besitzen. In dieser Weise erhalten wir zunächst drei Relationen:

$$(13)\quad \begin{cases} \varepsilon(\beta_1 - \alpha_2) + \beta(\alpha_3 - \varepsilon_1) + \alpha(\varepsilon_2 - \beta_3) = 0, \\ \delta(\gamma_1 - \beta_2) + \gamma(\beta_3 - \delta_1) + \beta(\delta_2 - \gamma_3) = 0, \\ \delta_1 - \varepsilon_2 + \delta\varepsilon_3 - \varepsilon\delta_3 = 0, \end{cases}$$

die nur aussagen, dass die drei Differentialausdrücke (12) integrabel sind; wir finden ferner die beiden Gleichungen

$$(14)\quad \begin{cases} (\gamma\varepsilon - \beta\delta)(\beta_1 - \alpha_2) + (\alpha\delta - \beta\varepsilon)(\gamma_1 - \beta_2) + (\beta^2 - \alpha\gamma)(\delta_1 - \varepsilon_2) = 0 \\ (\delta\varepsilon - \beta)(\varepsilon_1 - \alpha_3) + (\alpha - \varepsilon^2)(\delta_1 - \beta_3) + (\alpha\delta - \varepsilon\beta)\varepsilon_3 = 0 \end{cases}$$

die daher stammen, dass die drei Differentialausdrücke denselben Integrabilitätsfactor besitzen. Hiermit sind, wie man leicht verificirt, fünf unabhängige Gleichungen zwischen den Coefficienten $\alpha \ldots \varepsilon$ und ihren Ableitungen erster Ordnung gefunden. Daher können wir die vereinigten Gleichungen (13) und (14) als eine Form des Gleichungssystems $W_k = 0$ auffassen.

Unter den fünf Gleichungen (13) und (14) giebt es eine, nämlich:

$$(15)\quad (\gamma\varepsilon - \beta\delta)(\beta_1 - \alpha_2) + (\alpha\delta - \beta\varepsilon)(\gamma_1 - \beta_2) + (\beta^2 - \alpha\gamma)(\delta_1 - \varepsilon_2) = 0,$$

die nur Differentialquotienten nach x_1 und x_2 enthält. Die vier übrigen können, da wir annehmen dürfen, dass $\beta^2 - \alpha\gamma$ von Null verschieden ist, nach β_3, γ_3, δ_3 und ε_3 aufgelöst werden, und wir ersetzen sie daher durch die äquivalenten Gleichungen:

$$(16)\quad \begin{cases} (\beta^2 - \alpha\gamma)\{\alpha(\beta_3 - \delta_1) + \beta(\varepsilon_1 - \alpha_3)\} + \beta(\alpha\delta - \varepsilon\beta)(\beta_1 - \alpha_1) \\ \qquad + \alpha(\varepsilon\beta - \alpha\delta)(\gamma_1 - \beta_2) = 0 \\ (\beta^2 - \alpha\gamma)\{\alpha\varepsilon_3 + \varepsilon(\varepsilon_1 - \alpha_3)\} + \beta(\alpha - \varepsilon^2)(\beta_1 - \alpha_2) \\ \qquad + \alpha(\varepsilon^2 - \alpha)(\gamma_1 - \beta_2) = 0 \\ (\beta^2 - \alpha\gamma)\{\alpha(\gamma_3 - \delta_2) + \gamma(\varepsilon_1 - \alpha_3)\} + \gamma(\alpha\delta - \beta\varepsilon)(\beta_1 - \alpha_2) \\ \qquad + \alpha(\gamma\varepsilon - \beta\delta)(\gamma_1 - \beta_2) = 0 \\ (\beta^2 - \alpha\gamma)\{\alpha\delta_3 + \delta(\varepsilon_1 - \alpha_3)\} + (\alpha\gamma - \beta\varepsilon\delta)(\beta_1 - \alpha_2) \\ \qquad + \alpha(\varepsilon\delta - \beta)(\gamma_1 - \beta_2) = 0. \end{cases}$$

Differentiirt man nun die Gleichung (15) nach x_1 und x_2, ferner die zuletzt geschriebenen Gleichungen nach x_1, x_2 und x_3, so übersieht man leicht, dass die vierzehn in dieser Weise gefundenen Gleichungen unabhängig sind, indem sie nach den Grössen

$$\delta_{11}, \varepsilon_{22}; \quad \beta_{13}, \beta_{23}, \beta_{33}; \quad \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33};$$
$$\gamma_{13}, \gamma_{23}, \gamma_{33}; \quad \delta_{13}, \delta_{23}, \delta_{33}$$

aufgelöst werden können. Wir haben also nur noch zu zeigen, dass die Differentiation der Gleichung (15) nach x_3 eine Relation liefert, die hinsichtlich der Ableitungen zweiter Ordnung von den soeben besprochenen vierzehn Gleichungen unabhängig ist.

Durch Differentiation von (15) nach x_3 und Multiplication mit $\alpha(\alpha\gamma - \beta^2)$ erhalten wir, wenn wir nur solche Glieder mitnehmen, die eine Ableitung *zweiter* Ordnung enthalten, die Gleichung:

$$\alpha(\alpha\gamma - \beta^2)\{(\gamma\varepsilon - \beta\delta)(\beta_{13} - \alpha_{23}) + (\alpha\delta - \beta\varepsilon)(\gamma_{13} - \beta_{23}) + (\beta^2 - \alpha\gamma)(\delta_{13} - \varepsilon_{23}) + \cdots\} = 0.$$

Aus dieser Gleichung können wir die Ableitungen

$$\beta_{13}, \gamma_{13}, \beta_{23}, \delta_{13}, \varepsilon_{23}$$

wegschaffen, indem wir die vier Gleichungen (16) nach x_1 und x_2 differentiiren, und sodann ihre linken Seiten, mit passenden Factoren multiplicirt:

$$(\gamma\varepsilon - \beta\delta)\{(\beta^2 - \alpha\gamma)\alpha(\beta_{13} - \delta_{11}) + \beta(\beta^2 - \alpha\gamma)(\varepsilon_{11} - \alpha_{13}) + \beta(\alpha\delta - \varepsilon\beta)(\beta_{11} - \alpha_{12}) + \alpha(\varepsilon\beta - \alpha\delta)(\gamma_{11} - \beta_{12}) + \cdots\} = 0$$
$$\alpha\delta - \beta\varepsilon)\{(\beta^2 - \alpha\gamma)\alpha(\gamma_{13} - \delta_{12}) + \gamma(\beta^2 - \alpha\gamma)(\varepsilon_{11} - \alpha_{13}) + \gamma(\alpha\delta - \beta\varepsilon)(\beta_{11} - \alpha_{12}) + \alpha(\gamma\varepsilon - \beta\delta)(\gamma_{11} - \beta_{12}) + \cdots\} = 0$$
$$\beta\varepsilon - \alpha\delta)\{(\beta^2 - \alpha\gamma)\alpha(\beta_{23} - \delta_{12}) + \beta(\beta^2 - \alpha\gamma)(\varepsilon_{12} - \alpha_{23}) + \beta(\alpha\delta - \varepsilon\beta)(\beta_{12} - \alpha_{22}) + \alpha(\varepsilon\beta - \alpha\delta)(\gamma_{12} - \beta_{22}) + \cdots\} = 0$$
$$\beta^2 - \alpha\gamma)\{\alpha(\beta^2 - \alpha\gamma)\delta_{13} + \delta(\beta^2 - \alpha\gamma)(\varepsilon_{11} - \alpha_{13}) + (\alpha\gamma - \beta\varepsilon\delta)(\beta_{11} - \alpha_{12}) + \alpha(\varepsilon\delta - \beta)(\gamma_{11} - \beta_{12}) + \cdots\} = 0$$
$$\alpha\gamma - \beta^2)\{\alpha(\beta^2 - \alpha\gamma)\varepsilon_{23} + \varepsilon(\beta^2 - \alpha\gamma)(\varepsilon_{12} - \alpha_{23}) + \beta(\alpha - \varepsilon^2)(\beta_{12} - \alpha_{22}) + \alpha(\varepsilon^2 - \alpha)(\gamma_{12} - \beta_{22}) + \cdots\} = 0$$

zu der vorhergehenden Gleichung addiren. Gleichzeitig fallen α_{13} und α_{23} weg, und die resultirende Gleichung enthält daher keine anderen Ableitungen zweiter Ordnung, als solche, die nach

x_1 und x_2 genommen sind. Durch Ausführung gelingt es, diese Gleichung auf die Form:

$$\alpha(\beta^2-\alpha\gamma)\cdot\{(\gamma-\delta^2)(\beta_{11}-\alpha_{12})+(\varepsilon\delta-\beta)(\gamma_{11}-\beta_{12})+(\beta\delta-\gamma\varepsilon)(\delta_{11}-\varepsilon_{12})\}$$
$$-\alpha\begin{vmatrix}\alpha&\beta&\varepsilon\\ \beta&\gamma&\delta\\ \varepsilon&\delta&1\end{vmatrix}\cdot\{\beta(\alpha_{22}-\beta_{12})+\alpha(\gamma_{12}-\beta_{22})\}+\cdots=0$$

zu bringen.

Wäre nun diese Gleichung eine Folge der früher aufgestellten Gleichungen, oder aber reducirte sie sich vermöge dieser älteren Gleichungen auf eine Differentialgleichung erster Ordnung, so könnte eine solche Reduction jedenfalls nur von den beiden Gleichungen

$$0=(\gamma\varepsilon-\beta\delta)(\beta_{11}-\alpha_{12})+(\alpha\delta-\beta\varepsilon)(\gamma_{11}-\beta_{12})+(\beta^2-\alpha\gamma)(\delta_{11}-\varepsilon_{12})+\cdots$$
$$0=(\gamma\varepsilon-\beta\delta)(\beta_{12}-\alpha_{22})+(\alpha\delta-\beta\varepsilon)(\gamma_{12}-\beta_{22})+(\beta^2-\alpha\gamma)(\delta_{12}-\varepsilon_{22})+\cdots$$

herrühren, die sich durch Differentiation von (15) nach x_1 und x_2 ergeben. Es ist aber nicht schwer zu erkennen, dass eine solche Reduction nicht eintreten kann.

Also ist es uns gelungen, aus den fünf Integrabilitätsbedingungen, die durch die fünf Differentialgleichungen erster Ordnung (13, 14) repräsentirt werden, durch Differentiation fünfzehn Differentialgleichungen zweiter Ordnung abzuleiten, die unter einander und von den fünf Gleichungen erster Ordnung unabhängig sind.

Hiermit ist es uns gelungen zu beweisen, dass die vollständigen Intgrabilitätsbedingungen der fünf partiellen Differentialgleichungen

$$r_{11}=\alpha r_{33},\ r_{12}=\beta r_{33},\ r_{22}=\gamma r_{33},\ r_{23}=\delta r_{33},\ r_{13}=\varepsilon r_{33},$$

deren Coefficienten $\alpha, \beta \ldots \varepsilon$ gegebene Functionen von x_1, x_2, x_3 bezeichnen, durch fünf Relationen zwischen diesen Coefficienten und ihren Ableitungen *erster* Ordnung nach x_1, x_2 und x_3 dargestellt werden.

Um diesem an sich wichtigen Resultat eine präcise Form zu geben, stellen wir das folgende Theorem auf.

Theorem VIII. *Besitzt ein System von fünf partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*

$$\Omega_k(x_1, x_2, x_3\, r_{11}, r_{12}, r_{22}, r_{13}, r_{23}, r_{33}) = 0 \quad (k = 1, 2 \ldots 5)$$

in denen die unbekannte Function z und ihre Ableitungen erster Ordnung nicht explicite vorkommen, während die Ableitungen zweiter Ordnung homogen auftreten, auch nur eine einzige nicht-developpable Integral-M_3, so ist das System: $\Phi_k = 0$ unbeschränkt integrabel, und es existiren ∞^5 nicht-developpable Integral-M_3. Bringt man das Gleichungssytem $\Phi_k = 0$ durch passende Coordinatenwahl, wie immer möglich ist, auf die Form

$$r_{11} = \alpha r_{33},\ r_{12} = \beta r_{33},\ r_{22} = \gamma r_{33},\ r_{23} = \delta r_{33},\ r_{13} = \varepsilon r_{33},$$

so werden die vollständigen Integrabilitätsbedingungen durch fünf Gleichungen geliefert, die neben den Coefficienten $\alpha \ldots \varepsilon$ nur ihre Ableitungen erster Ordnung nach x_1, x_2 und x_3 enthalten.

Wenden wir auf dieses Theorem das Princip der Dualität (anders ausgesprochen die Berührungstransformation (9)) an, und beachten wir dabei, dass developpable M_3 den Punkten, Curven und zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten dualistisch gegenüberstehen, so erhalten wir unmittelbar das folgende Theorem, das für unsere Untersuchungen eine hervorragende Wichtigkeit besitzt.

Theorem IX. *Besitzt ein System von fünf Differentialgleichungen zweiter Ordnung.*

$$\Psi_k(p_1, p_2, p_3, r_{11}, r_{12}, r_{22}, r_{13}, r_{23}, r_{33}) = 0, \quad (k = 1 \ldots 5)$$

die in den r_{ik} unabhängig und homogen sind, während die Veränderlichen z, x_1, x_2, x_3 nicht explicite vorkommen, auch nur eine einzige nicht-developpable Integral-M_3, so ist das System unbeschränkt integrabel und besitzt ∞^5 ähnliche, gleichgestellte und nicht-developpable Integral-M_3. Bei passender Coordinatenwahl lässt sich das System: $\Psi = 0$ auf die Form

$$r_{11} = a r_{33},\ r_{12} = b r_{33},\ r_{22} = c r_{33},\ r_{23} = d r_{33},\ r_{13} = e r_{33}$$

bringen, und die vollständigen Integrabilitätsbedingungen finden ihren Ausdruck in fünf Gleichungen zwischen den Coefficienten a, b . . . e und ihren Ableitungen erster Ordnung nach p_1, p_2 und p_3.

Kapitel VI.

Erledigung des reducirten Problems.

Wir zeigen jetzt, dass wir durch passende Verwerthung des ABEL'schen Theorems Lösungen unseres reducirten Problems finden. Indem wir sodann die Entwickelungen des vorigen Kapitels weiter fortführen, gelingt es uns nachzuweisen, dass wir durch diese Deutung des ABEL'schen Theorems *alle* Lösungen des reducirten Problems gefunden haben.

Im Folgenden knüpfen wir direct an ABEL's berühmte Abhandlung: »*Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes*« an[1]).

Nach CLEBSCH's Beispiel werden wir die Sprache der Geometrie benutzen, und dementsprechend die in ABEL's Abhandlung auftretenden Grössen x und y als Cartesische Coordinaten eines Punktes in der Ebene auffassen. Nach unserer Ansicht deutet vielleicht ABEL's Wahl dieser Buchstaben darauf, dass ihm die geometrische Deutung nicht fern lag. Dass diese jedenfalls so naheliegende und so ausserordentlich fruchtbare Deu-

---

1) Dass die Académie des Sciences sich seinerzeit gegenüber GALOIS bahnbrechenden Ideen ablehnend verhielt, findet seine Erklärung und Entschuldigung in vielen Umständen. Dagegen ist es mir immer ein Räthsel geblieben, wie die *Académie des Sciences* die bahnbrechende Arbeit des schon hoch berühmten gestorbenen ABEL trotz JACOBI's ernsten und hochberechtigten Mahnungen so lange zurückhalten konnte. In dieser Verbindung erlaube ich mir als meine Auffassung geltend zu machen, dass ABEL's epochemachende Arbeiten für GALOIS' Ideen in mehr als einem Sinne des Wortes die Bahn gebrochen haben. Sehen wir auch davon ab, dass GALOIS von ABEL inspirirt war, so dürfte es doch am Platze sein, einmal daran zu erinnern, dass die Mathematiker unserer Zeit erst durch das Studium von ABEL's durchsichtigen und tiefen Untersuchungen dazu in den Stand gesetzt wurden, GALOIS' ebenso schwer zugängliche als tiefe Ideen zu verstehen.

Nach meiner Ansicht kann man den Mathematikern noch heute keinen besseren Rath geben, als ABEL's Werke im *Original* zu lesen.

tung erst so spät explicite gegeben und verwerthet wurde, kann gewiss nur darin seine Erklärung finden, dass die älteren Geometer unseres Jahrhunderts sich grösstentheils wenig mit der Analysis beschäftigt haben. In dieser Verbindung kann ich nicht unterlassen nochmals zu beklagen, dass der grösste analytische Geometer jener Zeit: JULIUS PLÜCKER, so früh von der Geometrie weggezogen wurde.

In der xy-Ebene nehmen wir eine algebraische Curve fünfter Ordnung

$$\chi(xy) = 0,$$

die zwei Doppelpunkte erster Ordnung d und δ besitzt. Dabei wollen wir keineswegs die Möglichkeit ausschliessen, dass diese Curve noch weitere singuläre Punkte enthält, oder dass sie sogar in einfachere Curven zerfällt.

Die Curve $\chi(xy) = 0$, die gegeben sein soll, schneiden wir mit einem *veränderlichen* Kegelschnitt

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 = 0,$$

der durch die Doppelpunkte d und δ hindurchgeht, und somit die Curve $\chi = 0$ in sechs veränderlichen Punkten

$$x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ \ldots x_6, y_6$$

trifft. Bilden wir dann nach ABEL's Vorschrift (vgl. die von SYLOW und mir besorgte neue Ausgabe von ABEL's Werken, Bd. I, p. 167) das Integral

$$\int \frac{\bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 y + \bar{a}_3 x^2 + \bar{a}_4 xy + \bar{a}_5 y^2}{\chi_{y'}}\, dx$$

für jeden unter den sechs veränderlichen Schnittpunkten $x_1 y_1 \ldots x_6 y_6$, so hat die Summe dieser sechs Integrale:

$$\sum_k^{12\ldots6} \int \frac{\bar{a}_0 + \bar{a}_1 x_k + \bar{a}_2 y_k + \bar{a}_3 x_k^2 + \bar{a}_4 x_k y_k + \bar{a}_5 y_k^2}{\chi_{y'_k}}\, dx_k$$

immer einen constanten Werth.

Es ist hierbei unsere Voraussetzung, dass auch der Ausdruck

$$\bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 y + \bar{a}_3 x^2 + \bar{a}_4 xy + \bar{a}_5 y^2,$$

dessen Coefficienten $\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_5$ gegebene Constante bezeichnen, in den beiden Doppelpunkten d und δ verschwindet.

Die sechs veränderlichen Parameter $a_0 \ldots a_5$ sind durch zwei lineare und homogene Relationen gebunden, die davon herrühren, dass der veränderliche Kegelschnitt durch die beiden Doppelpunkte d und δ gehen soll. Greifen wir daher unter allen Kegelschnitten (1), die unsere Bedingung erfüllen, vier heraus:

$$f_1(xy) = 0,\ f_2 = 0,\ f_3 = 0,\ f_4 = 0,$$

die keine lineare Relation mit constanten Coefficienten:

$$e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_3 f_3 + e_4 f_4 \equiv 0$$

befriedigen, so ist

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 = 0$$

die allgemeine Gleichung aller Kegelschnitte, die durch d und δ gehen.

Setzen wir nun:

$$\int \frac{f_i(xy)\,dx}{\chi_{y'}} = \varphi_i(x),$$

bilden wir ferner, indem wir unter

$$x_1 y_1;\ x_2 y_2;\ \ldots\ x_6 y_6$$

die sechs veränderlichen Schnittpunkte der festen Curve $\chi = 0$ mit einem veränderlichen Kegelschnitte der Schaar:

$$c_1 f_1 + \cdots + c_4 f_4 = 0$$

verstehen, für jedes i die Summe

$$\sum_k^{1\ldots6} \int \frac{f_i(x_k y_k)\,dx_k}{\chi'_{y_k}} \equiv \varphi_i(x_1) + \cdots + \varphi_i(x_6),$$

so ist diese Summe für jedes i gleich einer Constanten, die wir ohne Beschränkung gleich Null setzen können. Wir erhalten also vier linear-unabhängige Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x_1) + \varphi_1(x_2) + \cdots + \varphi_1(x_6) = 0,\\
&\varphi_2(x_1) + \varphi_2(x_2) + \cdots + \varphi_2(x_6) = 0,\\
&\varphi_3(x_1) + \varphi_3(x_2) + \cdots + \varphi_3(x_6) = 0,\\
&\varphi_4(x_1) + \varphi_4(x_2) + \cdots + \varphi_4(x_6) = 0.
\end{aligned}$$

Dass diese Gleichungen eine Lösung unseres allgemeinen Problems liefern, folgt daraus, dass die sechs Coordinaten $x_1 \dots x_6$ durch drei und nur drei Relationen gebunden sind, indem durch die beiden Doppelpunkte d, δ und drei auf $\chi = 0$ beliebig gewählte Punkte x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 immer ein ganz bestimmter Kegelschnitt hindurchgeht, der $\chi = 0$ in drei weiteren Punkten schneidet. Wir fügen hinzu, dass die hiermit gefundene Lösung unseres allgemeinen Problems insbesondere eine Lösung des specielleren Problems darstellt, das wir als das reducirte Problem bezeichnet haben. Wäre nämlich z. B. die Grösse x_4 eine Function von x_1 und x_2 allein, so würden alle ∞^1 Kegelschnitte, die mit der festen Curve $\chi = 0$ die vier Punkte

$$d, \delta;\ x_1 y_1;\ x_2 y_2$$

gemein haben, diese Curve in noch einem festen Punkte, nämlich $x_4 y_4$ schneiden.

Wir können daher das folgende Theorem aufstellen:

Theorem X. *Wir finden eine Lösung unseres reducirten Problems in der folgenden Weise. Wir nehmen eine irreducible oder zerfallene Curve fünfter Ordnung $\chi(xy) = 0$ mit zwei Doppelpunkten, d, δ und bestimmen den allgemeinen Kegelschnitt:*

$$c_1 f_1(xy) + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 = 0,$$

der durch d und δ hindurchgeht. Bezeichnen wir nun die sechs veränderlichen Schnittpunkte eines solchen Kegelschnitts mit der Curve $\chi = 0$ durch

$$x_1 y_1;\ x_2 y_2;\ \dots\ x_6 y_6$$

und setzen

$$\int^{x_k} \frac{f_i(x_k y_k)\, d x_k}{\chi'_{y_k}} = \varphi_i(x_k)$$

(wobei zu beachten ist, dass die sechs Integrale $\varphi_i(x_1)$, $\varphi_i(x_2)$, $\dots$ $\varphi_i(x_6)$, sobald die Curve $\chi = 0$ zerfällt, verschiedene Formen haben werden), so bestehen vier Gleichungen von der Form

$$0 = \varphi_i(x_1) + \varphi_i(x_2) + \varphi_i(x_3) + \varphi_i(x_4) + \varphi_i(x_5) + \varphi_i(x_6).$$

Es stellen daher die vier Gleichungen:

$$\Sigma_i = \varphi_i(t_1) + \varphi_i(t_2) + \varphi_i(t_3) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

eine Translations-M_3 dar, die auch durch die Gleichungen:

$$\Sigma_i = -\varphi_i(t_4) - \varphi_i(t_5) - \varphi_i(t_6) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

definirt wird. Die Parameter t_4, t_5 und t_6 drücken sich als algebraische Functionen von t_1, t_2 und t_3 aus, und zwar sind die neun Ableitungen von t_4, t_5 und t_6 nach t_1, t_2 und t_3 sämmtlich von Null verschieden.

In der xy-Ebene giebt es ∞^{20} verschiedene Curven fünfter Ordnung. Unter ihnen giebt es ∞^{18}, die zwei Doppelpunkte erster Ordnung besitzen. Jede derartige Curve liefert eine Translations-M_3, die unsere Forderungen erfüllt. Das ABEL'sche Theorem giebt uns daher, wie eine Abzählung zeigt, ∞^{29} verschiedene M_3, die Lösungen des reducirten Problems darstellen. Auf der anderen Seite erkennen wir durch Betrachtungen, die mit den in meiner Abhandlung über »Translationsflächen und das ABEL'sche Theorem« durchgeführten Entwickelungen grosse Aehnlichkeit darbieten, dass unser reducirtes Problem gerade ∞^{29} Lösungen besitzt, die sich überdies durch Anfangsbedingungen eindeutig bestimmen lassen.

Wir können daher das folgende Theorem aufstellen:

Theorem XI. *Alle M_3 des Raumes: $x_1 x_2 x_3 x_4$, die in mehrfacher Weise als Translations-M_3 aufgefasst werden können, zerfallen in drei Hauptkategorien, deren jede mehrere Unterklassen umfasst. Die M_3 der ersten Kategorie werden erhalten, wenn man das Abel'sche Theorem in der früher angegebenen Weise auf eine ebene Curve fünfter Ordnung mit zwei oder noch mehr Doppelpunkten anwendet; da diese Curve rreducibel oder reducibel sein kann, erhält man mehrere Unterklassen, die wir hier nicht aufzählen.*

Die M_3 der zweiten Kategorie werden erhalten, wenn auf eine nicht-developpable Fläche des Raumes $x_1 \dots x_4$, die in zweifacher Weise als Translationsfläche aufgefasst werden kann, einfach un-

endlich viele Translationen des Raumes $x_1 \dots x_4$ ausgeführt werden, die keine continuirliche Gruppe bilden. Die M_3 der dritten Kategorie sind developpabel und zwar entweder cylindrisch oder eben; in einem früheren Theorem wurden alle M_3 dieser dritten Kategorie aufgezählt.

Da die letzten Entwickelungen dieser Abhandlung in sehr knapper Form dargestellt worden sind, werden wir bei einer anderen Gelegenheit diesen Gegenstand ausführlicher behandeln. Gleichzeitig werden wir die wichtigeren Unterklassen unserer drei M_3-Kategorien genauer discutiren. Zu diesem Zwecke dehnen wir u. a. unsere alten Untersuchungen über die *logarithmische Transformation* und den tetraëdralen Linien-complex auf n Dimensionen aus. Indem wir dabei u. a. die Formel:

$$\log x_k = \int \frac{F_1(f_1)\,df_1}{a_k + f_1} + \int \frac{F_2(f_2)\,df_2}{a_k + f_2} + \int \frac{F_3(f_3)\,df_3}{a_k + f_3}$$

aufstellen und zunächst dem Index k die Werthe 1, 2, 3 ertheilen, erhalten wir im Raume x_1, x_2, x_3 drei Flächenschaaren: jede Fläche einer Schaar wird von allen Flächen der beiden anderen Schaaren nach Curven geschnitten, die im Dupin'schen Sinne conjugirt sind. Ertheilen wir dagegen k die Werthe 1, 2, 3, 4, so erhalten wir im Raume $x_1 \dots x_4$ eine Mannigfaltigkeit: $x_4 = \varphi(x_1 x_2 x_3)$ oder sagen wir: $z = \varphi(x_1 x_2 x_3)$, deren zugehörige Monge'sche Gleichung

$$\sum \frac{d^2 z}{dx_i dx_k}\, dx_i dx_k = 0\,,$$

sowie die entsprechende partielle Differentialgleichung erster Ordnung integrirt werden können. Diese beiden Sätze werden auf n-Dimensionen ausgedehnt. In dieser Weise ergeben sich viele Resultate, die unter functionentheoretischem wie geometrischem Gesichtspunkte bedeutendes Interesse darbieten [1]).

---

1) Hier mögen noch die beiden folgenden Bemerkungen ihren Platz finden.

Das Problem, alle Transformationen einer nichtintegrablen Pfaff'schen Gleichung $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$ zu finden, die Integralcurven, die sich berühren, in ebensolche überführen, deckt sich, wie ich schon im Jahre

1871 angedeutet habe, mit der Bestimmung aller Osculationstransformationen der Ebene, die implicite in meiner Arbeit »Ueber Complexe etc.« geleistet wurde (Math. Ann. Bd. V).

Enthält eine gemischte Gruppe m Schaaren, deren Transformationen $T_1, T_2 \ldots T_m$ heissen, so besteht immer eine symbolische Gleichung $T_i T_k = T_j$. Hiermit ist eine *Substitutionsgruppe* S bestimmt. Wird ein Integrationsproblem von dieser gemischten Gruppe beherrscht, so beruht alles auf der Zusammensetzung der Substitutionsgruppe S und der Zusammensetzung einer continuirlichen Gruppe T_k. Man integrirt zuerst eine Differentialgleichung oder ein System von Differentialgleichungen, deren Beschaffenheit nur von der Zusammensetzung der betreffenden continuirlichen (endlichen oder unendlichen) Gruppe T_k abhängt. Sodann hat man ein functionentheoretisches Problem zu erledigen, dessen Beschaffenheit von der Zusammensetzung der continuirlichen Gruppe S abhängt. Diese Gruppe S kann nur dann eine unendliche sein, wenn die Zahl m unendlich gross ist.

INHALT.

Seite

F. Stohmann, Calorimetrische Untersuchungen. Sechsunddreissigste Abhandlung 1

Otto Staude, Die Gleichung der Ellipsoide und Hyperboloide als Resolvente der biquadratischen Gleichung der gebrochenen Focaldistanzen. Mit einer Figur 75

W. Scheibner, Die gestörte elliptische Bewegung. Hansen's ideale Coordinaten. Mit 4 Figuren. 85

Otto Staude, Die algebraische Grundlage der Focaleigenschaften der Paraboloide. Mit 2 Figuren. 172

Sophus Lie, Das Abel'sche Theorem und die Translationsmannigfaltigkeiten. 181

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Math Classe

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1897.

III.

MIT SECHS FIGUREN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1897.

Einzelpreis: 1 Mark.

Friedrich Engel, *Ueber lineare homogene Transformationen.*

Jede infinitesimale lineare homogene Transformation:

$$Xf = \sum_{\nu k}^{1\ldots n} a_{\nu k} x_k \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

erzeugt nach Lie eine eingliedrige Gruppe, deren allgemeine endliche Transformation durch Integration des simultanen Systems

$$\frac{dx'_\nu}{dt} = \sum_{k}^{1\ldots n} a_{\nu k} x'_k \quad (\nu = 1, \ldots n) \tag{1}$$

mit den Anfangsbedingungen: $(x'_\nu)_{t=0} = x_\nu$ gefunden wird; wir denken uns diese allgemeine endliche Transformation in der Form

$$x'_\nu = \sum_{k}^{1\ldots n} \alpha_{\nu k} x_k \quad (\nu = 1, \ldots n) \tag{2}$$

geschrieben, wo die $\alpha_{\nu k}$ gewisse Functionen der $a_{\nu k}$ und von t sind.

Zu der infinitesimalen Transformation Xf gehört nun eine gewisse algebraische Gleichung, ihre charakteristische Gleichung:

$$| a_{\nu k} - \varepsilon_{\nu k} \varrho | = 0 , \tag{3}$$

wo $\varepsilon_{\nu k}$ gleich Null oder Eins ist, je nachdem ν und k von einander verschieden oder einander gleich sind, und wo der Ausdruck: $| a_{\nu k} - \varepsilon_{\nu k} \varrho |$ die n-reihige Determinante bezeichnet, deren allgemeines Element die Gestalt: $a_{\nu k} - \varepsilon_{\nu k} \varrho$ besitzt. Ebenso gehört zu der endlichen Transformation (2) die charakteristische Gleichung:

$$| \alpha_{\nu k} - \varepsilon_{\nu k} \sigma | = 0 . \tag{4}$$

Zwischen diesen beiden charakteristischen Gleichungen besteht eine eigenthümliche Beziehung, die sich unmittelbar darbietet, wenn man sich die infinitesimale Transformation Xf nach dem Vorgange von LIE auf die Form:

$$\overline{Xf} = \sum_{\nu}^{1\ldots n} \sum_{k}^{1\ldots \nu} \bar{a}_{\nu k} y_k \frac{\partial f}{\partial y_k}$$

gebracht denkt, wobei dann auch die endliche Transformation (2) eine entsprechende Form erhält. Es stellt sich nämlich heraus, dass, wenn $\varrho_1, \ldots \varrho_n$ die Wurzeln von (3) sind, dann jedesmal: $e^{\varrho_1 t}, \ldots e^{\varrho_n t}$ die Wurzeln von (4) sind. Diese Beziehung zwischen den beiden charakteristischen Gleichungen (3) und (4) hat wohl jeder bemerkt, der sich mit der Erzeugung endlicher linearer homogener Transformationen durch infinitesimale Transformationen dieser Art beschäftigt hat[1]), sie ist also nichts Neues. Dagegen ist mir nicht bekannt, dass schon jemand für diese Beziehung einen Beweis geliefert hätte, der nicht von der Zurückführung der infinitesimalen Transformation Xf auf irgend eine Normalform Gebrauch machte. Ich werde daher jetzt einen solchen Beweis liefern; daran schliesse ich eine Anwendung des gewonnenen Satzes auf beliebige Gleichungen.

§ 1.

Die Functionen $\alpha_{\nu j}$ in den Gleichungen (2) erfüllen augenscheinlich das simultane System:

$$\frac{d\alpha_{\nu j}}{dt} = \sum_{k}^{1\ldots n} a_{\nu k} \alpha_{kj} \quad (\nu, j = 1, \ldots n) \tag{5}$$

sowie die Anfangsbedingungen: $[\alpha_{\nu j}]_{t=0} = \varepsilon_{\nu j}$ und sind hierdurch vollständig bestimmt. Nach dem Vorgange von SCHUR (Math. Ann. 38, S. 263 f.) stellen wir die $\alpha_{\nu j}$ durch gewisse beständig convergente Potenzreihen dar, indem wir setzen:

$$\alpha_{\nu j} = \sum_{\mu}^{0\ldots\infty} \frac{t^\mu}{\mu!} A_{\nu j}^{(\mu)} \quad (\nu, j = 1 \ldots n) \tag{6}$$

---

1) Man vergl. z. B. die Betrachtungen von STUDY, diese Berichte 1893, S. 680 ff.

und unter den $A_{\nu j}^{(\mu)}$ ganze homogene Functionen μ-ten Grades der $a_{\nu k}$ verstehen, die auf Grund der Recursionsformel:

$$(7) \quad A_{\nu j}^{(\mu+1)} = \sum_{k}^{1\ldots n} a_{\nu k} A_{kj}^{(\mu)} \quad (\nu, j = 1, \ldots n;\ \mu = 0, 1, 2 \ldots)$$

zu berechnen sind, während $A_{\nu j}^{(0)} = \varepsilon_{\nu j}$ ist.

Es kommt nun darauf an, zu beweisen, dass die Gleichung:

$$(8) \quad | \alpha_{\nu k} - \varepsilon_{\nu k} e^{\varrho t} | = 0$$

von den Wurzeln der Gleichung (3) befriedigt wird. Um das zu erreichen, betrachten wir den Ausdruck:

$$(9) \quad | \alpha_{\nu k} \cdot e^{-\varrho t} - \varepsilon_{\nu k} | = e^{-n\varrho t} | \alpha_{\nu k} - \varepsilon_{\nu k} e^{\varrho t} | .$$

Da die $\alpha_{\nu j}$ den Differentialgleichungen (5) genügen, so befriedigen die Ausdrücke:

$$(10) \quad \beta_{\nu j} = \alpha_{\nu j} \cdot e^{-\varrho t} \quad (\nu, j = 1, \ldots n) ,$$

wie man sich leicht überzeugt, die Differentialgleichungen:

$$(11) \quad \frac{d\beta_{\nu j}}{dt} = \sum_{k}^{1\ldots n} (a_{\nu k} - \varepsilon_{\nu k}\varrho)\beta_{kj} \quad (\nu, j = 1 \ldots n)$$

und überdies die Anfangsbedingungen: $[\beta_{\nu j}]_{t=0} = \varepsilon_{\nu j}$. Demnach ist:

$$\alpha_{\nu k} e^{-\varrho t} = \sum_{\mu}^{0\ldots\infty} \frac{t^\mu}{\mu!} B_{\nu j}^{(\mu)} ,$$

wo $B_{\nu j}^{(\mu)}$ aus $A_{\nu j}^{(\mu)}$ dadurch hervorgeht, dass man jedes a_{ik} durch $a_{ik} - \varepsilon_{ik}\varrho$ ersetzt.

Nunmehr ergiebt sich:

$$| \alpha_{\nu k} e^{-\varrho t} - \varepsilon_{\nu k} | = \left| \sum_{\mu}^{1\ldots\infty} \frac{t^\mu}{\mu!} B_{\nu j}^{(\mu)} \right|$$

$$= \left| t(a_{\nu j} - \varepsilon_{\nu j}\varrho) \right| \cdot \left| \sum_{\mu}^{0\ldots\infty} \frac{t^\mu}{(\mu+1)!} B_{\nu j}^{(\mu)} \right| ,$$

wobei die Recursionsformeln (7) und der Multiplicationssatz der Determinanten benutzt worden sind. Wir bekommen also:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} | \alpha_{\nu k} - \varepsilon_{\nu k} e^{\varrho t} | = \\ = t^n \cdot e^{n\varrho t} \cdot | a_{\nu j} - \varepsilon_{\nu j}\varrho | \cdot \left| \sum_{\mu}^{0\ldots\infty} \frac{t^\mu}{(\mu+1)!} B_{\nu j}^{(\mu)} \right| . \end{array} \right.$$

Damit ist unser Ziel schon erreicht, denn aus (12) geht hervor, dass die Wurzeln der Gleichung (3) auch der Gleichung (8) genügen. Wir wollen aber noch einen Schritt weiter gehen und auch noch die übrigen Wurzeln von (8) bestimmen. Dazu hilft uns der Umstand, dass sich die Determinante:

$$\left| \sum_{\mu}^{0\ldots\infty} \frac{t^{\mu}}{(\mu+1)!} B_{\nu j}^{(\mu)} \right|$$

in ein beständig convergentes Product von Determinanten entwickeln lässt, wie ich in diesen Berichten 1892, S. 50 gezeigt habe. Vermöge dieser Productentwickelung ergiebt sich nämlich aus (12):

$$(13)\quad \left\{ \begin{array}{c} | \alpha_{\nu k} - \varepsilon_{\nu k} e^{\varrho t} | = \\ \frac{1}{2} t \left(n\varrho + \sum_{1}^{n} {}_{\tau} a_{\tau\tau} \right) \\ = t^{n} \cdot e \qquad \cdot | a_{\nu k} - \varepsilon_{\nu k} \varrho | \cdot \\ \cdot \prod_{1}^{\infty} {}_{\mu} \left| \varepsilon_{\nu k} + \frac{t(a_{\nu k} - \varepsilon_{\nu k}\varrho)}{2\mu\pi i} \right| \cdot \left| \varepsilon_{\nu k} - \frac{t(a_{\nu k} - \varepsilon_{\nu k}\varrho)}{2\mu\pi i} \right| . \end{array} \right.$$

Wenn daher $\varrho_1, \ldots \varrho_n$ die Wurzeln der Gleichung (3) sind, so werden alle Wurzeln der Gleichung (8) durch die Ausdrücke:

$$\varrho_1 + \frac{2\mu\pi i}{t}, \ \ldots, \ \varrho_n + \frac{2\mu\pi i}{t} \quad (\mu = 0, \pm 1, \ldots)$$

dargestellt.

§ 2.

Lässt man in (3) die Grössen $a_{\nu k}$ alle möglichen Werthe annehmen, so erhält man, wie schon verschiedentlich bemerkt worden ist, alle möglichen Gleichungen n-ten Grades, in denen der Coefficient der höchsten Potenz der Unbekannten gleich Eins ist. Demnach lassen sich die Betrachtungen des vorigen Paragraphen für beliebige algebraische Gleichungen verwerthen.

Wir setzen

$$(14)\quad | \varepsilon_{\nu k}\varrho - a_{\nu k} | = \varrho^{n} + g_1 \varrho^{n-1} + \cdots + g_n = G(\varrho)$$

und ertheilen in der Gleichung (13) der Grösse t den Werth Eins. Dann geht aus (13) hervor, dass das Product:

$$(15)\quad e^{\frac{1}{2}(n\varrho - g_1)} \cdot G(\varrho) \cdot \prod_{1}^{\infty} {}_{\mu} \left\{ \frac{G(\varrho + 2\mu\pi i)}{(2\mu\pi i)^{n}} \cdot \frac{G(\varrho - 2\mu\pi i)}{(-2\mu\pi i)^{n}} \right\}$$

in der Form:

$$e^{n\varrho} + \gamma_1 e^{(n-1)\varrho} + \cdots + \gamma_{n-1} e^{\varrho} + \gamma_n$$

darstellbar ist, wo die γ von ϱ unabhängig sind. Nun aber ist:

$$\frac{G(\varrho + 2\mu\pi i)}{(2\mu\pi i)^n} = 1 + \frac{h_1}{2\mu\pi i} + \frac{h_2}{(2\mu\pi i)^2} + \cdots + \frac{h_n}{(2\mu\pi i)^n},$$

wo $h_1, \ldots h_n$ ganze Functionen von $g_1, \ldots g_n$ und ϱ sind. Folglich wird:

$$\frac{G(\varrho + 2\mu\pi i)}{(2\mu\pi i)^n} \cdot \frac{G(\varrho - 2\mu\pi i)}{(-2\mu\pi i)^n} = 1 + u_\mu,$$

wo u_μ die Form hat:

$$u_\mu = \frac{H_1}{(2\mu\pi)^2} + \frac{H_2}{(2\mu\pi)^4} + \cdots + \frac{H_n}{(2\mu\pi)^{2n}},$$

unter $H_1, \ldots H_n$ wieder ganze Functionen von ϱ und $g_1, \ldots g_n$ verstanden. Demnach convergirt die Reihe:

$$\sum_{\mu}^{1 \ldots \infty} u_\mu$$

für alle endlichen Werthe von $\varrho, g_1, \ldots g_n$ unbedingt und daraus können wir schliessen, dass das Product (15) in eine beständig convergente Potenzreihe von $\varrho, g_1, \ldots g_n$ entwickelt werden kann. Darin aber liegt, dass $\gamma_1, \ldots \gamma_n$ beständig convergente Reihen von $g_1, \ldots g_n$ sind.

Wir können somit den Satz aussprechen:

Hat man die Gleichung: $\varrho^n + g_1 \varrho^{n-1} + \cdots + g_n = 0$ *und definirt man* σ *durch die Gleichung:* $\sigma = e^{\varrho}$, *so genügt* σ *einer Gleichung n-ten Grades von der Form* $\sigma^n + \gamma_1 \sigma^{n-1} + \ldots + \gamma_n = 0$, *wo* $\gamma_1, \ldots \gamma_n$ *beständig convergente Potenzreihen von* $g_1, \ldots g_n$ *sind.*

Dasselbe können wir aber auch so ausdrücken:

Die elementaren symmetrischen Functionen von $e^{x_1}, \ldots e^{x_n}$ *sind als beständig convergente Potenzreihen der elementaren symmetrischen Functionen von* $x_1, \ldots x_n$ *darstellbar.*

Dieser Satz ist allerdings nur ein ganz besonderer Fall eines allgemeinen Satzes derselben Art, es ist aber bemerkenswerth, dass er sich hier ergeben hat, ohne dass wir auf den Fundamentalsatz der Algebra zurückgegangen sind.

W. Ostwald, *Studien über die Bildung und Umwandlung fester Körper.* (Mit 6 Textfiguren.)

1. Abhandlung. Uebersättigung und Ueberkaltung.

In Veranlassung der Abfassung einiger Kapitel meines Lehrbuches der allgemeinen Chemie habe ich mehrere bereits bekannte Versuche bezüglich der Bildung fester Körper aus Lösungen und Schmelzen, sowie ihrer polymorphen Umwandlungen wiederholt, um die Erscheinungen aus eigener Anschauung kennen zu lernen. Dabei ergab sich alsbald eine Anzahl von Fragen und Problemen, deren Verfolgung mich in eine ziemlich verzweigte experimentelle Untersuchung führte. Von den Ergebnissen dieser Arbeiten, die ich aus naheliegenden Gründen nur langsam fördern kann, beabsichtige ich fortlaufend das mitzutheilen, was sich in einiger Abrundung darstellen lässt, wenn es auch in der Natur solcher Arbeiten liegt, dass sie schliesslich immer mehr ungelöste, als gelöste Probleme ergeben. Doch scheint mir die Veröffentlichung gegenwärtig nicht ohne Nutzen zu sein, nachdem durch den grossen Erfolg, den einige Richtungen der allgemeinen Chemie in den letzten Jahren erlangt haben, die Arbeit in diesem Gebiete einer gewissen Einseitigkeit zu verfallen droht.

1. Es ist eine wohlbekannte Thatsache, dass die Erstarrung einer überkalteten Flüssigkeit, die unter gegebenen Umständen freiwillig nicht erfolgt, völlig sicher durch eine Spur des fraglichen Stoffes im festen Zustande (oder eines in strengem Sinne isomorphen Körpers) hervorgebracht wird. Doch ist es mir nicht bekannt, ob ein Versuch vorliegt, die Menge des festen Körpers zu bestimmen, die mindestens vorhanden sein muss, damit der Versuch gelingt. Dass sie sehr gering sein kann, ist namentlich durch die zahlreichen Untersuchungen an übersättigter Glaubersalzlösung zu Tage getreten, wo die zufällig im Staube vorhandenen Theilchen dieses Salzes bereits fast immer hinreichen, um

die Ausscheidung des festen Salzes eintreten zu lassen. Doch ist offenbar das Arbeiten gerade mit diesem Stoffe am wenigsten geeignet, ein klares Bild der Verhältnisse zu geben, da er wegen seiner grossen Verbreitung nur sehr schwer aus den Versuchsmaterialien ferngehalten werden kann, und man daher niemals sicher ist, ob man es mit der zum Versuch genommenen oder einer zufällig dazugelangten Stoffmenge zu thun hat.

2. Viel geeigneter sind solche Stoffe, die erstens keine weite Verbreitung in der Natur haben, zweitens Eigenschaften, wie Flüchtigkeit, Zerfliesslichkeit oder dergleichen besitzen, durch welche zufällige Stäubchen unter vorhandenen oder leicht herzustellenden Bedingungen nur eine begrenzte Lebensdauer *als feste Körper* haben. Die Zahl solcher Stoffe ist recht gross, insbesondere liefert uns die organische Chemie eine fast unbegrenzte Auswahl geeigneter Versuchsobjecte. Sucht man unter den möglichst indifferenten, wenig flüchtigen organischen Stoffen, deren Schmelzpunkt nicht über 40° oder 50° liegt, so kann man fast sicher sein, alsbald ein geeignetes Object zu finden, das sich, was das erste Erforderniss ist, auf Zimmertemperatur überkalten lässt, ohne in noch so langer Zeit freiwillig zu erstarren.

Ein sehr brauchbares Material ist das jetzt zu mässigem Preise in grosser Reinheit für medicinische Zwecke in den Handel gebrachte *Salol*, der Salicylsäure-Phenylester. Der Stoff schmilzt bei 39,5° und eine geschmolzene Probe bleibt unbegrenzt lange flüssig, wenn sie gegen den Zutritt von Stäubchen des festen Stoffes geschützt ist, was gar keine Schwierigkeit macht. Andere Stoffe können beliebig mit dem überkalteten Salol in Berührung gebracht werden, ohne dass Erstarrung eintritt; ebensowenig wirkt heftige Bewegung oder auch Reiben mit scharfkantigen Gegenständen, das man so oft als Mittel gegen Ueberkaltung angegeben findet. Auf meinem Schreibtische befinden sich mehrere mit flüssigem Salol gefüllte einerseits offene Röhren, die seit vier Wochen ohne jede Vorsicht gehandhabt werden, ohne dass ihr flüssiger Inhalt erstarrt wäre. Ebenso halten sich offen auf einer Glasplatte liegende Tropfen unbegrenzt in einem Zimmer, in dem nicht mit Salol gearbeitet wird. Auf dem Arbeitstische meines Laboratoriums, der seit zwei Monaten zu mannigfaltigen Arbeiten mit diesem Stoff gedient hat, sind offene Tropfen nicht so haltbar; dort erstarren gewöhnlich einige nach kurzer Zeit. Indessen habe ich doch, ohne besondere Versuche nach dieser

Richtung anzustellen, nach vier bis sechs Tagen einzelne Tropfen noch flüssig gefunden. Dass sie nicht durch irgendwelche Veränderungen zu erstarren unfähig geworden waren, konnte leicht durch Einsäen eines festen Krystalls erwiesen werden.

3. Aehnlich wie dieser Stoff verhält sich Thymol, auf dessen Fähigkeit, starke Ueberkaltungen auszuhalten, mich mein College F. Stohmann aufmerksam machte. Indessen zieht das flüssige Thymol merklich Wasser an und verliert mit der Zeit an Erstarrungsfähigkeit, wobei die auf Glas gesetzten Tropfen auseinanderfliessen.

4. Ganz anders ist das Verhalten des gewöhnlichen Kalialauns in übersättigter Lösung. In einem Raume, in welchem seit längerer Zeit nicht mit Alaun gearbeitet worden ist, verhalten sich die meisten Gegenstände indifferent gegen eine übersättigte Alaunlösung, und man kann einen Tropfen einer solchen, den man zweckmässig unter einem schwach (20- bis 40mal) vergrössernden Mikroskop beobachtet, mit einem Glasstabe, einem Haar, einem Holzstäbchen u. dergl. berühren, oder in die Flüssigkeit irgend welche Pulver eintragen, ohne dass die Ausscheidung der schöngeformten oktaëdrischen Krystalle dieses Salzes erfolgt. Dies ändert sich aber schnell, sobald in dem Raume etwas mit dem Salze gearbeitet und dadurch der Staub alaunhaltig gemacht worden ist. Es wird dann bald unmöglich, auf dem Objectträger einen übersättigten Tropfen zu haben, der nicht alsbald an einzelnen Stellen auszukrystallisiren beginnt. Die im Laboratorium vorhandenen Gegenstände rufen fast alle sofort Krystallisation im Tropfen hervor. Eine Reibschale von Achat, in der Alaun gerieben worden war, ertheilte nach dem Ausspülen mit Wasser und dem Abtrocknen mit einem Handtuche allen Stoffen, die darin verrieben wurden, die Eigenschaft, in der übersättigten Lösung massenhafte Oktaëder hervorzurufen, und verlor sie erst nach sehr energischer Reinigung durch Reiben unter einem Wasserstrahl.

5. Zeigen diese Beobachtungen bereits, dass überaus kleine Mengen fester Substanz genügen, um die fragliche Reaction hervorzurufen, so wird dieser Eindruck noch durch folgende Versuche verstärkt.

Ein Menschenhaar ist ohne Einwirkung auf überkaltetes Salol. Streicht man mit dem Haar über einen festen Krystall des Stoffes und bringt es dann in das flüssige Salol, so ruft es

sofort Erstarrung hervor. Man braucht zu diesem Zweck nicht etwa einen besonderen Druck anzuwenden; ein leises Ueberstreichen, wobei das Haar nur wenig gekrümmt wird, genügt in den meisten Fällen. Ist man sehr vorsichtig, so gelingt es auch zuweilen, das Haar keimfrei abzuheben, so dass es nicht auf die Flüssigkeit wirkt; doch trifft dies vielleicht nur einmal unter zehnen zu.

6. Da ein Haar eine unebene Oberfläche hat, die wie eine Feile auf den weichen Salolkrystall wirken mag, so ersetzte ich es durch ein möglichst fein gezogenes Glashaar. Auch hier trat die Wirkung mit grosser Regelmässigkeit ein. Wurde das Haar nach der Berührung mit dem Krystall zwischen den Fingern abgestrichen, so verlor es auch nach zwanzigmaligem Durchziehen seine Wirkung nicht. Zwischen zwei Blättern von weichem Kautschuk konnte indessen das Salol ziemlich leicht abgewischt werden. Hat man ein abgebrochenes Haar genommen, so bleibt leicht an der Basis etwas haften, was Krystallisation hervorruft; man kann dies vermeiden, wenn man ein ausgezogenes Haar nimmt.

7. Ein Glashaar wurde durch Berührung wirksam gemacht, und dann in feinem Quarzpulver abgespült. Es blieb wirksam, und auch das Quarzpulver hatte einen Theil der Wirksamkeit angenommen, indem einige Proben, aber nicht alle, Erstarrung hervorriefen.

8. Ein Glasstreifen von 3 mm Breite wurde durch Ausbreiten von geschmolzenem Salol und Erstarrenlassen desselben mit einer festhaftenden Schicht überzogen, deren Oberfläche durch kräftiges Abreiben von allen losen Theilchen befreit wurde. Nahm ich mit diesem Glasstreifen etwas von einem zarten Pulver auf (ich benutzte feines Quarzmehl) und schüttete dieses Pulver ohne weitere Reibung in den überkalteten Tropfen, so begann alsbald die Krystallisation.

In keinem Falle wurde versäumt, durch einen blinden Parallelversuch die Unwirksamkeit der benutzten Materialien und Gegenstände zu prüfen. Eine völlig sichere Methode des »Sterilisirens« ist eine Erwärmung über 40°. Ueber einen entsprechenden anschaulichen Versuch wird etwas später berichtet werden.

9. Die activ gemachten Stoffe behalten ihre Wirksamkeit nicht dauernd. Ein Glashaar, das mehrfach über festes Salol

geführt worden war, und deshalb in seiner ganzen Länge überall Wirksamkeit zeigte, verlor sie an vielen Stellen bereits nach fünf Minuten langem Verweilen an der Luft. Eine Anzahl solcher präparirter Haare wurde in einen leeren Exsiccator (um den Zutritt von Staub zu vermeiden) gebracht; nach drei Stunden konnten sie ihrer ganzen Länge nach durch Tropfen von flüssigem Salol gezogen werden, ohne irgend welche Wirkungen auf dieses zu äussern. Zehn oder fünfzehn Minuten nach dem Bestreichen findet man beim Durchziehen durch den flüssigen Tropfen nur einzelne Stellen wirksam. Bei einiger Geschicklichkeit gelingt es, die Krystallisation des ganzen Tropfens zu vermeiden, wenn auch sich Knoten von erstarrtem Salol am Glashaar bilden; man muss zu diesem Zwecke nur verhindern, dass die Krystalle am Glasfaden mit der Glasplatte, auf welcher der Tropfen liegt, in unmittelbare Berührung kommen. Dann kann man an den knopfartigen Verdickungen, die sich auf dem Faden ausbilden, die Zahl der Stellen zählen, an welche noch Wirksamkeit im Augenblicke des Versuches vorhanden war.

Wiederholt man den Versuch mit Salzen, wie Alaun oder Borax, so gelingt er nicht; die mit solchen Stoffen behandelten Glashaare behalten ihre Wirkung dauernd bei.

10. Die Technik dieser Versuche ist sehr einfach. Man schmilzt das Salol in einem kleinen Erlenmeyer, saugt es in ein ausgezogenes Glasrohr, das als Pipette dient, auf, und setzt damit auf eine kleine Glasplatte, wie sie als Träger für mikroskopische Objecte benutzt werden, zwanzig bis dreissig Tropfen. Diese sind in wenigen Augenblicken abgekühlt und für die Versuche fertig. Gewöhnlich erstarrt der eine oder andere Tropfen »freiwillig«, d. h. durch ein hineinfallendes Stäubchen festen Salols, die meisten bleiben tagelang flüssig.

Salzlösungen werden am besten in einem Kölbchen mit seitlichem, schrägem Stutzen aufbewahrt, nachdem man durch einiges Probiren die geeignete Concentration aufgesucht hat, bei der einerseits die Lösung nicht allzu leicht auskrystallisirt, andererseits genügend übersättigt ist, um eine schnelle und deutliche Reaction zu geben. Auch die Salzlösungen werden in Gestalt von Tropfen auf Objectträger gebracht. Da sich aber solche viel weniger lange halten, schon der Verdunstung wegen, so setzt man nur wenige Tropfen auf. Deshalb ist es bequem, die übersättigte Salzlösung längere Zeit bei gewöhnlicher Temperatur in

Vorrath aufbewahren zu können. In den erwähnten Kölbchen mit schrägem Seitenstutzen, durch den das Hineinfallen von Staub verhindert wird, gelingt dies leicht, wenn man die Vorsicht beobachtet, die zum Herausnehmen dienenden Pipetten immer in reinem Wasser aufzubewahren, und nur nass in die Lösung zu bringen. Etwa darauffallende Salzstäubchen werden dann durch Auflösung unwirksam. Beim Aufsetzen der Tropfen auf den Träger muss man vermeiden, die Spitze der Pipette mit der Platte in Berührung zu bringen. So lange kein activer Staub vorhanden ist, ist dies allerdings gleichgültig; kommt aber ein Kryställchen vor, so verursacht dessen Berührung und Verschiebung durch die Pipettenspitze alsbald die Entstehung unzähliger weiterer Krystalle, und es wird unmöglich, krystallfreie Tropfen zu erhalten. Dann muss die Pipette wieder in Wasser abgewaschen werden, oder besser, man nimmt eine andere, die inzwischen im Wasser gestanden hatte. Die Stutzen der Kolben werden durch ein übergeschobenes Glöckchen locker verschlossen.

Die Glasplatten können durch Anhauchen, wobei die vorhandenen Salzstäubchen in Lösung gehen, ziemlich vollkommen »sterilisirt« werden.

11. Beim Salol lässt sich die Erstarrung durch das Milchweisswerden des vorher glasklaren Tropfens überaus leicht beobachten. Schwieriger ist dies bei geschmolzenem Natriumthiosulfat; doch hilft hier der Umstand, dass beim Erstarren die Oberfläche uneben wird, und die kleinen Spiegelbilder der Fenster oder Lampen verschwinden. Salzlösungen werden, wie schon erwähnt, unter einem schwach vergrössernden Mikroskop oder einer starken Lupe beobachtet. Durch die Benutzung polarisirten Lichtes kann man die Beobachtung häufig nicht nur erleichtern, sondern auch zu einem überaus anmuthigen Farbenschauspiel gestalten.

12. Angesichts der aus diesen leicht zu wiederholenden Versuchen hervorgehenden enormen Empfindlichkeit der Reaction schien es fast aussichtslos, die Erscheinungen messend verfolgen zu wollen. Indessen hielt ich es doch der Mühe werth, einige Versuche in dieser Richtung zu machen. Mein Plan war, den wirksamen Stoff nach Art der Homöopathen mit einem indifferenten Material zu verreiben, und durch stufenweise Verdünnung des Ausgangsmaterials seine Concentration in messbarer Weise auf sehr geringe Beträge zu bringen. Bekanntlich erfolgt die

Bereitung der homöopathischen Heilmittel derart, dass man durch Verdünnung des Ausgangsstoffes mit seinem neunfachen Gewicht eines indifferenten Stoffes (es wird bei festen Stoffen ausschliesslich Milchzucker dazu verwendet) seine Concentration auf ein Zehntel bringt; ein Theil dieser Verreibung giebt mit weiteren neun Theilen Milchzucker die zweite Potenz und so fort. Die n-te Verreibung enthält dann, gleichmässige Vertheilung vorausgesetzt, 10^{-n} g des wirksamen Stoffes im Gramm, und man gelangt so sehr bald auf sehr kleine Mengen.

Einige Vorversuche überzeugten mich bald, dass auf diesem Wege eine Grenze thatsächlich erreichbar ist; während die ersten Verreibungen von festem Salol noch wirksam waren, gelangte ich bald zu Verdünnungen, in denen das Gemisch vollkommen die Wirkung versagte. Es ergab sich auch auf diesem Wege der schon von früheren Beobachtern gezogene Schluss, dass es sich bei diesen Auslösungen des überkalteten Zustandes um *materielle*, *an das wirkliche Vorhandensein des festen Körpers gebundene Wirkungen* handelt, und nicht etwa, wie die vorbeschriebenen Versuche fast vermuthen liessen, um eine Eigenschaft, welche die Ueberträger der Wirkung durch blosse Berührung mit der festen Substanz, ohne Transport materieller Theilchen, annehmen.

13. Die ersten Verreibungsversuche, die ich mit Salol sowie mit Thymol anstellte, ergaben ein ziemlich unerwartetes Resultat. Bezeichnen wir nach Art der Homöopathen die aufeinander folgenden, nach Zehnerpotenzen fortschreitenden Verdünnungen mit $D1$, $D2$, $D3$ u. s. w., so stellte sich heraus, dass Salol in der Verreibung $D3$ noch wirksam war, in der folgenden $D4$ dagegen nicht. Das Ergebniss war ziemlich dasselbe, ob ich zum Verreiben Milchzucker oder Quarzpulver[1]) benutzte[2]).

Ueberlegt man, dass zu einem Versuche etwa 0,1 mg des Pulvers genommen wurde, so folgt, dass eine Probe $D4$ 10^{-3} g

---

1) Das sehr reine Quarzpulver, das auch für mancherlei andere Zwecke Dienste leistet, erhielt ich zu sehr mässigem Preise aus der Kgl. Sächsischen Porzellanmanufactur in Meissen.

2) Für die Herstellung einer grösseren Anzahl solcher Verreibungen mit den Mitteln seiner gut eingerichteten Anstalt, sowie für mancherlei technische Rathschläge bin ich dem Leiter der homöopathischen Centralapotheke in Leipzig, Herrn Dr. Willmar Schwabe, zu lebhaftem Danke verpflichtet.

Salol enthielt, eine Probe $D3$ dagegen 10^{-7} g. Da der Stoff annähernd das specifische Gewicht des Wassers hat, so folgt daraus, dass die in der unwirksamen Probe enthaltene Stoffmenge einen Würfel von 0,022 mm darstellen würde, also eine mikroskopisch leicht sichtbare Grösse. Der wirksame Würfel hätte die Grösse 0,045 mm.

14. Dieses Ergebniss steht in auffallendem Widerspruch mit den früher mitgetheilten Versuchen, welche die ausserordentliche Empfindlichkeit der Reaction mit kleinsten Stoffmengen zur Anschauung gebracht haben. Die Aufklärung ergiebt sich indessen aus den Versuchen über die Vergänglichkeit der Infectionswirkung (S. 258). Denn die Deutung jener Versuche ist offenbar die, dass die sehr geringen Salolmengen in der angegebenen Zeit verdampfen und den inficirten Glasfaden rein und wirkungslos hinterlassen.

Nun kann man sich allerdings leicht dagegen schützen, dass das Salol aus dem Gemisch verdampft, indem man dieses in verschlossenen Gefässen aufbewahrt. Das Ergebniss ist indessen das gleiche: die verdünnteren Gemische zeigen sich unwirksam, auch wenn man die ganze Herstellung in verschlossenen Gefässen vorgenommen hat.

15. Für diesen Versuch bediente ich mich einer kleinen improvisirten Kollermühle, indem ich an einem horizontal rotirenden, mittelst eines Heissluftmotors kleinster Form angetriebenen Träger zwei oder vier Flaschen von etwa 100 g Inhalt mit Gummiringen befestigte, in denen sich das abgewogene Gemisch aus Quarzpulver und Salol nebst einer Anzahl kurzer starker Glasstäbe befand. Wird das Ganze in Drehung versetzt, so kollern die Glasstäbe über einander und bringen eine gute Vermischung des pulverförmigen Inhaltes zu Wege. Um das Ansetzen des Pulvers an den Wänden zu vermeiden, hängt man ein Stück Holz mit einer Schnur so neben der Mühle auf, dass die Flaschen bei jeder Drehung dagegen schlagen; die dadurch bewirkte Erschütterung klopft das Pulver von den Wänden los. Den leicht eintretenden Umstand, dass der Inhalt nur gleitet, statt zu kollern, beseitigt man dadurch, dass man ausser den Glasstäben noch einige Streifen flachen Glases hineingiebt. Hierdurch, wie durch angemessene Regelung der Geschwindigkeit, bewirkt man bald einen befriedigenden Gang. Jede Füllung einer Flasche liess ich gewöhnlich zwei bis drei Stunden gehen,

doch glaube ich, dass auch eine geringere Zeit genügt hätte. Während des Versuches waren die Flaschen mit ihren Stopfen verschlossen.

16. Die so hergestellten Gemische zeigten alle folgendes eigenthümliche Verhalten. Gleich nach der Herstellung waren grössere Verdünnungen wirksam; die frischen Verreibungen *D*4 und *D*5 brachten den überkalteten Tropfen sicher, *D*6 brachte ihn oft zum Erstarren. Diese Eigenschaft verlor sich aber mit der Zeit, und nach einem bis zwei Tagen stellte sich dauernd der früher geschilderte Zustand ein, dass die Wirkung bereits bei *D*4 verschwunden war.

Auch dieser Vorgang war davon unabhängig, ob das Gemisch offen oder verschlossen aufbewahrt wurde; ein Wegdampfen des Salols konnte also nicht die Ursache sein. Ebensowenig war es ein vollständiges Verschwinden des Salols aus dem Gemisch. Dagegen spricht zunächst, dass es sowohl beim Milchzucker wie beim Quarz stattgefunden hatte; bei dem letzteren ist eine chemische Einwirkung ausgeschlossen.

17. Es lag mir immerhin daran, das Vorhandensein des Salols in dem Gemisch *D*4 nachzuweisen. Analytisch ist dies bereits ein einigermassen heikles Problem, den organischen Stoff, der zu einem hundertstel Procent vorhanden war, zu identificiren, doch gelang Herrn Dr. Th. Paul, der mir freundlichst die Arbeit abnahm, der Nachweis. Er extrahirte eine Menge von etwa 200 g des Gemisches in einem grossen Schütteltrichter mit Petroleumäther und erhielt beim Verdunsten einen flüssigen Rückstand. Dieser konnte dadurch leicht als unverändertes Salol erkannt werden, dass er bei der Berührung mit einem über festes Salol gezogenen Platindraht sofort erstarrte. Ich habe nicht versäumt, meinerseits die Probe unter den mir bekannten Umständen zu wiederholen, und die Reaction war ganz unzweifelhaft. Damit ist bewiesen, dass die Unwirksamkeit der Verreibung *D*4 nicht von einer Zerstörung des vorhandenen Salols herrührt, sondern nur davon, dass es die Eigenschaft des *festen* Stoffes nicht mehr besitzt.

18. War sonach das Salol zwar vorhanden, doch ohne die Fähigkeit, den überkalteten Tropfen zum Erstarren zu bringen, so blieb nur der Schluss übrig, dass es nicht mehr *im festen Zustande* vorhanden war, und dieser scheint mir nach allem am wahrscheinlichsten. Wir wissen, dass an der Grenzfläche zwischen

festen Stoffen und Dämpfen immer eine Wechselwirkung derart stattfindet, dass die letzteren sich dort verdichten, und aus den Versuchen Bunsen's [1]) ist uns bekannt, mit welcher Zähigkeit die letzten Antheile Wasser an Glasflächen haften, mit welcher Kraft also die ersten gebunden werden. Auch die Oberfläche des Verdünnungsmittels Quarz oder Milchzucker muss den Saloldämpfen gegenüber eine solche Verdichtungswirkung ausüben, und dahin streben, sich mit diesen zu sättigen. Da der Dampfdruck des Salols bei gewöhnlicher Temperatur sehr klein ist, so erfordert der Vorgang auch bei sehr geringen Stoffmengen eine verhältnissmässig lange Zeit.

Dass die Annahme eines solchen Zustandes des Salols nichts den bekannten Thatsachen Widersprechendes hat, ergiebt eine kleine Ueberschlagsrechnung. Nehmen wir die Feinheit des Quarzpulvers derart an, dass es aus Würfelchen von 0,001 mm Seite besteht, was nach mikroskopischen Messungen des Materials annähernd zutrifft, so ist die Menge von 0,0001 g Salol, die in 1 g des Gemisches $D\,4$ vorhanden ist, auf die Oberfläche von $0{,}4 \times 10^{12}$ Würfelchen vertheilt, deren jedes die Oberfläche von 6×10^{-8} Quadratcentimeter hat. Dies giebt eine Gesammtoberfläche von $2{,}4 \times 10^{4}$ cm² und damit eine Schicht von 4×10^{-9} g pro Quadratcentimeter. Dies ist weniger, als Magnus [2]) für die Adsorption der schwefligen Säure an Glasoberflächen gefunden hatte, denn diese betrug 0,0008 cc oder $2{,}5 \times 10^{-6}$ g auf ein cm², war also etwa 600 mal beträchtlicher. Wenn auch die Grundlagen dieser Rechnung auf Genauigkeit keinen Anspruch machen können, so ergiebt sich doch wenigstens sicher die *Möglichkeit* der vorgeschlagenen Erklärung.

19. Sehr bemerkenswerth ist die Thatsache, dass, in welchem Zustande das Salol auch vorhanden ist, es jedenfalls nicht mehr die Eigenschaften eines festen Körpers hat. An den später mitzutheilenden Versuchen mit Salzen, die nicht flüchtig sind, wird sich zeigen, dass solche Stoffe in viel weitgehenderem Maasse getheilt werden können, ohne ihre Eigenschaften als feste Körper zu verlieren, während andererseits Stoffe, wie Thymol, die bei gewöhnlicher Temperatur einen wenn auch geringen Dampfdruck haben, sich ganz dem Salol ähnlich ver-

1) Wied. Ann. **24**, 321. 1885.
2) Pogg. Ann. **89**, 604. 1853. — Lehrb. d. allg. Chemie. I, 1089.

halten und schon bei geringer Verdünnung als feste Körper verschwinden.

20. Erwärmt man eine Probe Salol *D*3 auf steigende Temperaturen, so bleibt sie bis zum Schmelzpunkt dieses Stoffes, 39,5° wirksam, und darüber hinaus verschwindet die Wirkung plötzlich. Ich habe nicht genauer geprüft, ob beide Punkte vollkommen zusammenfallen, doch ist, falls ein Unterschied vorhanden ist, dieser nur gering.

Die erhitzt gewesene Probe bleibt nach dem Erkalten unwirksam, und verändert diesen Zustand auch bei langem Aufbewahren nicht. Auch Schütteln und Reiben ändert nichts. Fügt man aber die kleinste Spur von nicht sterilisirtem Salolgemisch *D*3 hinzu und verreibt sie mit dem sterilisirten, so wird in ganz kurzer Zeit wieder die ganze Menge wirksam. Dies zeigt, dass die Oberfläche des Gemisches nicht im Stande ist, die Menge von 0,001 g auf ein Gramm Verdünnungsmittel derart aufzunehmen, dass das Salol dauernd die Eigenschaften des festen Stoffes verliert. Vielmehr bleibt in der erhitzt gewesenen Probe das Salol allerdings so lange im überkalteten Zustande, als keine Berührung mit einem Krystall des festen Stoffes eintritt; wird aber eine solche Berührung bewerkstelligt, so krystallisirt sofort ein Theil des Salols wieder in fester Form aus.

Es bedarf wohl kaum eines Hinweises, dass freiwillig unwirksam gewordenes Gemisch *D*4 durch Verreiben mit einer Spur von wirksamem *D*3 nicht bezw. nur vorübergehend wirksam wird.

21. Es bleibt noch die Frage zu beantworten, ob das unwirksam gewordene Salol in *D*4 sich im flüssigen oder im gasförmigen Zustande an der Oberfläche des Pulvers absorbirt findet. Die Antwort scheint mir dahin gehen zu müssen, dass es gasförmig vorhanden ist, soweit bei Schichten von dieser geringen Dicke noch von einer Verschiedenheit dieser beiden Aggregatzustände die Rede sein kann. Denn aus den später mitzutheilenden Versuchen geht hervor, dass Salze mit den Eigenschaften des festen Zustandes in Pulvern bestehen können, die an Luftfeuchtigkeit viele Tausend und Millionen mal mehr Wasser enthalten, als zur Auflösung der vorhandenen Mengen erforderlich wäre. Dieses Wasser hat also hier sicher nicht die Eigenschaften des gewöhnlichen flüssigen Wassers, Salze zu lösen, und man wird den richtigen Ausdruck der Thatsachen weniger

leicht verfehlen, wenn man unter solchen Umständen den absorbirten flüchtigen Stoff als gasförmig und nicht als flüssig ansieht. Doch verliert, wie wiederholt gesagt werden mag, bei Schichten von einer Dicke, die mit dem Wirkungsbereich der Oberflächenenergie (den sogenannten molekularen Dimensionen) von gleicher Ordnung ist, der Begriff der Aggregatzustände den grössten Theil seines bestimmten Sinnes.

22. Den Erscheinungen am Salol ziemlich ähnlich verlaufen die am Natriumthiosulfat, da dessen überkaltete Schmelze vollständig erstarrt, statt wie bei den übersättigten Lösungen der Salze nur Krystalle innerhalb einer mehr oder weniger reichlichen Mutterlauge auszuscheiden. Die Technik kann daher auch ganz die frühere sein, indem Tropfen des geschmolzenen Salzes auf einen Objectträger gesetzt und mit den verschiedenen »Verreibungen« geprüft werden. Da der Brechungscoefficient des erstarrten Salzes von dem des geschmolzenen nur wenig verschieden zu sein scheint, ist die Reaction etwas schwerer zu erkennen, indessen hilft, wie schon bemerkt, das Unebenwerden der Oberfläche durch die Krystallisation und das Verschwinden der darin zu beobachtenden Spiegelbilder.

Die nach Potenzen von 10 durch Zusammenreiben von je 0,9 g Quarzpulver und 0,1 g Salz bez. Gemisch in einer grossen Achatreibschale hergestellten Verdünnungen erwiesen sich bis zur achten regelmässig wirksam. Von der neunten fand in einem unter drei Fällen Reaction statt, die zehnte war vollkommen unwirksam. Zu jeder Probe wurde mit einem kleinen Platinspatel, der zwischen den Versuchen immer ausgeglüht wurde, eine zwischen 0,1 und 0,4 mg liegende Menge genommen. Daraus geht hervor, dass die kleinste Menge von festem Natriumthiosulfat, die mir auf diese Weise herzustellen gelang, rund 10^{-12} g wog und also ein Stückchen darstellte, das einen Bruchtheil eines Mikrons gross war. Doch überschreitet die Grösse nicht die Grenze mikroskopischer Sichtbarkeit.

23. Indessen handelt es sich auch hier nicht um eine ganz reine Erscheinung. Als die Proben am anderen Morgen wieder untersucht wurden, ergab sich $D9$ unwirksam und $D8$ zweifelhaft. Nach drei Tagen war nur noch $D5$ wirksam, während $D6$ in keinem Falle die Reaction gab. Nach etwa vier Wochen waren die Verhältnisse dieselben geblieben, nur verschwand in der aus dem alten $D5$ hergestellten Verreibung $D6$ die Wirkung schon

nach vier Stunden, während sie früher länger als einen Tag angehalten hatte.

Aus diesem langsamen Aufhören der Wirkung in den grössten Verdünnungen ist zu schliessen, dass die anfänglich vorhandenen Thiosulfatkrystalle allmählich verschwinden oder sich umwandeln. Man wäre zunächst geneigt, an eine Verwitterung zu denken, indessen zeigen später zu erwähnende Versuche mit verwitterbaren und mit verwitterten Salzen, dass dieser Umstand die Wirksamkeit der Präparate nicht beeinträchtigt. Somit wird man schliessen, dass sich das Natriumthiosulfat chemisch umwandelt, was bei der bekannten zersetzlichen Beschaffenheit des Salzes nichts Ueberraschendes hat. Erwägt man, dass die ganze, in $D9$ vorhandene Menge ein Milliontel Milligramm betrug (das Gesammtgewicht der Probe war ein Gramm), so kann man eher erstaunt sein, dass diese geringe Menge noch so lange erhalten blieb, dass die Beobachtungen bequem gemacht werden konnten, als dass sie nach einem Tage zersetzt war. Die Natur der Zersetzung ist vermuthlich eine Oxydation zu Sulfat unter Schwefelabscheidung, wahrscheinlich unter Mitwirkung der Kohlensäure der Luft[1]).

24. Das nächste Material, mit dem ich experimentirte, war *Natriumchlorat.* Man erhält eine übersättigte Lösung, mit der sich bei Zimmertemperatur gut arbeiten lässt, wenn man 15 Theile des Salzes in 14 Theilen Wasser auflöst. Ich wählte das Salz, weil es wasserfrei ist, und daher nicht verwittern kann; ferner ist es zwar in hohem Maasse beständig, lässt sich jedoch durch Glühen sicher zerstören. Die letztere Eigenschaft ist wegen des nothwendigen »Sterilisirens« wesentlich.

Die Technik war anfangs die oben geschilderte der Beobachtung von Tropfen unter einem schwach vergrössernden Mikroskop. Zum Verdünnen wurde Quarzpulver benutzt, und kleine Proben des Gemisches zu dem Tropfen gebracht. Ist es auch anfangs schwer, die durchsichtigen Quarztrümmer von

---

1) Es bietet sich hier der Plan, das Vorhandensein von Schwefel dadurch zu erproben, dass man versucht, ob sich mit den zersetzten Proben überkalteter Schwefel zur Krystallisation bringen lässt. Obwohl der Erfolg sehr zweifelhaft ist, da es unwahrscheinlich ist, dass sich der Schwefel unter den vorhandenen Umständen krystallinisch ausscheiden wird, will ich nicht versäumen, den Versuch anzustellen, wenn ich bei meinen Arbeiten bis zum Schwefel gekommen bin.

etwaigen Krystallen zu unterscheiden, so lernt man doch schnell deren unregelmässige Formen im Gegensatz zu den prachtvoll ausgebildeten Würfeln des Salzes erkennen. Vor allen Dingen ist die Thatsache des Wachsens entscheidend.

25. Beobachtet man einen Tropfen der Lösung unter dem Mikroskop, ohne Keime hinzuzubringen, so sieht man bald am Rande des Tropfens Krystalle entstehen, die von den Würfeln des wasserfreien Natriumchlorats ganz verschieden sind. Sie treten in Gestalt rhombischer Platten auf, die nach beiden Diagonalen auslöschen und Winkel von rund 80° und 100° (roh gemessen) haben. Nach einiger Zeit pflegen die gewöhnlichen Würfel zu entstehen. Diese sind viel weniger löslich als die doppeltbrechenden Krystalle, denn sie zehren diese auf, wenn sie in ihre Nähe kommen, und verwandeln sie schnell in die gewöhnlichen, wenn sie sie berühren.

Es handelt sich hier wahrscheinlich um eine für gewöhnlich nicht beständige wasserhaltige Form des Natriumchlorats, deren Auftreten die grösste Aehnlichkeit mit dem des wasserhaltigen Kochsalzes unter gleichen Umständen hat. Beim Natriumbromat ist von Löwig ein wasserhaltiges Salz beobachtet worden (Gmelin-Kraut, 2, 203), und ebenso, wie das wasserhaltige Bromnatrium bei höherer Temperatur beständiger ist als das wasserhaltige Chlornatrium, mögen sich die beiden entsprechenden Sauerstoffsalze verhalten.

26. Diese Erscheinung giebt zu einer Erörterung Anlass, die schon hier vorausgenommen werden mag, da sie für das Verständniss der Ueberkaltungs- und Uebersättigungserscheinungen ganz wesentlich ist. Hält man sich die früher geschilderte Beständigkeit des überkalteten Salols gegen beliebige Eingriffe aller Art, ausschliesslich der Berührung mit einem festen Krystall desselben Stoffes vor Augen, so muss man sich fragen, wie denn überhaupt der erste feste Salolkrystall in die Welt gekommen ist, da kein Eingriff irgend welcher Art ihn spontan entstehen lässt. Man muss mit anderen Worten fragen, ob es eine Generatio spontanea bei den festen Körpern giebt, denn was eben für das Salol gesagt worden ist, hat natürlich allgemeine Bedeutung.

27. Die Antwort ist, dass es allerdings eine Generatio spontanea für feste Körper giebt. Lässt man eine Schmelze erkalten, so gelangt man beim Ueberschreiten des normalen Schmelz-

punktes nach unten zunächst in ein Gebiet, in welchem *nur* die Berührung mit einem festen Krystall der gleichen Art (oder einem isomorphen) Krystallisation bewirken kann, und kein anderer Umstand. Hier ist keine Generatio spontanea möglich. Schreitet man aber mit dem Abkühlen fort, so kommt man in ein zweites Gebiet, wo die Generatio spontanea möglich wird; unterhalb einer gewissen Temperatur, die nicht nur von dem Abstande vom Schmelzpunkt, sondern im höchsten Maasse auch von der Natur des Stoffes abhängt, können Krystalle der festen Form freiwillig entstehen. Nach den Erfahrungen, die ich bisher über diesen Gegenstand gesammelt habe, und die ich systematisch zu erweitern noch nicht Zeit fand, ist die Bestimmung dieser Grenze je nach der Natur des Stoffes mehr oder weniger schwierig. Doch ist sie unzweifelhaft vorhanden. In einer Arbeit, die ich in Verfolgung anderer biologischer Analogien vor einigen Jahren veranlasst hatte, ist von B. Moore[1]) beobachtet worden, dass es auch bei grösster Sorgfalt und beim völligen Ausschluss von Keimen nicht gelingt, Phenol unterhalb 24° zu überkalten, während es bei etwas höheren Temperaturen im Gegensatz dazu nicht gelingt, gegen Keime geschütztes Phenol auf irgend eine Weise zum Erstarren zu bringen.

28. Dieser Gegensatz ist überaus wichtig und macht es nothwendig, zwei scharf unterschiedene Arten der uneigentlich so genannten labilen Zustände zu unterscheiden. Ich habe schon früher[2]) wiederholt darauf hingewiesen, dass die gewöhnliche Bezeichnung aller solcher Zustände als labiler ganz unzutreffend ist, indem diese häufig den Charakter der Labilität keineswegs haben, sondern nur unter einer bestimmten Bedingung, nämlich bei der Berührung mit einem »Keim«, sich sprungweise ändern. Ich habe a. a. O. vorgeschlagen, solche Zustände *metastabil* zu nennen, und der Vorschlag hat inzwischen wohl auch Anklang gefunden, da in der That bei einiger Aufmerksamkeit der durchaus nicht labile Charakter der fraglichen Zustände sich offenbar macht. *Hier möchte ich diesen Namen ausdrücklich auf solche Zustände beschränkt wissen, wie sie eben als unmittelbar auf die Unterschreitung der Schmelztemperatur folgend geschildert sind, d. h. solche Zustände, in denen keine andere Ursache als die*

1) Ztschr. f. physik. Chemie, **12**, 545. 1893.
2) Z. B. Lehrbuch der Allgemeinen Chemie, **2**, I, 546. Leipzig 1893.

Berührung mit der anderen Phase die Umwandlung bewirkt. Die weiter belegenen Zustände, in denen eine Generatio spontanea möglich wird, sind dann sachgemäss *labile* zu nennen, da in ihnen umgekehrt die Entstehung der anderen Phase nicht verhindert werden kann.

29. Nur muss bemerkt werden, dass beim Eintritt in den labilen Zustand die Aenderung nicht augenblicklich einzutreten braucht. Aus der bekannten Thatsache, dass die Krystallisation in einer überkalteten Schmelze, die einseitig mit einem Krystall in Berührung gebracht ist, nicht augenblicklich, sondern mit einer endlichen, zuweilen sogar sehr kleinen Geschwindigkeit fortschreitet, geht ja unzweifelhaft hervor, dass bei der Berührung zwischen beiden Phasen, die mit einander dauernd nicht verträglich sind, doch eine gewisse Zeit vergehen muss, bevor die Umwandlung stattfindet, dass also die unverträglichen Phasen wirklich einige Zeit neben einander bestehen. In gleicher Weise kann der wirklich labile Zustand einige Zeit bestehen, bevor er freiwillig in den anderen übergeht, und die Fälle scheinen nicht selten zu sein, in denen diese Zeit eine sehr grosse wird.

30. Die Kenntniss der hierhergehörigen Thatsachen ist eine ziemlich alte. Schon Löwel[1]) hat gefunden, dass bei etwa 10° unter Null eine Glaubersalzlösung in einem zugeschmolzenen Rohre sicher zum Krystallisiren unter Ausscheidung von gewöhnlichem Salz mit 10 Wasser gebracht werden kann, was bei höherer Temperatur auf keine Weise möglich ist, solange man die Röhre nicht öffnet, und später hat namentlich Violette mit Nachdruck auf den gleichen Umstand hingewiesen, dass es für die Uebersättigung eine untere Temperaturgrenze giebt, wo sie aufhört, möglich zu sein. Indessen hat derselbe Autor ausdrücklich einen Gegensatz zwischen dieser Erscheinung und denen der Ueberkaltung angenommen, der ganz unbegründet ist, und ferner hat er diese untere Grenztemperatur als unabhängig von der Concentration dargestellt, was sie sicher nicht ist. Es fehlt demnach noch sehr viel an der allgemeinen Auffassung der beiden eben charakterisirten verschiedenen Zustände, der metastabilen und der labilen.

---

1) Die sehr interessante Geschichte der Untersuchungen über diesen Gegenstand will ich hier nicht geben; der Leser wird sie in dem im Erscheinen begriffenen letzten Bande meines Lehrbuches der Allgemeinen Chemie finden.

Vielleicht sichert es die Auffassung dieses Unterschiedes, wenn ich die oben gebrauchte biologische Analogie umkehre, und die Thatsache, dass unter den Lebewesen keine Generatio spontanea beobachtet ist, dahin kennzeichne, dass die auf der Erde vorkommenden Elemente und Verbindungen sich den lebenden Organismen gegenüber im *metastabilen* und nicht im *labilen* Zustande befinden. Sie können sich in diese nur unter der Bedingung umwandeln, dass ein gleichartiges Gebilde mit ihnen in Berührung kommt.

31. Einige vorläufige Versuche, die ich mit p-Chlornitrobenzol, das im Gegensatz zur Metaverbindung nur ein sehr enges metastabiles Gebiet besitzt, angestellt habe, zeigen, dass die Bestimmung der Grenze nicht leicht ist. Es wurden vier Capillaren mit dem Stoffe gefüllt, zugeschmolzen, und nachdem dieser in siedendem Wasser verflüssigt war, langsam abgekühlt. Die Temperatur, bei welcher die freiwillige Erstarrung eintrat, war nicht nur in den verschiedenen Röhren, sondern in demselben Rohr bei verschiedenen Versuchen verschieden, und schwankte zwischen 77° und 68°. Massgebend ist sachgemäss die höchste Temperatur von 77°, die nur 5° unter dem Schmelzpunkt 83° liegt.

Eingehendere Versuche würden derart anzustellen sein, dass man die Röhren längere Zeit bei den verschiedenen Temperaturen erhält, da die beobachteten Unterschiede auf verschiedene »Reactionsgeschwindigkeit« zurückgeführt werden können. Doch habe ich zu solchen Arbeiten noch keine Zeit gefunden.

32. Das Verständniss des Wesens der Verschiedenheit zwischen labilen und metastabilen Zuständen kann durch die Betrachtung der ähnlichen Verhältnisse beim Uebergang zwischen dem flüssigen und dem gasförmigen Zustande erleichtert werden. Bekanntlich sind hier ebensolche Ueberschreitungen der heterogenen Gleichgewichtspunkte möglich, indem sowohl überhitzte Flüssigkeiten wie überkühlte Dämpfe sich herstellen lassen. Indem ich bezüglich der Einzelheiten auf die Darstellungen dieser Verhältnisse in bekannten Werken[1]) verweise, möchte ich nur auf die hier wichtigsten Punkte aufmerksam machen.

Wir stellen, wie üblich, eine isotherme Folge von Zuständen in den Coordinaten Druck (p) und Volum (v) dar. Während ein

---

1) Z. B. Ostwald, Lehrb. d. Allg. Chemie, 1, 297. Leipzig 1891.

Gas dabei eine gleichseitige Hyperbel giebt, zeigt sich bei Dämpfen die durch die Linie $abcde$ angedeutete Reihe von Zuständen. Bei grossen Volumen und kleinen Drucken beginnen wir mit dem gasförmigen Zustande ab; dann erfolgt bei b die Verflüssigung, und bei constantem Druck kann nun das Volum bis d vermindert werden, von wo ab die homogene Flüssigkeit durch sehr starke Druckvermehrung nur eine sehr kleine Volumverminderung erfährt.

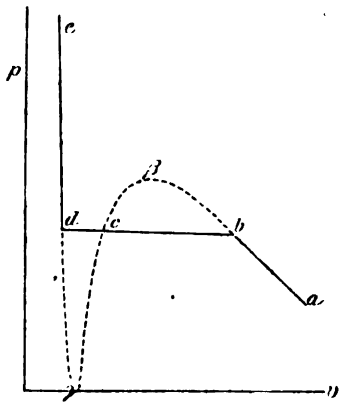


Fig. 1.

Von JAMES THOMSON ist die gebrochene Curve durch den stetigen Zug $b\beta c\gamma d$ ersetzt worden, welcher die *homogenen* Zustandsänderungen im Gegensatze zur Geraden bcd der heterogenen Gemische darstellt, und es ist bekannt, dass durch die Theorie von VAN DER WAALS diese Darstellung auch ihren analytischen Ausdruck in Gestalt einer Zustandsgleichung dritten Grades gefunden hat.

Uns interessiren vor allen die Zustände $b\beta c\gamma d$. Von b bis β sind Zustände dargestellt, die zwar in Berührung mit der flüssigen Phase nicht bestehen können, aber doch an sich *möglich und beständig* sind, und sich, wie bemerkt, auch thatsächlich herstellen lassen. Denn wie der Verlauf der Curve zeigt, ist mit jeder Verminderung des Volums eine Vermehrung des Druckes verbunden, d. h. die erzwungene Zustandsänderung bringt eine Reaction hervor, die sich der Aenderung widersetzt. Dies aber ist die Definition eines *stabilen* Zustandes. Ebendasselbe gilt für die Zustandsänderung $d\gamma$; auch hier ändern sich Volum und Druck im entgegengesetzten Sinne und die Zustände sind stabile [1]).

---

1) Die Gerade der heterogenen Zustände vergleicht sich am passendsten mit dem indifferenten mechanischen Gleichgewicht, da hier eine Unendlichkeit von Zuständen bei gleichem Druck möglich ist, ohne dass der eine beständiger wäre als der andere. Wie beim indifferenten Gleichgewicht der Mechanik Bewegungen möglich sind, ohne dass die Distanzenergie eine

Umgekehrt verhalten sich die Zustände von β über c bis γ; hier nimmt das Volum gleichzeitig mit dem Druck ab, widersetzt sich also nicht der Aenderung, sondern befördert sie. Dies sind also wirklich labile Zustände, die in sich nicht beständig sind, sondern, wenn sie einmal hergestellt sein sollten, bei unendlich kleiner Aenderung sich um einen endlichen Betrag verschieben müssen.

Dies sind somit ganz die Verhältnisse, wie wir sie erfahrungsmässig für den Uebergang fest-flüssig gefunden haben; $b\beta$ und $d\gamma$ sind die metastabilen Zustände, die in sich keinen Grund zur Aenderung haben, sondern nur durch die Gegenwart der anderen Phase zur Umwandlung veranlasst werden können. Die zwischen β und γ belegenen Zustände dagegen haben in sich den Grund zu Aenderungen und können, wenn sie einmal entstanden waren, nicht dauernd fortbestehen.

Wenn es auch zur Zeit noch nicht ausführbar erscheint, entsprechende Isothermen für den Uebergang fest-flüssig aufzustellen, da uns namentlich die Kenntniss der Druck-Volumänderungen der betheiligten Phasen noch so gut wie vollständig fehlt [1]), so wird doch der Analogieschluss zulässig erscheinen, dass auch

---

Aenderung erfährt, so sind hier Volumänderungen möglich, ohne dass sich die freie Energie ändert.

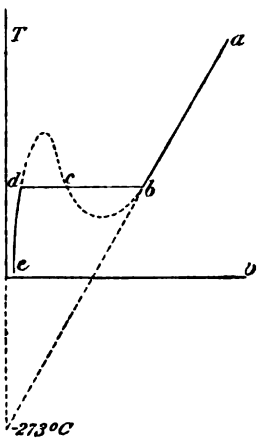


Fig. 2.

1) Die Zustandsänderungen fest-flüssig, wie wir sie gewöhnlich ausführen, werden nicht durch ein Coordinatensystem p-v dargestellt, sondern, da wir die Temperatur und das Volum zu ändern pflegen, indem der Druck constant gleich dem der Atmosphäre ist, durch ein System T-v. Die Zustandsänderung flüssig-gasförmig erhält in einem solchen System die beistehende Gestalt, indem der Gaszustand rechts durch eine Gerade dargestellt wird, die rückwärts verlängert die Ordinatenaxe im absoluten Nullpunkt schneidet, während die Curve der Flüssigkeit eine fast senkrechte, etwas nach rechts gekrümmte aufsteigende Linie ist; die heterogenen Zustände stellen sich wie früher durch eine Gerade dar, die der Volumaxe parallel ist. Die THOMSON'sche Ergänzung ist in der Figur gleichfalls angedeutet, und man sieht auf einen Blick, dass die im Text gegebenen Darlegungen sich auf diese Curve ohne wesentliche Aenderung gleichfalls anwenden lassen.

diese beiden Zustände auf ähnliche Weise stetig verknüpft sind, wie die Zustände flüssig-gasförmig, und dass die stetige Zwischencurve sich aus zwei den völlig stabilen sich anschliessenden metastabilen Stücken und einem zwischenliegenden labilen zusammensetzt. Im Uebrigen sind allerdings Unterschiede zu erwarten. So lassen sich bekanntlich Flüssigkeiten ziemlich leicht überhitzen, ohne in den Dampfzustand überzugehen, während es sehr schwer ist, den analogen Vorgang bei festen Stoffen, die Schmelzpunktsverzögerung, hervorzurufen[1]). Umgekehrt lassen sich Flüssigkeiten sehr leicht überkalten, während die analoge Ueberkaltung der Dämpfe eine schwierige Sache ist. Es kommen hier Fragen der Oberflächenenergie in Betracht, auf die an dieser Stelle nicht eingegangen werden soll.

33. In den oben berichteten Thatsachen ist noch ein weiterer Umstand enthalten, der zum Nachdenken auffordert. Wie erwähnt, entstehen die unbeständigen wasserhaltigen Krystalle des Natriumchlorats freiwillig in den übersättigten Lösungen dieses Salzes, obwohl sie viel leichter löslich sind als die wasserfreie Form. Die Anwesenheit solcher Keime in der Luft ist ausgeschlossen, da ja diese Form an sich nicht beständig ist und einer sofort eintretenden Zerstörung durch die andere Form bei jeder Berührung unterliegt. Ohnedies sind ähnliche Thatsachen schon lange am Natriumsulfat bekannt, wo schon Ziz[2]) und später Löwel[3]) das Auftreten der löslicheren Krystalle mit 7 Atomen Wasser in zugeschmolzenen Röhren nachgewiesen haben, zugleich mit der Thatsache, dass die in Bezug auf dieses Salz gesättigten Lösungen in Bezug auf Glaubersalz noch stark übersättigt waren. Man muss also die Erscheinung so auffassen, dass die Lösung bezüglich der unbeständigen Form, obwohl diese weniger weit von der Sättigung entfernt ist, doch eher in das labile Gebiet gelangt, als in Bezug auf die weniger lösliche Form. Solche Erscheinungen treten auch beim Schmelzen auf, und ich möchte die Gesammtheit der bisherigen Erfahrungen über den Gegenstand in den allgemeinen Satz zusammenfassen, *dass beim Verlassen irgend eines Zustandes und dem Uebergang in einen stabileren nicht der unter den vorhandenen Verhältnissen stabilste aufgesucht wird, sondern der nächstliegende.*

1) Ueber einige entsprechende Fälle vergl. Ostwald, Allg. Chemie, 1. 994.
2) Schweigger's Journ. f. Chemie u. Physik, **15**, 160. 1815.
3) Ann. chim. phys. (3) **29**, 62. 1850.

34. Dieser letztere Ausdruck bedarf der Erklärung. Die Reihenfolge der Beständigkeit der verschiedenen Formen eines Stoffes ist durch die Werthe seiner freien Energie bestimmt, dergestalt, dass die Form mit der grössten freien Energie die geringste Beständigkeit hat, und umgekehrt. Die Reihenfolge der freien Energie lässt sich nun am einfachsten durch die Concentrationen in einer zweiten Phase von veränderlicher Concentration, also im Dampfe oder in einer Lösung feststellen: die Form mit dem grössten Dampfdruck oder der grössten Löslichkeit hat auch die grösste freie Energie. Der obige allgemeine Satz besagt dann, dass beim freiwilligen, d. h. infolge Eintritts in das labile Gebiet erfolgenden Verlassen eines Zustandes nicht die Form mit der kleinsten freien Energie erreicht wird, sondern die Form, welche unter möglichst geringem Verlust an freier Energie erreicht werden kann, oder die Form mit der nächstgrössten freien Energie.

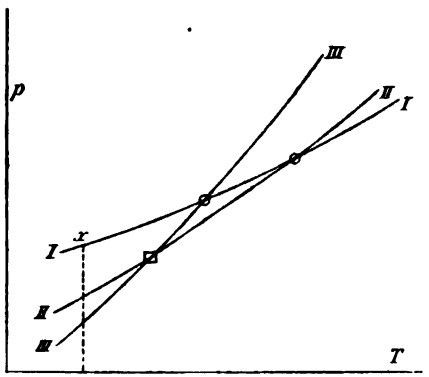


Fig. 3.

35. Man übersieht den Inhalt dieses Satzes am leichtesten, wenn man die Dampfdruck- oder Löslichkeitscurven der verschiedenen möglichen Formen in dasselbe Coordinatensystem als Functionen der Temperatur einzeichnet. Da im allgemeinen die verschiedenen Formen unter Wärmetönung in einander übergehen, so müssen nach der bekannten Dampfdruckformel die entsprechenden Dampfdruckcurven verschieden geneigte Tangenten haben und werden daher sich irgendwo kreuzen. Betrachten wir beispielsweise einen Stoff, der in drei Formen auftreten kann, wie z. B. flüssigen, monoklinen und rhombischen Schwefel. Dann werden die drei Curven, die diesen Zuständen angehören, wie in der Fig. 3 zu einander liegen, wo I die Dampfdruckcurve des flüssigen, II die des monoklinen und III die des rhombischen Schwefels darstellt. Wo sich I mit II und III schneidet, sind die

Schmelzpunkte der beiden festen Schwefelarten, der Schnittpunkt von II und III stellt die Umwandlungstemperatur dar. Ueberkaltet man geschmolzenen Schwefel, so geht man auf der Curve I von rechts nach links und gelangt, nachdem die Curve II bez. III geschnitten worden ist, zunächst in das Gebiet der metastabilen, und dann in das der labilen Zustände. Sei in x dieses zweite Gebiet erreicht, so wird sich eine feste Form freiwillig bilden müssen; diese aber wird zufolge des obigen Satzes nicht die Form mit der Curve III sein, welche bei dieser Temperatur die beständigste ist, sondern es wird die Form II entstehen, weil diese die nächstliegende ist. Befindet sich dann II gegenüber III im metastabilen Gebiete, so wird es damit sein Bewenden haben, und eine weitere Umwandlung tritt erst ein, wenn das Product mit etwas von der Form III in Berührung kommt. Daneben besteht aber auch die Möglichkeit, dass auch II gegenüber III im labilen Gebiete ist; dann wird eine freiwillige weitere Verwandlung eintreten, und schliesslich die beständigste Form III erreicht werden.

36. Was den Beweis dieses Satzes anlangt, so gebe ich ihn zunächst als den Ausdruck vielfacher Erfahrungen. Wenn man beispielsweise Quecksilberjodid auf irgend eine Weise bei gewöhnlicher Temperatur, wo die rothe Form die stabilste ist, herstellt, so erscheint zunächst in den meisten Fällen die gelbe Form, die sich dann schnell freiwillig in die rothe umsetzt. Daraus ist alsbald zu schliessen, dass unter diesen Umständen das labile Gebiet für diese Umwandlung bereits erreicht ist, da die zweite Reaction freiwillig erfolgt, denn Keime des rothen Salzes lassen sich leicht ausschliessen, ohne dass die Umwandlung aufgehalten wird. Beispiele hierfür sind die Fällung des Quecksilberjodids durch Vermischen von Quecksilberchlorid- und Jodkaliumlösungen, wo die gelbe Phase nur einen Bruchtheil einer Secunde zu dauern pflegt; ferner die Fällung einer alkoholischen Quecksilberjodidlösung mit Wasser, wo die gelbe Form (die wegen der feinen Vertheilung fast weiss aussieht) tagelang bestehen kann[1]). Ebenso sublimirt Quecksilberjodid auch *unterhalb* der Umwandlungstemperatur immer in der gelben Form, und diese wandelt sich erst langsam in die rothe, beständigere um.

---

1) Die Umwandlung in die rothe Form wird durch die Einwirkung des Lichtes sehr beschleunigt.

37. Dass ein derartiges Verhältniss, wenn auch nicht als Gesetz, so doch als häufig zutreffende Regel besteht, geht schliesslich schon aus der einfachen Thatsache hervor, dass man überhaupt die metastabilen Formen monotroper Stoffe kennt. Bekanntlich giebt es eine grosse Anzahl von Stoffen, die in mehreren Formen bestehen können, ohne dass eine Umwandlungstemperatur vorhanden ist. In dem ganzen Gebiete bis zum Schmelzpunkt ist die eine Form unbeständig gegenüber der anderen, und Lehmann hat solche Stoffe, um sie von denen mit einer Umwandlungstemperatur unterhalb des Schmelzpunktes (bei denen je nach der Temperatur die eine oder die andere Form beständig ist) zu unterscheiden, als monotrope von den enantiotropen getrennt [1]). Solche unbeständige Formen monotroper Stoffe könnten überhaupt nicht vorkommen, wenn die Umwandlung immer zu der beständigsten Form führte. Denn man erhält diese Formen immer durch Erkalten des Schmelzflusses (seltener durch Krystallisation aus Lösungen), und in diesen Fällen wird somit nicht die stabilste Form, sondern die nächste aufgesucht.

38. Es wird unzweifelhaft Fälle geben, wo bei einer gegebenen Umwandlung eine weniger stabile Zwischenform zwar vorhanden ist, aber nicht beobachtet wird. In solchen Fällen kann immer angenommen werden, dass diese Zwischenform zwar entsteht, sich aber augenblicklich weiter verwandelt. Was diese Annahme recht wahrscheinlich macht, ist die sehr verschiedene Geschwindigkeit der Umwandlung desselben Stoffes je nach den äusseren Umständen, wie solche Beispiele oben beim Quecksilberjodid angeführt worden sind. Allerdings ist diese Art, die Widersprüche gegen den Satz zu heben, einigermassen bedenklich, da eine derartige Annahme zwar gemacht, aber wenigstens mit den gegenwärtigen Hilfsmitteln nicht immer bewiesen werden kann. Doch wird es in vielen derartigen Fällen immerhin möglich sein, eine Verzögerung der Reaction durch geeignete Mittel zu bewerkstelligen, und dann das Auftreten der Zwischenform ersichtlich zu machen.

39. Eine Consequenz des Satzes von der Bildung der nächstliegenden Form ist die, dass schmelzbare Stoffe, die man aus dem Dampf oder aus einer Lösung abscheidet, auch unterhalb ihrer Schmelztemperatur zunächst immer flüssig auftreten müs-

1) Molekularphysik, 1. Leipzig 1888.

sen. Ob sie beim Ausschluss fester Keime flüssig bleiben, hängt davon ab, ob die flüssige Form sich unter den vorhandenen Bedingungen im metastabilen oder im labilen Zustande befindet; im zweiten Falle hängt die Frage, ob man den flüssigen Zustand beobachten kann, weiter von der Umwandlungsgeschwindigkeit dieser Phase in die nächste ab.

Die tägliche Erfahrung in der präparativen Arbeit zeigt, dass die Forderung des Satzes sehr häufig erfüllt ist. So scheidet sich Benzoësäure und eine grosse Anzahl ähnlicher Stoffe, deren Schmelzpunkt weit über Zimmertemperatur liegt, aus ihren Salzen durch die Einwirkung von Säuren in wässeriger Lösung zuerst immer in Tröpfchen aus, und ebenso führt die Fällung alkoholischer Lösungen von in Wasser unlöslichen Stoffen durch Wasser vorwiegend zu flüssigen Ausscheidungen, die erst nach kürzerer oder längerer Zeit krystallisiren.

Das Gleiche gilt für die Verdichtung von Dämpfen. Beim Schwefel scheint es unzweifelhaft zu sein, dass das erste Product der Verdichtung aus Tröpfchen und nicht aus Krystallen besteht, auch wenn die verdichtenden Flächen weit unterhalb des Schmelzpunktes des Schwefels erkaltet sind. Das Gleiche gilt für viele andere Stoffe. Frankenheim [1]) hat bei seinen Beobachtungen über das Entstehen der Krystalle zahlreiche hierhergehörige Thatsachen zusammengestellt, auf die ich an dieser Stelle verweisen muss. Für die Zusammenfassung unter dem oben dargelegten Gesichtspunkte besass die Wissenschaft seiner Zeit allerdings noch kaum die Grundlagen.

40. Selbst in den Fällen, wo grössere chemische Unterschiede vorhanden sind, bleibt die Gültigkeit dieses Satzes erhalten. Schliesst sich die Thatsache, dass aus den Dämpfen des Phosphors nicht die beständigste rothe Form erhalten wird, sondern die metastabile gelbe (nachdem zuvor die flüssige Form auch unterhalb des Schmelzpunktes aufgetreten war), noch einigermassen den bisher betrachteten an, so besteht doch auch bei wirklicher Isomerie derselbe Satz. So geben die Dämpfe der Cyanursäure, die mit denen der Cyansäure identisch sind, beim Verdichten die letztere, obwohl diese so unbeständig ist, dass sie sich bei geringer Erwärmung unter Explosion in Cyamelid verwandelt. Ebenso giebt Cyangas beim Abkühlen nicht

1) Pogg. Ann. 111, I. 1860.

das beständige Paracyan, sondern das unbeständige flüssige Cyan. Soweit meine Kenntnisse solcher Vorgänge reichen, ist gerade bei isomeren Stoffen, die identische Dämpfe geben, keine Ausnahme von dem Satze vorhanden, dass diese Dämpfe bei der Verdichtung von allen möglichen Formen regelmässig die unbeständigste liefern.

Schliesslich macht sich der Satz sogar bei rein chemischen Vorgängen geltend: beim Einleiten von Chlor in Kalilauge bildet sich nicht das beständigste System, Chlorkalium plus Sauerstoff, sondern das unbeständigste, Chlorkalium plus Hypochlorit, und

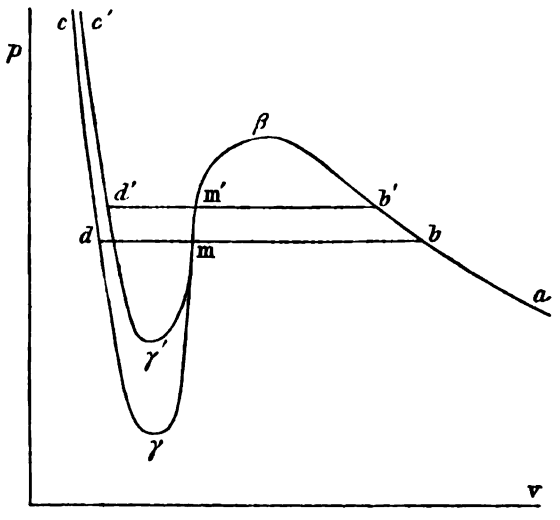


Fig. 4.

dieses geht stufenweise in die beständigere Form mit Kaliumchlorat über, während die noch beständigere mit Perchlorat sich erst in höherer Temperatur, und nicht in neutraler Lösung bildet.

44. Die vorerwähnten Fälle, in denen die Form, von der die Umwandlung ausgeht, gasförmig ist, gestatten eine graphische Darstellung, die sich unmittelbar an Fig. 4 anschliesst. Verfolgen wir eine Isotherme von rechts nach links, so haben wir zunächst die Hyperbel des Gaszustandes, und von *b* setzt sich die Gerade des heterogenen Gleichgewichts für die beständigere

flüssige Phase an. Vermeiden wir deren Bildung, so verfolgt der Stoff den Weg des gasförmigen Zustandes weiter bis b', wo die weniger beständige flüssige Phase mit der gasförmigen im Gleichgewicht sein würde. Wird auch mit dieser die Berührung ausgeschlossen, so geht der Stoff schliesslich durch den Punkt β in das Gebiet der labilen Zustände über, d. h. es muss sich freiwillig die flüssige Phase ausscheiden. Die zugehörige Zustandsänderung wird, wenn man das erreichte Volum festhält, durch die von β aus nach unten gezogene Ordinate dargestellt, und diese muss, wie man sieht, nothwendig zuerst die Linie $b'd'$ der heterogenen Zustände der weniger beständigen Form treffen, bevor sie die der beständigeren Form erreicht.

Auch über die Gestalt des Theils $d\gamma$ bez. $d'\gamma'$ lässt sich Einiges aussagen. Gemäss einem wohlbekannten Satz von Clausius muss die Fläche $b\beta c$ gleich der Fläche $c\gamma d$ sein. Für die weniger beständige Form, deren Dampfdruck nothwendig der grössere ist, liegt die Gerade der heterogenen Zustände $d'c'b'$ höher, die Fläche $b'\beta'c'$ ist also kleiner als $b\beta c$. Darum muss nothwendig auch $c'\gamma'd'$ kleiner sein als $c\gamma d$, und ungefähr so liegen, wie in der Fig. 5 gezeichnet. Daraus folgt, dass auch von der Seite des flüssigen Zustandes her die unbeständigere Form den labilen Punkt eher erreicht als die beständigere; erstere hat also von beiden Seiten aus ein engeres metastabiles Gebiet, als die letztere.

Auf die Zustandsänderung fest-flüssig lassen sich diese Schlüsse zunächst nur durch Analogie ausdehnen. Doch ist nach dem früher Gesagten die Analogie jedenfalls eine sehr weitgehende. Durch die Betrachtung von Dampf- und Dissociationsdrucken der betreffenden Stoffe kann man übrigens auch ohne Kenntniss der fraglichen Zahlenwerthe an die Stelle der Analogie in ziemlich weitem Umfange bindende Schlüsse energetischer Natur setzen.

42. Bevor wir diesen Gegenstand verlassen, wird es zweckmässig sein, noch auf einen Punkt hinzuweisen, der mit diesen Erörterungen in nahem Zusammenhange steht. Je nach der Lage der drei Dampfdruckcurven eines Stoffes, der in drei verschiedenen Formen auftreten kann, treten zwei wesentlich verschiedene Fälle ein, die eine bestimmte physische Bedeutung haben. Nennen wir wie früher die Curve der flüssigen Phase I, so sind die Durchschnitte von I mit II und III die Schmelzpunkte. Nun

muss I immer so liegen, dass sie rechts schliesslich zu unterst ist, also am flachsten verläuft. Denn da bei erhöhter Temperatur schliesslich alle festen Formen schmelzen, so muss die flüssige Phase von einer bestimmten Temperatur ab jedenfalls die beständigste sein, d. h. den niedrigsten Dampfdruck haben. Das gleiche Ergebniss erhält man, wenn man überlegt, dass alle Stoffe beim Schmelzen Wärme aufnehmen, dass also die Dampfdruckcurve einen kleineren Neigungswinkel gegen die Temperaturaxe haben muss, als die einer festen Phase. Aus ähnlichen Gründen muss die Phase mit steilster Dampfdruckcurve bei niedriger Temperatur die beständigste sein; sie ist mit III bezeichnet. Die mittlere Phase II kann dagegen zwei verschiedene

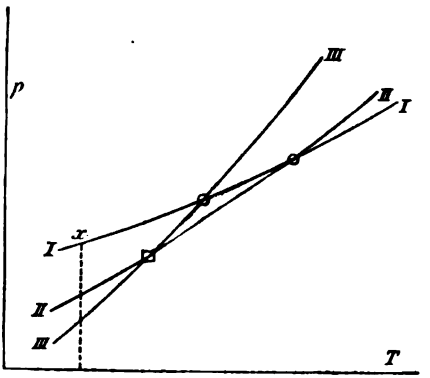


Fig. 5.

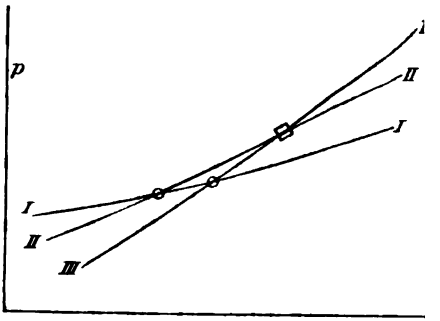


Fig. 6.

Lagen haben; entweder wie in der Fig. 3, die ich zur Bequemlichkeit unter Fig. 5 nochmals hersetze, oder wie in Fig. 6. Zum leichteren Vergleich sind die Schmelzpunkte mit Kreisen und die Umwandlungspunkte (die Schnitte zwischen II und III) mit Quadraten gekennzeichnet. Man sieht alsbald, dass in Fig. 6 der Umwandlungspunkt *oberhalb* der Schmelzpunkte liegt, also, da Schmelzpunktsüberschreitungen sich bei festen Körpern nicht ausführen lassen, überhaupt nicht zugänglich ist. In Fig. 5 dagegen liegt der Umwandlungspunkt unterhalb der Schmelzpunkte, und ist also im stabilen Gebiete.

Diese Unterschiede drücken die oben erwähnte Verschiedenheit der monotropen und enantiotropen Stoffe aus, von denen die ersten keine (zugängliche) Umwandlungstemperatur haben, son-

dern im ganzen Gebiete, in dem sie fest sind, eine stabile und eine instabile Form aufweisen. Die zweiten haben dagegen den Umwandlungspunkt unterhalb der beiden Schmelzpunkte, und das Verhältniss der Beständigkeit wechselt an dieser Stelle zwischen den beiden Formen [1]).

Aus der Betrachtung der Fig. 6 ergiebt sich gleichfalls unmittelbar die erfahrungsmässig festgestellte Thatsache, dass der Schmelzpunkt der metastabilen Form immer niedriger liegen muss, als der der stabilen.

43. Von diesen allgemeinen Betrachtungen wenden wir uns zu den Erscheinungen am Natriumchlorat wieder zurück, welche noch zu einer Anzahl weiterer Bemerkungen Anlass geben.

Bei den mikroskopischen Beobachtungen tritt sehr deutlich zu Tage, wie die Vorstellung entstehen musste, dass Reiben mit einem harten Gegenstand an den Gefässwänden die Krystallisation ebendort begünstigt. Es ist nicht etwa eine Aenderung in der Beschaffenheit der Oberfläche an diesen Stellen, wodurch sich die neuwachsenden Krystalle massenhaft an dem Strich ablagern, sondern ein wirkliches Aussäen. Durch das Reiben werden sehr kleine Trümmer der fertigen Krystalle abgetrennt, die an den geriebenen Stellen liegen bleiben, alsbald zu wachsen beginnen und so den Weg bezeichnen, längs dessen die Zertrümmerung stattgefunden hatte.

44. Es ist schon früher bemerkt worden, dass das an den Oberflächen des Verdünnungsmaterials haftende Wasser ausser Stande ist, das zugemischte Salz aufzulösen, obwohl seine Menge unverhältnissmässig viel mehr beträgt, als zur Lösung unter gewöhnlichen Verhältnissen erforderlich wäre. Man kann, ganz abgesehen von Speculationen über den Aggregatzustand des

---

1) Bereits vor längerer Zeit habe ich ausgesprochen, dass die Verschiedenheit der beiden Arten, die früher von Lehmann physikalisch metamer und polymer genannt worden waren, auf der gegenseitigen Lage von Schmelz- und Umwandlungstemperatur beruht (Lehrbuch d. Allg. Chemie, 1. Aufl. 1, 695. 1885). Doch halte ich es nicht für überflüssig, die vorstehende anschauliche Darstellung der Verhältnisse zu geben, da jene Darstellung trotz ihrer Einfachheit gelegentlich nicht verstanden und daher mit ebensoviel Ausführlichkeit wie Unklarheit bekämpft worden ist (Arzruni, Physikalische Chemie der Krystalle, S. 303. Braunschweig 1893).

Während der Correctur geht mir die Habilitationsschrift von Dr. Schaum, Marburg, über die Arten der Isomerie zu, in welcher ich die gleiche Darstellung finde.

adsorbirten Wassers, unmittelbar beweisen, dass es dazu nicht fähig sein kann. Eine jede Fläche nimmt so lange Wasser aus einer mit Wasserdampf unvollständig gesättigten Atmosphäre auf, bis der Dampfdruck des adsorbirten Wassers gleich dem Theildruck des Wasserdampfes unter den vorhandenen Umständen geworden ist. Andererseits ist das benutzte Salz, das Natriumchlorat, nicht zerfliesslich, d. h. der Dampfdruck seiner gesättigten Lösung ist erheblich grösser, als der durchschnittliche Dampfdruck in der Luft. Wenn also sich eine Lösung des beigemischten Salzes auf Kosten des adsorbirten Wassers bilden wollte, so müsste dieses aus einem Zustande kleineren Dampfdruckes freiwillig in einen Zustand mit grösserem übergehen; dies aber widerspricht dem zweiten Hauptsatze und ist daher unmöglich.

Diese Bemerkung wird durch den folgenden, unbeabsichtigt angestellten Versuch erläutert. Um die die Genauigkeit der Verdünnungsversuche so sehr beeinträchtigenden Staubtheilchen, die in der Luft herumfliegen und sich den Proben während der Herstellung in uncontrolirbarer Weise beimischen, zu vermeiden, stellte ich einige Verreibungen von Natriumchlorat mit Quarzpulver in einem Kasten her, dessen Wände mit feuchtem Filtrirpapier zum Abfangen des Staubes bedeckt waren, und der nur an einer Seite ein Loch für die Hand am Pistill enthielt. Indessen stellte sich heraus, dass schon die Verdünnung $D5$, die sonst eine deutliche Krystallabscheidung gegeben hatte, sich als vollkommen steril erwies. Zur Feststellung, ob es sich um ein Zerfliessen des Salzes in der mit Wasserdampf nahezu gesättigten Luft der Kammer handelte, brachte ich eine früher hergestellte Verdünnung $D4$, die unmittelbar vorher geprüft sich als sehr stark wirksam erwies, in die Kammer, und stellte nach Verlauf einiger Minuten neue Proben an. So lange das Pulver in der Nähe des Handloches lag, behielt es seine Wirksamkeit bei; als es aber in den hinteren Theil der Kammer gebracht wurde, wo die Luft vollständiger mit Feuchtigkeit gesättigt war, hörte sehr schnell jede Fähigkeit auf, Krystallisation in der übersättigten Lösung hervorzurufen. Unter diesen Umständen hatte also das Salz genügend Wasser aufnehmen können, um in Lösung überzugehen.

45. Offenbar wird neben einer ungesättigten Lösung von Natriumchlorat die gleiche Wirkung eintreten, während neben

einer übersättigten Lösung kein Zerfliessen möglich ist, und das Pulver daher seine Wirksamkeit beibehalten muss. Was neben einer gesättigten Lösung geschehen wird, ist nicht unmittelbar zu sagen; überlegt man indessen, dass kleine Stückchen Salz wegen ihrer relativ grösseren Oberflächenenergie löslicher sind, als grosse, so wird man erwarten können, dass auch neben einer gesättigten Lösung, d. h. einer Lösung, in der festes Salz liegt, das sehr feine Pulver in der Verreibung allmählich zerfliessen wird. Dieser Vorgang wird noch dadurch begünstigt, dass in dem Gemisch von gesättigter Lösung und festem Salz aus gleichen Gründen allmählich das feinere Salzpulver verschwinden und grösseren Krystallen Platz machen muss; dadurch wird die Lösung etwas weniger concentrirt, und nimmt einen etwas grösseren Dampfdruck an. Natürlich bleibt durch diese Betrachtungen die Frage nach der erforderlichen *Zeit* noch ganz unentschieden, und der eben geschilderte Vorgang, der jedenfalls nur durch überaus kleine Unterschiede der Löslichkeit und des Dampfdruckes betrieben wird, kann Stunden, Tage oder auch Jahre bis zu seiner Vollendung, d. h. bis zum Zerfliessen des letzten Salztheilchens in der Verreibung brauchen.

Die Versuche wurden mit Natriumchlorat in Quarz in der Verdünnung $D4$ angestellt, indem die fraglichen Lösungen in Glasdosen mit aufgeschliffenem Deckel, wie sie zu bacteriologischen Zwecken gebraucht werden, gegeben wurden. Die Proben kamen auf eine Unterlage von Filtrirpapier (zur Erleichterung des Wasserdampfverkehrs) und wurden durch kleine Dreifüsse aus Glas in der Nähe der Flüssigkeitsoberfläche gehalten. Um die Temperaturschwankungen möglichst langsam und gering zu machen, wurden die Dosen in einem Schrank möglichst weit vom Ofen entfernt untergebracht. Doch ist immerhin, da Temperaturschwankungen nicht ausgeschlossen waren, das Ergebniss der Versuche nicht als rein anzusehen.

Die verdünntere Lösung war aus einer gesättigten durch Zusatz von $^1/_{10}$ Wasser hergestellt worden; in der gesättigten befanden sich beträchtliche Mengen des festen Salzes, von dem einzelne Stücke bis über die Oberfläche hervorragten.

Fünf Stunden nach der Anstellung des Versuches liess bereits die Probe über der ungesättigten Lösung eine Verminderung der Zahl der Keime erkennen; nach 24 Stunden war sie unwirksam geworden. Die über der gesättigten Lösung stehende

Probe hatte nach 20 Tagen ihre Fähigkeit, Krystalle zu bilden, nicht eingebüsst. Der Versuch wird fortgesetzt.

46. Es hat einiges Interesse, darauf hinzuweisen, in welchem Verhältnisse der Fall mit der gesättigten Lösung zu den beiden anderen Fällen mit der ungesättigten und der übersättigten steht. In diesen wird auf Grund der endlichen Unterschiede des Dampfdruckes ein entgegengesetztes Resultat erhalten: über der einen zerfliesst das Salz, über der anderen nicht. Für den zwischenliegenden Fall der gerade gesättigten Lösung ist keine dritte Möglichkeit vorhanden, während doch das Symmetriebedürfniss, das für derartige Probleme ein nicht zu verachtender Führer ist, eine solche verlangt. Die Lösung des Problems erfolgt dadurch, dass hier für das Ergebniss Ursachen thätig werden, die von einer anderen Grössenordnung sind, als die vorher betrachteten; es tritt so zu sagen eine andere Schicht von Erscheinungen hier in Wirkung, nachdem die grossen Unterschiede entfernt sind.

Auch der auf gleichen Grundlagen beruhende Schluss, dass bei Anwendung eines Pulvergemisches von verschiedener Korngrösse theoretisch gesprochen ein Gleichgewicht erst eintreten kann, nachdem die Korngrösse überall gleich geworden ist, bietet mancherlei Anregung. Man erkennt hier eine Regelung der Formen ohne räumliche Berührung durch Vermittelung eines Agens, des Wasserdampfes, in welchem nichts von dem der Umformung unterliegenden Stoffe enthalten ist.

47. Die in der Siedhitze gesättigte Natriumchloratlösung ist bei gewöhnlicher Temperatur bereits im labilen Zustande, denn sie setzt auch im zugeschmolzenen Rohre eine Krystallisation des wasserfreien Salzes ab. Eine Lösung aus 107 Chlorat auf 100 Wasser hält sich dagegen bei Zimmertemperatur beliebig lange, und kann gut zu den Versuchen dienen. Mit dieser ergab sich, dass beim Verdünnen mit Quarz die Wirksamkeit sich zwischen den Verreibungen $D5$ und $D6$ verlor. Das durchschnittliche Gewicht eines Chlorattheilchens in den Verreibungen betrug daher etwa 10^{-9} g oder ein Milliontel Milligramm, da die zu einer Probe genommene Menge zwischen 0,1 und 1 mgr schwankte. Ebenso gross ist daher auch die auf diesem Wege noch erkennbare Menge.

48. Da, wie bemerkt, beim Abdampfen einer beliebig verdünnten Lösung von Natriumchlorat nothwendig ein labiler Zu-

stand in Bezug auf das feste Salz erreicht wird, dieses sich also jedenfalls ausscheiden wird, wenn es unter den vorhandenen Umständen in fester Gestalt bestehen kann, so war ein anderer, bequemerer Weg möglich, die untere Grenze hierfür kennen zu lernen. Man brauchte nur von einer Lösung des Salzes kleine Mengen zu verdampfen und den Rückstand zu prüfen, um bei stufenweiser Verdünnung der Lösung zu der gesuchten Grenze zu gelangen.

Die Versuche wurden zuerst so angestellt, dass ein schmaler Platinspatel, der durch Breithämmern eines an einer Glasröhre angeschmolzenen Platindrahtes erhalten worden war, mit der fraglichen Lösung benetzt, vorsichtig in der Nähe einer Flamme getrocknet und dann in den unter dem Mikroskop liegenden Tropfen der übersättigten Lösung gebracht wurde. War festes Salz am Spatel, so liess sich bald das Weiterwachsen der an sich nicht erkennbaren Krystalle beobachten. Eine noch empfindlichere Reaction ist die Entstehung unzähliger kleiner Krystalle beim Reiben des Spatels auf der Glasfläche des Objectträgers, doch verlangt diese Methode grosse Vorsicht, denn wenn durch einiges Liegen des Tropfens an der Luft am Rande bereits Krystalle ausgeschieden werden, so können diese die Reaction verursachen. Doch gelingt es bei einiger Uebung, diese beiden Erscheinungen gut zu unterscheiden; ohnedies müssen die Versuche mehrfach wiederholt werden.

Auf diese Weise fand ich, dass eine Lösung, die 0,001 Natriumchlorat enthielt, noch völlig sicher bei jedem einzelnen Versuch wirkte, eine zehnmal so verdünnte, mit 0,0001 Chlorat bei vielen Versuchen Krystallisation ergab, eine viermal verdünntere aber keine Reaction mehr erkennen liess. Der Spatel war bei diesen Versuchen blank polirt, und das Gewicht einer Benetzung betrug 0,06 mg. Daraus folgt, dass unter den beschriebenen Umständen eine Menge von etwas weniger als 10^{-6} g Natriumchlorat erkennbar war.

49. Diese Menge kann indessen noch merklich verkleinert werden. Um das Trocknen vorsichtiger ausführen, und zu diesem Zweck das Verschwinden der Flüssigkeit auf der Oberfläche des Spatels besser erkennen zu können, platinirte ich diesen und glühte ihn aus, wodurch er eine mattgraue Farbe erhielt. Die unerwartete Folge dieser Aenderung war, dass die Empfindlichkeitsgrenze der Reaction bedeutend hinausgeschoben wurde;

die zweifelhafte Lösung von 0,0001 reagirte nun überaus deutlich und schliesslich fand sich in der Verdünnung von 0,000001 die Grenze, welche den Spatel gleich oft steril liess und wirksam machte. Die auf diese Weise zu beobachtende kleinste Menge von Natriumchlorat beträgt somit etwa 10^{-10} g oder ein Zehnmilliontel Milligramm. Dies trifft recht nahe mit der durch Verreiben mit Quarz gefundenen Grenze von 10^{-9} zusammen.

50. Bezüglich der Technik dieser Versuche ist noch nachzutragen, dass für jede neue Probe der Spatel durch Abwaschen mit Wasser und Ausglühen sterilisirt wurde; man thut gut, sich zuweilen unter der Arbeit zu überzeugen, dass ein so behandelter Spatel wirklich keine Krystallisation hervorruft, und auch blinde Versuche, in denen man nur Wasser auf dem Spatel verdampft, einzuschalten, so dass man sicher ist, nicht durch irgend welche unbeachtete Zufälligkeiten den Spatel während der Operationen inficirt zu haben. Es zeigt sich nicht selten, dass wenn man längere Zeit mit einem Salz gearbeitet hat, und nicht dafür Sorge getragen hat, seine Verbreitung als Staub zu vermeiden, es sehr schwer hält, uncontrolirbare Infection auszuschliessen. Die wichtigste Regel, an deren Einhaltung man sich gewöhnen muss, ist die, keine Gelegenheit zur Bildung und Verbreitung festen Salzes zu geben, indem man alles Geräth während des Nichtgebrauches mit Wasser in Berührung lässt, und alle Lösungen und Krystalle des Salzes, die nicht mehr benutzt werden, baldigst in mit Wasser gefüllte Schalen und in das Ausgussbecken befördert, wo sie fortgespült werden. Besonders nachtheilig ist, Salzlösungen mit dem Handtuch abzuwischen, da sie in diesem krystallisiren und dann massenhaften Staub geben. Wo Abwischen nöthig ist, nimmt man frisches Filtrirpapier, das nach dem Gebrauch sofort in Wasser geworfen wird.

51. Die Unsicherheit, welche bei den mikroskopischen Versuchen darin lag, dass der Tropfen an der freien Luft sowohl einer beständigen Verdunstung, wie auch der Infection durch Staubkeime ausgesetzt war, veranlasste mich zu der Ausbildung eines anderen Verfahrens. Es lag einerseits nahe, die in der biologischen Technik üblichen Einrichtungen der »feuchten Kammer« oder des »hängenden Tropfens« zu verwenden, doch sah ich hiervon ab, da die bequeme Zugänglichkeit der Probe dadurch sehr beeinträchtigt worden wäre. Dagegen bot sich in Nachahmung der bacteriologischen Technik ein makroskopisches

»Culturverfahren« dar, welches Sicherheit mit Bequemlichkeit in solchem Maasse vereinigt, dass ich die nachstehenden Versuche fast ausschliesslich nach dieser Methode ausgeführt habe. Die mikroskopische Methode wird daneben ihr Recht für die erste Orientirung immer behalten, und die Anschauung des sichtbaren Wachsthums der Krystalle von den Keimen aus ist für die Ausbildung des Beobachters von grösstem Werth; doch sichert die Möglichkeit, die Beobachtungen über eine beliebig lange Zeit auszudehnen, der »Culturmethode« ihre Ueberlegenheit für die endgültige Arbeit.

Das Verfahren besteht darin, dass man die übersättigte Lösung in kleine Proberöhrchen bringt, die mit Gummistopfen verschlossen beliebig lange aufbewahrt bleiben können, das zu prüfende Object hineinbringt, und nach einiger Zeit, die nach der Beschaffenheit des gelösten Stoffes von einigen Minuten sich bis zu Stunden ausdehnt, das Vorhandensein oder die Abwesenheit von ausgeschiedenen Krystallen feststellt. Man ermittelt auf diese Weise nicht nur das Vorhandensein der Keime, sondern erlangt auch eine annähernde Schätzung ihrer Anzahl.

Die Einzelheiten des Verfahrens sind folgende. Durch einige vorläufige Versuche ermittelt man die Concentration, in welcher die Lösung bei gewöhnlicher Temperatur zwar übersättigt, aber noch nicht labil ist; sie wird in der Folge bei den untersuchten Salzen immer angegeben werden. Die heisse Lösung wird mittelst einer Pipette in die Proberöhrchen übertragen, wobei man eine Benetzung des oberen Randes sorgsam vermeiden muss. Dies geschieht leichter, wenn man das untere Rohr der Pipette ziemlich schmal nimmt, und es nahe an der Mündung mit drei oder vier Glastropfen versieht, die warzenförmig vorstehen, und die Spitze von der Wand des Proberöhrchens fern halten. Da beim Einfüllen wegen der Verdunstung der warmen Lösung sehr oft Krystalle auftreten, bringt man die gefüllten, offenen Röhrchen mit Hülfe eines metallenen Trägers in ein Bad mit siedendem Wasser, um alle entstandenen Krystalle in Lösung zu bringen und die Flüssigkeit so zu »sterilisiren«. Dazu dienen Träger, die die gleichzeitige Behandlung einer grösseren Anzahl Röhrchen gestatten. Die aus dem Wasserbade genommenen Röhrchen werden alsbald mit den Gummipfropfen verschlossen und sind nach dem Abkühlen, das man erforderlichen

Falles durch Einsetzen des Trägers in kaltes Wasser beschleunigen kann, gebrauchsfertig.

52. Zum Arbeiten dient ein Brettchen, das mit Löchern von der Weite der Proberöhrchen versehen, und in schräger Lage unter 45° gegen den Horizont aufgestellt ist. In solcher Lage kann man die Röhrchen tagelang offen stehen lassen, ohne Infection befürchten zu müssen, da der hineinfallende Staub in der Nähe der Mündung liegen bleibt. Freilich muss man bei der Benutzung eines solchen Röhrchens Sorge tragen, dass von diesem Theile keine Infection ausgeht: sie macht sich dadurch kenntlich, dass die Krystalle an der Oberfläche entstehen, und nicht von den eingebrachten Proben aus.

Die frisch hergestellten Röhrchen sind an dem oberen Theil mit Wassertröpfchen bedeckt, die durch Destillation aus der warmen Lösung dahin gelangt sind. Hierdurch werden in diesem Theile und am Stopfen etwa vorhandene Keime wirksam beseitigt. Nach 24 Stunden ist dieses Wasser verschwunden und wieder von der Lösung aufgenommen. Diese ist dadurch an der Oberfläche verdünnt, und kann sich im ungesättigten Zustande befinden. Eine solche Lösung wäre im Stande, aus einer eingeführten Probe, die mit ihr zuerst in Berührung kommt, das feste Salz aufzulösen, und so Täuschungen hervorzurufen. Man muss daher Sorge tragen, durch Bewegen des Röhrchens die oberflächliche Verdünnung zu beseitigen (wobei der Stopfen nicht benetzt werden darf), wenn man die Röhrchen bald nach der Herstellung benutzt; später gleicht sich durch Diffusion die Concentration selbstthätig aus. Eine Krystallisation der im oberen Theile vorhandenen und durch den ersten Beschlag gelösten Krystallkeime kann aus früher (S. 282) erörterten Gründen nicht stattfinden; es kann höchstens eine metastabile übersättigte Lösung von der Concentration der Hauptmenge entstehen, wenigstens wenn grössere Temperaturunterschiede ausgeschlossen sind.

53. Um die Probe hineinzubringen, öffnet man das Röhrchen, während man es schräg hält, und lässt die mit einem sterilisirten Platinspatelchen geschöpfte Probe unter momentanem Aufrichten unmittelbar in die Lösung fallen. Dann wird das Röhrchen verschlossen und in fast wagerechter Lage schnell hin und her gedreht, um die Probe zu vertheilen; schliesslich wird es ruhig hingelegt. Bei der von mir benutzten Röhrenweite von 8 bis 9 mm bleibt die Flüssigkeit im unteren Theil, ohne bis an

den Stopfen zu fliessen, namentlich wenn die Flächen beim Gebrauch etwas fettig geworden sind; nöthigenfalls lagert man die Röhrchen unter ganz schwacher Höherstellung des oberen Endes.

Nach einigen Minuten bis zu einer Stunde — die Zeit kann beliebig ausgedehnt werden — beobachtet man das Röhrchen wieder, und kann meist ohne Schwierigkeit erkennen, ob Krystalle aufgetreten sind oder nicht, und im ersten Falle auch die Zahl der Krystallisationsmittelpunkte und damit die der vorhanden gewesenen Keime annähernd zählen. Letzteres ist natürlich nur möglich, wenn nur wenige Keime vorhanden sind; handelt es sich um mehr, als zehn oder zwanzig, so erhält man meist zusammenhängende Drusen, und kann schon sehr bald nach dem Einsäen das Eintreten reichlicher Krystallisation beoabachten.

Sind die Keime sehr wenig zahlreich und gleichzeitig sehr klein, so kann es oft ziemlich lange dauern, bis eine deutliche Krystallisation vorhanden ist. Ein sehr kleines Krystallfragment wächst immer viel langsamer als ein grösseres, und erst, wenn es eine gewisse Ausdehnung erreicht hat, wird es schnell grösser.

54. Auf Grund der früher (S. 284) erwähnten Ueberlegungen, welche sich auf die Betheiligung der Oberflächenenergie am Gleichgewicht beziehen, muss man bekanntlich schliessen, dass die Löslichkeit eines festen Körpers unter gegebenen Umständen von seiner Vertheilung abhängt, so dass eine Lösung in Bezug auf makroskopische Krystalle übersättigt sein kann, in Bezug auf sehr kleine dagegen untersättigt. Demnach würde die Grenze der Kleinheit eines Krystalls, wenn sie nach der Methode der übersättigten Lösung bestimmt wird, von dem Betrage der Uebersättigung abhängen müssen, und es sollte Krystallstückchen geben, welche in einer weniger übersättigten Lösung sich als unwirksam, weil löslich erweisen, während sie in einer mehr übersättigten Lösung sich vergrössern. Meine Versuche über diese Frage, die naturgemäss eine grosse Vorsicht in der Beurtheilung erfordern, sind noch nicht so weit gediehen, dass ich ihre Ergebnisse mittheilen könnte. Die hier berichteten Thatsachen sind durch die Angabe der benutzten Concentrationen der übersättigten Lösungen hinreichend eindeutig gemacht.

55. Mit Hülfe der »Culturmethode« führte ich die Versuche über die aus einer Lösung von Natriumchlorat abzuscheidende Menge festen Salzes weiter. Dazu dienten dünne Platindrähte

von 5 cm Länge, die in Glasröhren befestigt und am Ende an einer Schleife aufgewickelt waren. Alle Schleifen wurden doppelt über einen und denselben Glasstab von 1 mm Durchmesser gewickelt und dann platinirt. Der Tropfen Lösung in einer solchen Schleife wog 0,39 mgr.

Es wurde mit einer solchen Schleife, nachdem sie sterilisirt war, ein Tropfen Lösung aufgenommen und verdampft, indem der Draht etwa 2 cm von der Schleife entfernt erhitzt wurde. Man kann das Verschwinden der Flüssigkeit in der Oese sehr deutlich beobachten, und nimmt gleichzeitig den Draht von der Flamme fort, lässt ihn einige Augenblicke abkühlen und bringt ihn dann in das geöffnete, schräg gehaltene Gläschen, das in gleicher Stellung in seinen Träger gestellt wird. Je nachdem man das Ergebniss sofort kennen lernen will oder nicht, verfährt man etwas verschieden. Im ersten Falle bewegt man die Platinöse unter gelinder Reibung im unteren, kegelförmigen Theile des Röhrchens hin und her, und erzielt auf diese Weise, wenn ein Keim vorhanden war, alsbald die Ausscheidung einer Wolke vom kleinen Kryställchen, indem durch Zertrümmern der ersten Anschüsse schnell unzählige Keime entstehen. Da hierbei eher die Gefahr einer unbeabsichtigten Infection droht, die durch das Verfahren selbst schwer erkennbar gemacht wird, so ist es bei entscheidenden Versuchen besser, die Drahtöse ruhig in der Lösung liegen zu lassen und sie erst nach einiger Zeit auf das Vorhandensein von Krystallen, die sich inzwischen aus den Keimen gebildet haben, zu untersuchen.

56. Die Grenze, bis zu welcher nach diesem Verfahren Krystallisation beobachtet werden konnte, lag bei der Verdünnung 8×10^{-7}, was bei dem Tropfengewicht von 0,4 mgr $3{,}2 \times 10^{-10}$ g für das Gewicht des noch nachweisbaren Natriumchlorats ausmacht. Die Zahl ist etwas grösser, als die nach der Spatelmethode unter dem Mikroskop gefundene, die $0{,}6 \times 10^{-10}$ betrug. Der Grund davon kann in der grösseren Oberfläche der Drahtöse gegenüber dem Spatel zu suchen sein, durch welche ein grösserer Antheil des Natriumchlorats in den adsorbirten und daher unwirksamen Zustand gebracht wird, doch möchte ich noch zögern, den Unterschied als reell anzuerkennen, und begnüge mich mit dem Hinweis, dass beide unabhängig ermittelten Werthe von der gleichen Grössenordnung sind, und auch mit der durch Verreibung gefundenen Grenze besser als zu erwarten übereinstimmen.

57. Es war oben bemerkt worden, dass der blanke Spatel eine viel niedrigere Grenze gab als der platinirte, d. h. dass er mehr Salz brauchte als dieser. Diese Thatsache zeigt, dass ausser der Adsorption auf der Oberfläche des Metalls hier noch eine andere Ursache wirksam ist, welche das Entstehen eines festen Krystalls hindert, denn jene ist am platinirten Spatel grösser. Wo die Ursache zu suchen ist, habe ich nicht ausfindig gemacht; auch ist der Gegenstand nicht weiter verfolgt worden. Vermuthungsweise möchte ich nur bemerken, dass man daran denken kann, dass das Krystallisiren der bis zum labilen Zustande übersättigten Salzlösung, das die Grundlage des Verfahrens ist, auf dem blanken Platin möglicherweise langsamer und ungewisser erfolgt als an der platinirten Oberfläche, und dass an ersterer die sehr kleinen Mengen Salz vielleicht in amorphem Zustande sich aus der eingedampften Lösung abzusetzen die Fähigkeit haben.

58. Mit *Kalialaun* wurden ganz ähnliche Ergebnisse erhalten. Verreibungen mit Milchzucker gaben bis $D8$ reichliche Krystalle nach der Culturmethode im Proberöhrchen; bei $D10$ war die Wirkung gering. Doch gelang es nicht, wie beim Natriumchlorat zu einem unzweifelhaften Ende zu gelangen, da alle weiteren Verreibungen immer einzelne Krystalle hervorbrachten. Die Ursache davon liegt in der weiten Verbreitung des Alauns im Staube, welche schon von Gernez bemerkt worden war, und derzufolge auch frischer Milchzucker, aus der Mitte einer grösseren Menge genommen, sich in geringem Maasse alaunhaltig erwies, als er nach der Culturmethode geprüft wurde. Ganz ebenso verhielt sich eine Reihe von Verreibungen, welche Herr Dr. W. Schwabe in seiner Apotheke hatte herstellen lassen. Die Reibemaschinen befinden sich dort in verschliessbaren Kästen, so dass während der Arbeit der Zutritt von Staub aus dem Raume so gut wie vollkommen ausgeschlossen ist. Trotzdem fand ich dasselbe Bild: bis zu $D8$ reichliche Krystallisation, bei $D9$ einzelne Krystalle, die bei $D10$ annähernd in gleicher Menge aufzutreten schienen.

59. Man wird also für Alaun eine ähnliche, nur um zwei oder drei Potenzen weitergehende Grenze für die mögliche Verdünnung anzunehmen haben, wie die früher gefundene. Trotz der Unsicherheit, die in der Mitwirkung des Staubes liegt, möchte ich es für eine Thatsache halten, dass die Grenze bei kleineren Mengen für Alaun liegt, als für Natriumchlorat. Wie aus den

späteren Mittheilungen über Borax und Chlorbaryum hervorgehen wird, giebt es unzweifelhafte Fälle, die sich dem Alaun ähnlich verhalten. Allerdings besteht zwischen diesen Versuchen und denen mit Natriumchlorat noch der weitere Unterschied, dass hier die Verdünnungen mit Milchzucker, beim Natriumchlorat aber mit Quarz hergestellt worden sind.

60. Als die Proben nicht mit einer übersättigten Lösung von Kalialaun, sondern mit einer solchen von Ammoniakalaun gemacht wurden, ergab sich ganz das gleiche Verhältniss. Daraus ist zu schliessen, dass isomorphe Keime bis zu derselben Grenze wirksam sind, wie identische. Ich war zweifelhaft gewesen, ob ich dieses Resultat erwarten dürfte. Denn man wird zugeben müssen, dass sich ein Salz in der Lösung eines isomorphen auflösen wird, selbst wenn die Lösung in Bezug auf dieses gesättigt ist, da erst bei einer bestimmten Concentration in Bezug auf das neue Jon die Lösung für das andere Salz wieder gesättigt sein kann. Dass dennoch die Krystallisation eintritt, glaube ich so deuten zu müssen, dass unmittelbar bei der Berührung des isomorphen Keims mit der Lösung eine Diffusion des gelösten Salzes in den festen Keim stattfindet, wodurch sich etwas von dem gelösten Salze in krystallinischer Form bildet; geht hernach der Keim in Lösung, so ist doch etwas von dem gelösten Salze bereits krystallinisch vorhanden, und der Keim ist wirksam. Hierbei ist von dem Begriffe der festen Lösungen Gebrauch gemacht, welcher ja bei isomorphen Gemischen seine unzweideutigste Anwendung und Bestätigung gefunden hat.

61. Es war mir von Interesse, den gleichen Versuch mit einem isomorphen Salze anzustellen, dessen beide Bestandtheile verschieden von denen in der übersättigten Lösung waren. Dazu dient mir Chromalaun gegen eine Lösung von Ammoniakalaun, wo sowohl die einwerthigen Metalle Kalium und Ammonium, wie die dreiwerthigen, Chrom und Aluminium verschieden waren. Auch hier fand ich dieselben Verhältnisse wieder, und konnte keine Verminderung der Wirkung bemerken.

62. Nach der Methode des Eintrocknens der Lösungen an der Platinöse liess sich der Alaun nicht untersuchen, da die Lösung bei der Verdampfung in einer etwas über der Zimmertemperatur liegenden Wärme nicht durch einen labilen Zustand geht, sondern dauernd metastabil bleibt, so dass die Flüssigkeit schliesslich zu undeutlichen Krystallen eines wasserärmeren

Alauns eintrocknet. Es geht dies schon aus den älteren Versuchen von Löwel[1]) hervor und bestätigte sich, als ich versuchte, das beim Natriumchlorat geschilderte Verfahren auf den Alaun anzuwenden. Nicht nur verdünntere Lösungen gaben durchaus keine Reaction, sondern auch die übersättigten kann man an der Drahtöse eintrocknen, so dass sichtbare Krystallkrusten entstehen, ohne dass diese fähig sind, die gewohnte Krystallisation hervorzurufen. Hat man eben die ungeheure Empfindlichkeit der Anlaunlösungen (vgl. S. 294) gegen Keime kennen gelernt, so wirkt dieses Verhalten sehr überraschend.

63. Da krystallisirter Kalialaun noch unter 100° schmilzt, so lässt sich erwarten, dass durch Erwärmen die wirksamen Verreibungen sterilisirt werden können. Dies tritt in der That ein; die Verreibung *D* 5 in Milchzucker begann bei 70° an Wirksamkeit zu verlieren, und war bei 75° vollkommen steril.

64. Dieser Zustand hält sich, wie es scheint, beliebig lange; wenigstens war die erwärmt gewesene Probe am folgenden Tage noch ebenso unwirksam. Als sie aber in der Reibschale nur kurze Zeit gerieben worden war, hatte sie ihre Wirkung wieder angenommen, auch ohne dass etwas von wirksamer Substanz absichtlich hinzugesetzt worden wäre. Es lag dies natürlich an dem Vorkommen des Alauns im Staube der Laboratoriumsluft; ein einziger Keim, der in die Reibschale fällt, genügt, um die ganze sterilisirte Alaunmenge wieder zu beleben, d. h. in Krystalle zu verwandeln.

65. Die Temperatur der Sterilisirung ist bei Kalialaun in Substanz höher als in der Milchzuckerverreibung. So habe ich bei einer auf 93° erwärmten Probe, die ich mit Hülfe eines frisch gezogenen Glasfadens in die übersättigte Lösung übertrug, noch Wirkung gefunden. Bei 100° war sie indessen gleichfalls völlig verschwunden.

66. Eine sehr merkwürdige Thatsache ist, dass bei verwitterbaren wasserhaltigen Salzen das Verwitterungsproduct die Krystallisation ebenso bewirkt, wie das krystallisirte Salz daselbst, dessen Pseudomorphose es ist. Dies ist schon früh bemerkt worden; beim Glaubersalz, mit dem bezüglich der Uebersättigung mehr experimentirt worden ist, als mit irgend einem anderen Stoff, und bei dem die enorme Verbreitung von

1) Ann. chim. phys. (3) **43**, 405. 1855.

Glaubersalzkeimen im Staube, namentlich der Städte, nachgewiesen worden ist, konnte ja immer der Einwand gegen die Keimtheorie gemacht werden, dass Glaubersalz an der Luft verwittert, und daher im Staube das Salz $Na^2SO^4 + 10\,H^2O$, bezüglich dessen die Lösungen übersättigt sind, gar nicht vorhanden ist. Es ergab sich, dass auch das verwitterte Glaubersalz die Krystallisation bewirkt, aber nur so lange, als es nicht einer Temperatur von 34° ausgesetzt gewesen war: dann wurde es unwirksam. Diese Temperatur ist die, bei welcher das krystallisirte Glaubersalz in seinem Krystallwasser schmilzt, und daher im festen Zustande überhaupt nicht existirt.

Dieser Umstand hatte de Coppet[1]) veranlasst, besondere Modificationen des wasserfreien Natriumsulfats anzunehmen, von denen die eine gegen die übersättigten Lösungen wirksam ist, die andere nicht. Die Erscheinung ist indessen allgemein; schon Violette hatte nachgewiesen[2]), dass sich beim Magnesiumsulfat ganz dieselben Verhältnisse zeigen, nur liegt die tödtliche Temperatur für dieses Salz bei 108°, entsprechend seinem Verhalten im krystallisirten Zustande. Auch ich habe mich vielfach von der Allgemeinheit dieser Thatsache überzeugt; verwitterter Alaun und Borax wirken ebenso, wie frischer.

67. Chromalaun, der an trockener Luft unter Verlust seines halben Krystallwassers in ein violettgraues Pulver übergeht, wurde mit Milchzucker verrieben, um zu sehen, ob vielleicht der wirksame Stoff nur in Spuren vorhanden war; in solchem Falle hätte die Wirksamkeit viel früher aufhören müssen, als bei dem unzersetzten Stoffe. Als Flüssigkeit zum Einsäen benutzte ich nicht eine übersättigte Chromalaunlösung, da diese wegen ihrer dunklen Farbe schlecht zu beobachten ist, sondern eine Lösung von Ammoniakalaun, nachdem ich mich überzeugt hatte, dass die Empfindlichkeit einer übersättigten Lösung gegen isomorphe Keime ganz dieselbe ist, wie gegen die Keime desselben Salzes, das in der Lösung vorhanden ist. Es ergab sich, dass der verwitterte Chromalaun ganz ebenso wirksam war, wie der nicht leicht verwitternde Kalialaun, von dem aus frischen Krystallen die Verreibungen bereitet waren.

68. Ich habe noch nicht die Zeit gefunden, festzustellen, in

1) C. rend. **78**, 1324. 1874.
2) Ann. école norm. sup. **3**, 251. 1866.

wie weitem Umfange auch andere Pseudomorphosen, ausser denen, die durch blosse Verwitterung entstanden, die Fähigkeit haben, übersättigte Lösungen der Mutterstoffe zum Krystallisiren zu bringen, und beschränke meine Betrachtungen daher zunächst auf die einfachen Verwitterungspseudomorphosen. Hier kann man die Gesammtheit der Thatsachen dahin zusammenfassen, dass Umwandlungsproducte, deren Bildung ohne zwischenliegende *Verflüssigung* (bez. Verdampfung) des ursprünglichen Stoffes entstanden ist, immer sich wirksam erweisen. Wendet man den Satz, dass Krystallisation nur durch den fraglichen Stoff in fester Gestalt selbst bewirkt werden kann, auf diesen Fall an, so muss man schliessen, dass auch z. B. im verwitterten Glaubersalz noch eine gewisse Menge unverwitterten Salzes bestehen muss, *die nicht verwittern kann*. Bei Gelegenheit seiner oben erwähnten Versuche hat de Coppet gezeigt, dass auch nach sehr langem Verweilen im trockenem Vacuum das verwitterte Glaubersalz seine Wirksamkeit behält, also noch Spuren des krystallisirten Salzes unzersetzt beigemischt enthält.

Dies führt auf einen merkwürdigen Satz, der sich aus der bisherigen Lehre vom chemischen Gleichgewicht, soviel ich sehen kann, nicht hat ableiten lassen, nämlich dass, solange es sich um mehrere feste und gasförmige Phasen handelt, die Menge einer einmal vorhandenen festen Phase nicht Null werden kann. Ob die Erscheinung so aufzufassen ist, dass sich in der entstehenden zweiten Phase eine feste Lösung der ersten bildet, deren Concentration nach bekannten Gesetzen allerdings nicht auf absolut Null gebracht werden kann [1]), oder um einen anderen Umstand, ist jetzt noch nicht zu erörtern, sondern kann erst durch eingehendere Versuche entschieden werden.

69. Aehnliche Betrachtungen sind auch in Bezug auf die von Carey Lea [2]) beobachteten Zersetzungen anzustellen, welche beim längeren Verreiben fester Stoffe eintreten. Angesichts der

---

1) Dann müsste man den Schluss ziehen, dass jene erste Phase in der zweiten *unter Beibehaltung der Eigenschaften, die sie als fester krystallisirter Körper hat*, gelöst ist. Dieser Schluss lässt sich prüfen, indem man sich überzeugt, dass in Fällen des Zusammenkrystallisirens nicht isomorpher Körper, wie solche von Lehmann vielfach studirt und beschrieben sind, der aufgenommene Fremdkörper noch seine überkaltete Schmelze oder übersättigte Lösung zum Krystallisiren zu bringen vermag.

2) Phil. Mag. **37**, 470. 1894.

erwähnten Arbeiten wäre zu erwarten, dass alsbald durch die Verreibung der vorhandene wirksame Stoff der Zersetzung anheimfallen müsste. Dies mag wirklich theilweise stattfinden, wenigstens bei einigen Salzen; doch wird man auch hier annehmen können, dass wenn nicht ein flüssiges Zersetzungsproduct auftritt, die Menge des ursprünglich vorhandenen Stoffes in einer endlichen Menge der Zersetzungsproducte nicht Null werden kann.

70. *Kalium-Natriumtartrat* oder Seignettesalz gab sehr unzweideutige Erscheinungen. Da ich durch die inzwischen gemachten Erfahrungen gewarnt worden war, brachte ich, als ich zur Herstellung der Verreibungen schritt, nur die für die erste Verreibung erforderliche Menge von einem Centigramm des Salzes ins Laboratorium (die Verreibungen wurden ausnahmsweise im Verhältniss 1 : 100 hergestellt), und stellte die Reibschale auf eine dicke Glasplatte von 50 cm Seitenlänge, deren Oberfläche mit Glycerin überzogen war, um alle aus der Reibschale sich entfernenden Stäubchen abzufangen und festzuhalten. Zwischen je zwei Verreibungen wurde die Reibschale sorgfältig ausgewaschen, und mit frischem Filtrirpapier, das sofort in Wasser geworfen wurde, getrocknet. Alles sonst gebrauchte Geräth wurde entweder für jeden Versuch neu genommen, oder durch Abwaschen sterilisirt. So erhielt ich auch ein ganz unzweideutiges Ergebniss: $D8$ war deutlich und in jedem Falle wirksam, $D10$ und $D12$, sowie alle weiteren Verreibungen waren ausnahmslos unwirksam.

Die geeignete übersättigte Lösung bestand aus 140 Theilen des Salzes auf 100 Theile Wasser. Sie trocknet bei Zimmertemperatur bei einigem Schutz zu einer firnissartigen Masse ein, die bei der Berührung mit einem Krystall sich nur überaus langsam umwandelt.

71. *Borax* lässt sich sehr leicht übersättigen. Eine Lösung aus 40 Theilen Salz in 100 Theilen Wasser ist sowohl in Bezug auf das gewöhnliche Salz mit 10 Wasser übersättigt, als auch bezüglich des oktaëdrischen Borax mit 7 Wasser. Doch ist sie für das erste, schwerlösliche Salz metastabil, für das andere, weit löslichere, bereits labil. Es ist dies ganz dasselbe Verhältniss, wie bei den beiden Hydraten des Natriumsulfats. Demgemäss scheidet die genannte Lösung langsam Krystalle von

oktaëdrischem Borax aus, bleibt aber für den gewöhnlichen stark übersättigt.

72. Bei der Herstellung der Verreibungen war ich noch nicht auf die erforderlichen Vorsichtsmassregeln aufmerksam geworden, und prüfte jede einzelne unmittelbar nach der Fertigstellung mittelst der Culturmethode. Dabei habe ich ein uncontrolirtes Hineinkommen von Borax in meine Pulver nicht vermieden, und es ergab sich scheinbar eine Verdünnungsmöglichkeit bis auf $D17$. Da diese Zahl so weit von den anderen abwich, bat ich Herrn Dr. W. Schwabe um die Herstellung von Boraxverreibungen in seiner Officin. Das Ergebnis war, dass $D7$ noch wirksam war, die höheren Verreibungen dagegen nicht. Eine Wiederholung des Versuches unter Beobachtung der eben (S. 296) geschilderten Vorsichtsmassregeln ergab als Grenze den gleichen Werth.

73. Borax, der auf dem warmen Ofen bei Temperaturen, die sicher zeitweilig 60° überschritten, verwittert war, erwies sich als wirksam. Ich habe nicht ermittelt, bei welcher Temperatur seine Wirksamkeit aufhört.

74. *Chlorbaryum*, von dem mir gleichfalls Herr Dr. Schwabe Verreibungen anfertigen liess, gab bei $D8$ deutliche, bei $D9$ etwas zweifelhafte Wirkung. Als Versuchslösung diente eine von 50 Theilen des krystallisirten Salzes auf 100 Wasser. Obwohl sie verhältnissmässig schwach übersättigt ist — die gesättigte Lösung enthält 42 Theile Salz bei 20° — so scheint sie sich doch bereits im labilen Gebiete zu befinden, oder ihm nahe zu stehen, denn ich konnte Krystallisation selbst durch Reiben mit einem nassen Platindraht hervorrufen, wenn auch erst nach längerer Zeit. Unter Vorbehalt gebe ich als Grenze für die Wirkung der Verreibungen $D9$ an; über das Verhalten der Lösungen sei Folgendes bemerkt.

Beim Einsäen von Keimen krystallisirt die übersättigte Lösung verhältnissmässig langsam aus. Krystallisation wird ferner durch fremde Stoffe sehr leicht hervorgerufen; so fand ich beispielsweise keine Probe von Baryumsulfat, welche nicht nach einigen Stunden Krystalle erzeugt hätte, und selbst Abdampfen des Sulfats mit überschüssiger Schwefelsäure konnte ihm die Wirkung nicht nehmen. Doch trat hier die Krystallisation oft erst nach Stunden, in einem Falle sogar erst am folgenden Tage ein. Dass es sich nicht um zufällig hinzugekommene Keime handelte,

ging daraus hervor, dass die Krystalle auf dem Baryumsulfat sassen, und nicht auf der Oberfläche der Lösung; diese befand sich zudem in einem horizontal gelegten Proberöhrchen, das mit einem Gummistopfen verschlossen war.

75. Zur Warnung vor möglichen Irrthümern auf diesem wenig gekannten Gebiete will ich berichten, dass ich die eben erwähnten Versuche mit Baryumsulfat in der Absicht angestellt hatte, mich von der Bildung einer gewissen Menge Baryumchlorid durch Eindampfen von Salzsäure über Baryumsulfat zu überzeugen. Gemäss dem durch energetische Betrachtungen sehr wahrscheinlich gemachten Satze, dass alle Stoffe, welche unter gegebenen Verhältnissen in einem homogenen Gebilde möglich sind, auch wirklich sich bilden, wenn auch oft nur in verschwindend geringer Menge, erwartete ich diese Bildung, und gedachte das ausserordentlich empfindlich analytische Mittel, das in den geschilderten Verhältnissen liegt, zum Nachweis des Vorhandenseins zu benutzen. Der Versuch gelang auch in der That jedesmal; doch zeigt die oben geschilderte Erfahrung, wie nothwendig es ist, in jedem Falle sich durch den Gegenversuch von der Bündigkeit der zu ziehenden Schlüsse zu überzeugen.

76. Es wird zum Schlusse dieser aphoristischen Mittheilungen nicht überflüssig sein, auf die *analytische Bedeutung* der Erscheinungen hinzuweisen. Seit der Erkenntniss der wahren Ursache der Krystallisation der übersättigten Lösungen haben die Forscher, die in dem Gebiete experimentirt haben, insbesondere Violette, Gernez und Lecocq de Boisbaudran nichts versäumt, auf die analytische Verwendbarkeit dieser Auslösungsvorgänge hinzuweisen. Doch hat eine wirkliche Anwendung, vielleicht mit Ausnahme des Nachweises von einigen Salzen in Staube, nicht stattgefunden; sie ist in der That von einigen Umständen abhängig, die klar erkannt sein müssen, bevor von einer sicheren Anwendung die Rede sein kann.

Liegt die zu untersuchende Probe in Gestalt eines festen Körpers vor, so ist die Frage, ob ein bestimmter Stoff, von dem man eine übersättigte Lösung herstellen kann, vorhanden ist leicht zu beantworten, und die oben geschilderten Messungen zeigen, dass man sicher Mengen bis zu einem hunderttausendsten Milligramm erkennen kann. Das ist ungefähr die Grenze der empfindlichsten spectralanalytischen Reactionen, und man hat

hier den Vortheil einer sehr viel grösseren Mannigfaltigkeit der unterscheidbaren Stoffe.

Muss der zu untersuchende Stoff erst aus einer Lösung abgeschieden werden, so hängt die Möglichkeit des Erkennens davon ab, dass man ihn in eine Verbindung überführt, die beim Verdampfen unter den eingehaltenen Verhältnissen durch ein Stadium geht, *das bezüglich der fraglichen Verbindung im festen Zustande labil und nicht nur metastabil ist.* So würde man beispielsweise die Gegenwart des Natriums in einer Probe durch Ueberführen in das Sulfat und Abdampfen bei mittlerer Temperatur nicht nachweisen können. Denn eine Natriumsulfatlösung wird erst bei -8° labil; bei höherer Temperatur giebt sie entweder das Salz mit $7H^2O$, oder das wasserfreie Salz, die beide auf Lösungen nicht wirken, die für gewöhnliches Glaubersalz übersättigt sind. Natriumchlorat wäre dagegen eine geeignete Form, da dessen wässerige Lösung beim Eindampfen durch das labile Stadium geht.

77. Wegen der Wirkung der isomorphen Stoffe verhalten sich gewisse Lösungen wie Gruppenreagentien; so ist besonders eine Alaunlösung ein Hilfsmittel zur Erkennung der Sesquioxyde wie der Metalle der Kaliumgruppe. Es lässt sich absehen, dass man solche Gruppenreactionen mit Einzelreactionen derart zusammenstellen kann, dass schliesslich eine Kennzeichnung jedes besonderen Elements gelingt.

78. Ein ausserordentlich empfindliches Hilfsmittel zur *Erkennung des Isomorphismus* ist in den Auslösungserscheinungen gleichfalls gegeben. Und zwar ist man hier ganz sicher gegen Täuschungen durch Winkelähnlichkeiten geschützt. Die Frage, ob die Definition des Isomorphismus auf diesem Wege mit dem insbesondere von Retgers hervorgehobenen Kriterium, der Fähigkeit, Mischkrystalle zu bilden, übereinstimmende Ergebnisse zeigen wird, oder nicht, glaube ich bejahend beantworten zu dürfen, da zufolge der oben (S. 292) gegebenen Darstellung die Fähigkeit, Mischkrystalle zu bilden, die Voraussetzung dafür ist, dass ein Krystall auf die übersättigte Lösung eines isomorphen Salzes auslösend wirkt.

79. Auch habe ich mich überzeugt, dass nicht nur, wie schon seit langer Zeit festgestellt worden war, übersättigte Salzlösungen durch isomorphe Krystalle zum Erstarren gebracht werden, sondern auch überkaltete Schmelzen. Metachlorni-

trobenzol lässt sich bis auf Zimmertemperatur leicht überkalten, ohne zu erstarren; es erstarrt augenblicklich bei Berührung mit einem Glasfaden, der noch so leise an einem Krystall von festem m-Bromnitrobenzol gestrichen worden war. Dagegen ist das isomere p-Chlornitrobenzol auch in grösseren Stücken ohne jede Wirkung, und ebenso p-Bromnitrobenzol.

Leipzig, Physiko-chemisches Laboratorium.
Februar 1897.

Johannes Wislicenus, *Die tautomeren Formen des Dibenzoylmethans.*

Vor einigen Jahren gewann Bruno Loewenheim[1]) in meinem Laboratorium aus dem Benzylidenacetophenondibromür[2]) durch Zersetzung der siedenden alkoholischen Lösung mit einer eben solchen von 3 Mol. Aetzkali bei kurzem Kochen, Sättigen der Lösung mit Kohlensäure, Abdestilliren des Alkohols, Waschen des Oeles mit Wasser, Aufnehmen in Aether, Trocknen mit Chlorcalcium und Verdunsten des Aethers einen aus allen Lösungsmitteln in langen Prismen und Nadeln krystallisirenden Körper, der bei der Analyse die Formel $C_{15}H_{12}O_2$ ergab. Er ist somit dem *Dibenzoylmethan*[3]) isomer, besitzt den gleichen Schmelzpunkt wie dieses (77,5—78°)[4]), unterscheidet sich aber von letzterem ausser in seiner Krystallform durch seine Unlöslichkeit in wässrigen Alkalien und durch das Ausbleiben einer Färbung auf Zusatz von Eisenchlorid zur alkoholischen Lösung. Erst bei längerem Stehen tritt letztere ein, indem sich der Loewenheim'sche Körper

1) Dissertation, Leipzig 1890.

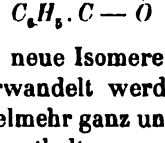
2) Claisen & Claparède, Ber. d. d. chem. Ges. **14**, 2464.

3) Ad. Baeyer & Perkin, Ber. d. d. chem. Ges. **16**, 2134; Perkin, Chemic. Soc. Journ. **47**, 250 und Claisen, Ber. d. d. chem. Ges. **20**, 655 und Liebig's Annalen **291**, 83.

4) In den Lehrbüchern findet sich der Schmelzpunkt des Dibenzoylmethans zu 84° angegeben. Es ist dies die Perkin'sche Zahl. Die Mittheilungen aller anderen Forscher erwähnen den Schmelzpunkt, so viel ich sehe, nicht. In meinem Laboratorium ist die Verbindung nach den Methoden öfter wiederholt, nach der neuesten Claisen'schen Mittheilung mehr als zehnmal bereitet und auf das Sorgfältigste gereinigt und mit den verschiedensten Normalthermometern auf ihren Schmelzpunkt untersucht worden. Niemals wurde 84°, sondern ohne jede Ausnahme 77—78° gefunden. Letztere Höhe zeigte übrigens auch ein von Claisen an meinen Collegen Prof. Dr. Drude für Untersuchungen über die Absorption elektrischer Wellen gesandtes Präparat. Die Zahl 84° ist daher aufzugeben und dafür 77,5°—78° zu setzen.

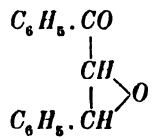
allmählich in das Dibenzoylmethan umwandelt. Dasselbe geschieht bei längerer Einwirkung von Alkalien und Säuren, in der Wärme stets weit schneller als bei gewöhnlicher Temperatur.

Die neue, dem Dibenzoylmethan nahe stehende Verbindung verhält sich infolge dieser Unwandelbarkeit gegen die meisten Reagentien wie das Dibenzoylmethan selbst. So wird sie durch starke Kalilösung beim Erhitzen in Benzoësäure und Acetophenon gespalten, durch verdünnte Salpetersäure zu Benzoësäure und Kohlensäure oxydirt und liefert mit Phenylhydrazin das *1-3-5-Triphenylpyrazol* von KNORR und LAUBMANN[1]). Durch Hydroxylamin werden beide Verbindungen in einen bei 140° schmelzenden, in sechsseitigen Prismen krystallisirenden stickstoffhaltigen Körper übergeführt, der in Wasser und Alkalien unlöslich, in kaltem Alkohol und Aether schwer, in Chloroform leicht löslich ist und durch Erhitzen mit concentrirter Salzsäure auf 140° nicht verändert wird. Die Analyse ergab die Formel $C_{15}H_{11}NO$, das Verhalten aber zeigt, dass ein *1-3-Diphenylisoxazol*



vorliegen muss. Da das neue Isomere mit Essigsäureanhydrid nicht in einen Ester verwandelt werden kann, bei längerem Kochen mit demselben vielmehr ganz unverändert bleibt, so kann es keine Hydroxylgruppe enthalten.

Unter der Voraussetzung, dass das BAEYER-PERKIN'sche und CLAISEN'sche sogenannte Dibenzoylmethan wirklich letzteres — d. h. $C_6H_5.CO.CH_2.CO.C_6H_5$ — sei, fiel die für den neuen Körper ursprünglich nächstliegende Formel $C_6H_5.C(OH):CH.CO.C_6H_5$ infolge der ausbleibenden Esterbildung dahin und es kam LIEBENHEIM daher zu der Vermuthung, seine Constitution möge die eines Aethylenoxydes, also



sein, weshalb er ihn auch »*Phenylbenzoyläthylenoxyd*« nannte

1) Berichte d. d. chem. Ges. **21**, 1206.

Ich habe in der unbehaglichen Ueberzeugung, dass diese Hypothese wahrscheinlich doch der Wahrheit nicht entspreche, mit der Publication der Loewenheim'schen Arbeit in Fachzeitschriften gezögert, bis eine neue Untersuchung bessere Aufschlüsse ergäbe. Uebrigens erschien die hydratische Formel $C_6H_5.C(OH):CH.CO.C_6H_5$ doch nicht absolut ausgeschlossen. Dieselbe konnte möglicherweise auch dem alten Dibenzoylmethan zukommen, das dann der neuen Verbindung geometrisch isomer sein würde:

$$\begin{array}{l} C_6H_5.C(OH) \\ \quad\| \\ H.C.CO.C_6H_5 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} C_6H_5.C(OH) \\ \quad\| \\ C_6H_5.CO.C.H \end{array}$$

Nachdem einige diese Fragen betreffenden Arbeiten anderer meiner Schüler resultatlos verliefen, wurde die Durchführung neuer Untersuchungen durch andere wissenschaftliche Interessen zurückgedrängt, bis die Studien meines Sohnes Wilhelm[1]) und Claisen's[2]) zeigten, dass die tautomeren Modificationen gewisser organischer Körper eine grössere Beständigkeit, als man ihnen vorher zuzuschreiben geneigt war, besitzen können.

Ich habe daher neuerdings mit Herrn H. Wells das vergleichende Studium des Dibenzoylmethans und des Loewenheim'schen Körpers wieder aufgenommen und neben einigen neuen, aus beiden gleichartig entstehenden Derivaten namentlich eine Thatsache aufgefunden, welche entscheidendes Licht in die Frage brachte.

Uebergiesst man nämlich je 5 g beider Isomerer mit 5 g Phenylpseudocyanat, so lösen sie sich beim Erwärmen auf etwa 40° klar auf. Nach einigem Stehen bei gewöhnlicher Temperatur krystallisirt die Loewenheim'sche Verbindung anscheinend unverändert am Boden aus, während die Dibenzoylmethanlösung vollständig erstarrt.

Nach fünftägigem Stehen wurden beide Gemenge mit Petrolpentan, in welchem die ursprünglichen Körper sehr schwer löslich sind, ausgezogen, bis sie nicht mehr nach Phenylpseudocyanat rochen. Es blieben bei Behandlung des Loewenheim'schen Körpers etwas mehr als 4 g einer festen Substanz zurück, welche stickstofffrei war, aus warmem Alkohol und Aether wie früher

1) Liebig's Annalen **291**, 147.
2) Ebenda **291**, 25.

in langen Prismen und Nadeln krystallisirte, in alkoholischer Lösung durch Eisenchlorid nicht direct, sondern erst bei längerem Stehen gefärbt wurde, und bei 77,5° bis 78° schmolz. Phenylpseudocyanat hatte daher die Verbindung unverändert gelassen.

Beim Verdunsten der Petrolpentanlösung hinterblieben mehr als 5 g einer farblosen Flüssigkeit, welche genau wie Phenylpseudocyanat roch, aber noch einige Nadeln abgeschieden hatte. Auf Zusatz von 5 g absolutem Alkohol erwärmte sie sich, verlor ihren Geruch und erstarrte nun im Vacuum über Schwefelsäure zu grossen Krystallen. Dieselben hinterliessen beim Auflösen in Aether noch etwas mehr als 0,5 g stickstofffreier Prismen von 77—78° Schmelzpunkt und auch sonst allen Eigenschaften der LOEWENHEIM'schen Verbindung. Die ätherische Lösung lieferte beim Verdunsten grosse Krystalle von *Phenylurethan*, $C_2H_5.O\,CO.NH.C_6H_5$, welche den richtigen Schmelzpunkt bei 51,5° bis 52° zeigten und durch Erhitzen mit Anilin auf 160° den bei 235° schmelzenden *symmetrischen Diphenylharnstoff* $CO(NH.C_6H_5)_2$ lieferten.

Das feste Product aus dem altbekannten sogen. *Dibenzoylmethan* wog bei sorgfältigem Ausziehen mit Petrolpentan 5,3 g und war stickstoffhaltig. Der von allen Lösungsmitteln ausserordentlich schwer aufgenommene Körper liess sich aus viel siedendem absolutem Alkohol umkrystallisiren. Er schied sich in schimmernden schneeweissen Flocken ab, die aus äusserst feinen langen geradflächig endenden mikroskopischen Prismen bestanden und sofort den constant bleibenden Schmelzpunkt 181° besassen.

Die Petrolpentanlösung hinterliess beim Verdunsten wenig unverändertes Phenylpseudocyanat, das durch Alkohol in das Urethan umgewandelt und als solches durch Aether von einem geringen Rückstande getrennt werden konnte. Letzterer schmolz direct bei 181°. Die alkoholischen Mutterlaugen gaben mit Eisenchlorid keine Färbung. Es war somit alles Dibenzoylmethan in den neuen Körper umgewandelt worden.

Die Zusammensetzung des letzteren entsprach der Formel $C_{22}H_{17}NO_3$.

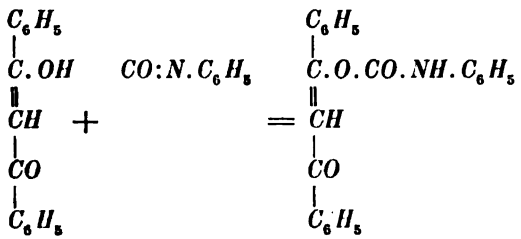
	Berechnet	Gefunden
C	76.97 Proc.	76.98 Proc.
H	4.96 »	5.09 »
N	4.08 »	4.24 »

d. h. der directen Summe von

Dibenzoylmethan	$C_{15}H_{12}O_2$
+ Phenylpseudocyanat	C_7H_5ON
	$C_{22}H_{17}O_3N.$

Solche Additionen von Pseudocyanat aber finden mit alkoholischen Hydroxylverbindungen unter Bildung von Urethankörpern statt.

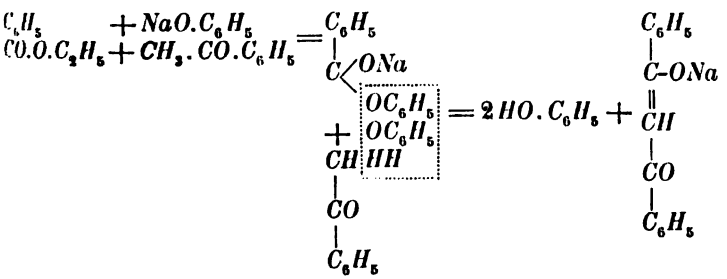
Aus diesen Thatsachen folgt, dass das bisher sogenannte Dibenzoylmethan seinen Namen mit Unrecht trägt, vielmehr das *α-Oxybenzyliden-Acetophenon* ist:



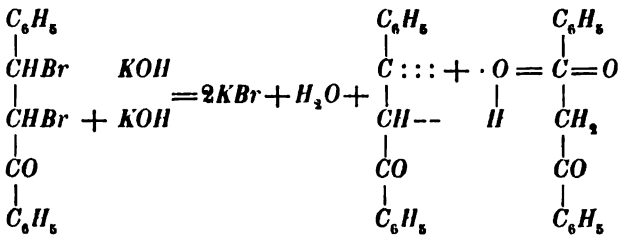
Dagegen ist das Loewenheim'sche Isomere das wahre Dibenzoylmethan.

Auch die Bildung der beiden tautomeren Formen ist nun leicht verständlich.

Das *α-Oxybenzyliden-Acetophenon* entsteht nach dem Claisen-schen Verfahren aus Benzoësäureester, Natriumäthylat und Acetophenon nach folgenden Gleichungen zunächst als Natriumverbindung:



Das *wahre Loewenheim'sche Dibenzyolmethan* dagegen aus Benzylidenacetophenondibromür durch Alkali:



Eine ausführlichere Abhandlung über diese Untersuchungen mit weiteren neuen Thatsachen wird wohl noch im Laufe des Jahres in den Berichten der deutschen chemischen Gesellschaft erscheinen.

GESAMMTSITZUNG DER GESELLSCHAFT

ZUR FEIER DES GEBURTSTAGES SR. MAJESTÄT DES KÖNIGS

AM 23. APRIL 1897.

Vortrag hielt

Herr **Johannes Wislicenus**, o. M.: Die geometrisch-isomeren Pseudobutylene.

Johannes Wislicenus, *Die geometrisch-isomeren Pseudobutylene.*

So zahlreiche Fälle geometrischer Isomerie ungesättigter organischer Verbindungen, bei denen jedes der beiden, untereinander doppelt gebundenen Kohlenstoffatome mit zwei verschiedenen Elementaratomen oder zusammengesetzten Radicalen vereinigt ist, auch bekannt geworden sind, so fehlt es doch noch vollständig an isomeren Kohlenwasserstoffen dieser Art.

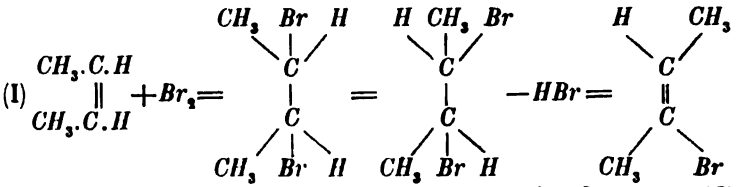
Die einfachste derartige Verbindung würde das *symmetrische Dimethyläthylen*, $CH_3.CH:CH.CH_3$, sein, von welchem wir im *Pseudobutylen* die eine der beiden möglichen Configurationen

$$\begin{matrix} CH_3.C.H \\ \| \\ CH_3.C.H \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} H.C.CH_3 \\ \| \\ CH_3.C.H \end{matrix}$$

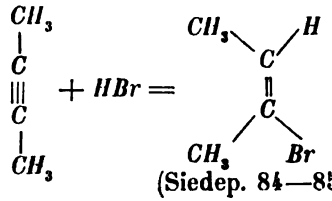
kennen, und zwar die erste, die »plansymmetrische«, mit correspondirender Stellung der beiden Methylgruppen, und ebenso der beiden Wasserstoffatome. Diese Configuration des Pseudobutylens ist in mehreren Arbeiten von mir und meinen Schülern [1]) durch den Nachweis festgestellt worden, dass dasselbe bei Behandlung seines Dibromürs mit einem Molekül Alkali in ein Monobrompseudobutylen mit centrisch-symmetrischer Stellung der Methylgruppen übergeht:

---

1) Wislicenus und Hölz, Liebig's Annalen **250**, 230 u. f. und Wislicenus Verhandlungen der Naturforscherversammlung zu Frankfurt a/M. 1896 Bd. 2.

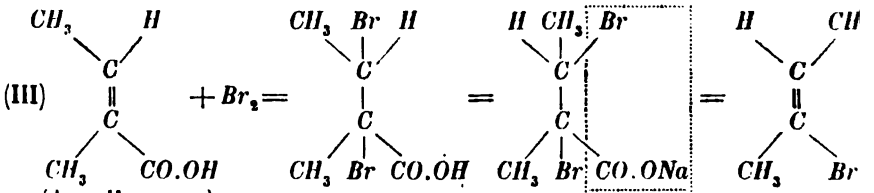
(I) 

wogegen das geometrisch-isomere Brompseudobutylen mit plansymmetrischer oder »correspondirender« Stellung der Methylgruppen durch Addition von 1 Mol. Bromwasserstoff an das Dimethylacetylen oder Crotonylen entsteht:

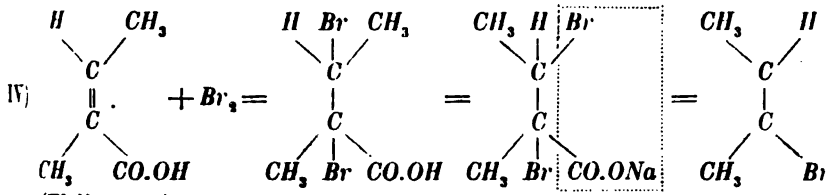
(II) 

Entsprechend diesen Configurationen wird aus der ersteren, der centrisch-symmetrischen Modification durch weitere Behandlung mit Alkali viel schwerer Bromwasserstoff unter Bildung von Dimethylacetylen abgespalten, als aus der letzten, der plansymmetrischen.

Nach der Feststellung dieser Verhältnisse liessen sich die Configurationen der beiden längst bekannten *α-β-Dimethyl-Acrylsäuren*, oder *Methylcrotonsäuren* $CH_3.CH:C(CH_3).CO.OH$, der *Angelicasäure* und *Tiglinsäure* ermitteln, deren Dibromüre beim Erwärmen ihrer neutralen Natriumsalzlösungen unter Kohlensäureentwickelung und Abspaltung von Bromnatrium je eines der beiden Monobrompseudobutylene liefern. Da die Angelicasäure hierbei das durch Alkali schwer zersetzbare Bromür giebt, so muss sie selbst die Methylgruppen in correspondirender Stellung enthalten:

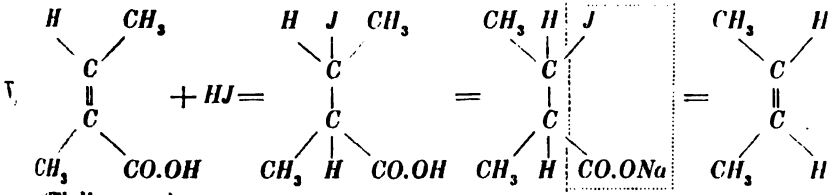
(III) 

die Tiglinsäure dagegen, aus deren Dibromür das durch Alkali leicht zersetzbare plansymmetrische Brompseudobutylen erhalten wird, muss die Methylgruppen in centrisch-symmetrischer Stellung binden:



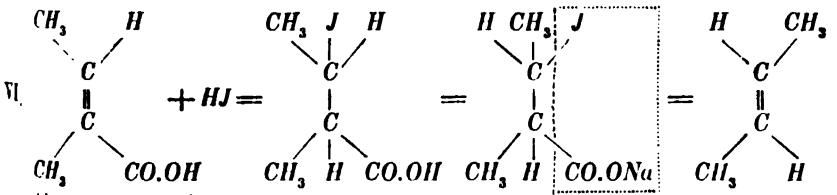
(Tiglinsäure)

In analoger Reaction müssen sich nun aus der Angelicasäure und Tiglinsäure die *beiden symmetrischen Dimethyläthylene* darstellen lassen, wenn es gelingt, aus ihnen durch Addition von Halogenwasserstoff zunächst zwei verschiedene β-Halogen α-Methylbuttersäuren zu gewinnen, und zwar muss dann die *Tiglinsäure* das schon bekannte *plansymmetrische Pseudobutylen* liefern:



(Tiglinsäure)

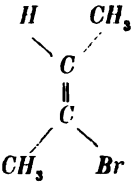
während das Additionsproduct der *Angelicasäure* die bisher nicht bekannte *centrisch-symmetrische Modification* geben muss:



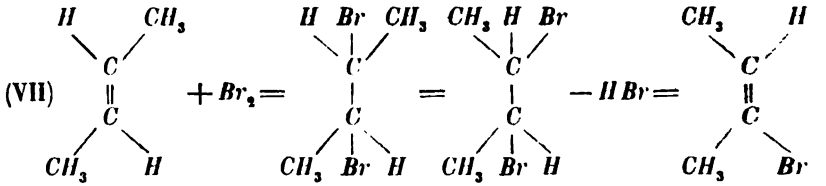
(Angelicasäure)

Die Configuration des letzteren aber wird bewiesen sein, wenn man anstatt des nach Gleichung (I) aus dem bekannten

Crotonylen entstehenden, durch Alkali schwer zersetzbaren centrisch-symmetrischen Brompseudobutylens



aus ihm durch Addition von Brom und Abspaltung von Bromwasserstoff das durch Alkali leicht zersetzbare plansymmetrische Brompseudobutylen erhält:



Mit der Ausführung der betreffenden Versuche hatte ich vor fast zehn Jahren Herrn HENRY PAUL TALBOT[1]) betraut, dem die Lösung der Aufgabe auch so weit gelang, dass er aus der Tiglinsäure und Angelicasäure durch Verbindung mit Jodwasserstoff zwei verschiedene Hydrojodsäuren der Formel $CH_3.CHJ.CH(CH_3).CO.OH$ erhielt, deren Natriumsalze beim Erwärmen ihrer Lösungen gasförmige Butylene gaben, welche je mit 1 Mol. Brom zu Dibromüren verbunden wurden, aus denen dann durch 1 Mol. Kali die erwarteten verschiedenen Monobrompseudobutylene wenigstens annähernd rein gewonnen wurden. Von den erwarteten Pseudobutylenen waren bei der ausserordentlichen Kostspieligkeit der Ausgangsmaterialien nicht genügende Quantitäten herstellbar, die zu einer Isolirung und Untersuchung in Substanz ausgereicht hätten. Mein Assistent, Herr MARTIN HENZE, nahm daher die Untersuchung neuerdings wieder auf und führte sie mit grossem Geschick zu voll befriedigendem Abschlusse.

---

1) Dissertation, Leipzig 1890.

Schon vor 18 Jahren hat A. Fittig durch Alexander Pagenstecher[1]) die Tiglinsäure und Angelicasäure durch Auflösen in bei 0° gesättigter Bromwasserstoffsäure mit letzterer in Verbindung gebracht, aber aus jeder der beiden Isomeren immer nur die *gleiche*, bei 66°—66,5° schmelzende »Hydrobromtiglinsäure« $CH_3.CHBr.CH(CH_3).CO.OH$ erhalten. Fast um dieselbe Zeit stellte Ernst Schmidt[2]) aus der Angelicasäure durch gleiche Behandlung mit Jodwasserstoff ein als »Hydrojodangelicasäure« bezeichnetes Additionsproduct dar, das bei 46° schmolz. Daneben wurde eine kleine Menge einer bei 76° noch nicht flüssig werdenden Verbindung gewonnen, aber nicht weiter untersucht. Die als Methylcrotonsäure bezeichnete Tiglinsäure dagegen gab ein zwar isomeres, aber bei 86,5° schmelzendes Product. Beide wandelte er durch Behandlung mit nascirendem Wasserstoff in die gleiche Valeriansäure, die Methyl-Aethyl-Essigsäure, um.

Als Herr Talbot ähnlich wie Pagenstecher die Tiglinsäure und Angelicasäure mit wässriger Bromwasserstoffsäure behandelte, gelangte er zu demselben Ergebnisse. Auch bei Anwendung einer Absorption von Bromwasserstoff in Chloroform entstand aus beiden die eine Pagenstecher'sche Hydrobromtiglinsäure von 66°—66,5° Schmelzpunkt, während durch Bromwasserstoff in Aethyläther der Ester dieser einzigen Säure gebildet wurde.

Bei Wiederholung der Versuche E. Schmidt's mit wässriger Jodwasserstoffsäure wurden die Angaben des letzteren zwar ebenfalls im Allgemeinen bestätigt gefunden, aber gleichzeitig die Beobachtung gemacht, dass die »Hydrojodangelicasäure« sicherlich kein reiner Körper war. Durch öfteres Umkrystallisiren gelang es, aus ihr etwas »Hydrojodmethylcrotonsäure« von 84° bis 86,5° Schmelzpunkt zu isoliren, während das Hauptproduct zwischen 46°—50° flüssig wurde und sich absolut nicht auf scharfen constanten Schmelzpunkt bringen liess.

Es wurde daraufhin eine gesättigte Absorption von Jodwasserstoff in Chloroform angewendet, die im Cubikcentimeter 0,07 g *HJ* enthielt. In ihr wurde wesentlich weniger als die dem Jodwasserstoff äquimolekulare Menge der ungesättigten Säuren gelöst, und nach siebentägigem Stehen in der Kälte der Jodwasser-

1) Liebig's Annalen **185**, 109.
2) Berichte d. d. chem. Ges. **12**, 252.

stoffüberschuss mit dem Chloroform im trocknen Luftstrome abgedunstet.

Aus Petroläther umkrystallisirt nahm die Hydrojodtiglinsäure den mit SCHMIDT's Angabe übereinstimmenden Schmelzpunkt 86,5°—87° leicht constant an, während die »Hydrojodangelicasäure« ebenso auf den Schmelzpunkt 59,5°—60,5° gebracht werden konnte. Beide Hydrojodsäuren zeigten bei der Analyse zur Formel $C_5H_9JO_2$ stimmende Gehalte an Jod.

Auch die Löslichkeitsverhältnisse beider jodhaltiger Säuren erwiesen sich als wesentlich verschiedene. So lösten

100 Theile Petroläther:	Hydrojodtiglinsäure	Hydrojodangelicasäure
bei 20—20,5°	2,9 Theile	16,8 Theile
» 24°	4,05 »	22,4 »
100 Theile Wasser dagegen		
bei 20°	0,64 Theile	1,49 Theile
» 20,5°	0,65 »	1,55 »

Mit 1 Mol. Tiglinsäure im Mörser zusammengerieben, geben beide Jodsäuren ein festes pulverförmiges Gemisch, mit Angelicasäure die Hydrojodtiglinsäure ein ebensolches, die Hydrojodangelicasäure dagegen sofort ein Oel. Hydrojodtiglinsäure krystallisirt in wohlausgebildeten Tafeln, Hydrojodangelicasäure in langen Prismen.

Zu denselben Resultaten gelangte Herr HENZE. Seine Hydrojodtiglinsäure schmolz möglichst gereinigt bei 86°—87°, die Hydrojodangelicasäure bei 58°—60°, meist zwischen 56°—58°.

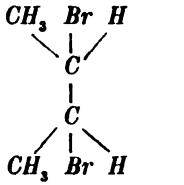
Beim Erwärmen der wässrigen Lösungen der mit Hülfe eines Überschusses von Soda dargestellten Natriumsalze erfolgt schon zwischen 30° und 40° die in den Gleichungen (V) und (VI) dargestellte Spaltung in Jodnatrium, Kohlensäure und Pseudobutylen. Lässt man das getrocknete Gasgemenge durch U-förmige, mit Eis- und Kochsalz gekühlte Röhren treten, so condensiren sich die Pseudobutylene zu leichten, äusserst beweglichen und verdampfbaren Flüssigkeiten, die sich in ihren Siedepunkten etwas unterscheiden. Letztere waren, wie immer bei tiefer Lage, mit Sicherheit nur in einem Raume bestimmbar, dessen Temperatur sehr niedrig, etwa um 0° herum lag. Dabei destillirte dasjenige

aus Hydrojodtiglinsäure $\begin{matrix} CH_3.C.H \\ \| \\ CH_3.C.H \end{matrix}$ bei 1° bis 1,5° plansymmetrische Pseudobutylen;

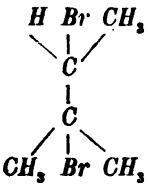
aus Hydrojodangelicasäure $\begin{matrix} H\cdot C\cdot CH_3 \\ \| \\ CH_3\cdot C\cdot H \end{matrix}$ bei 2,5° centrisch-symmetrische Pseudobutylen.

Ersteres ist, wie vorausgesehen, das bereits bekannte »Pseudobutylen«, dessen Siedepunkt Lieben[1]) bei einem Drucke von 741,4 mm zu + 1° fand. Die Dämpfe beider wurden von Brom begierig absorbirt. Durch Waschen mit verdünnter Kalilauge wurden die Dibromüre farblos erhalten, und nach dem Trocknen über Chlorcalcium rectificirt.

Das reine analysirte Dibromür aus



Hydrojodtiglinsäure — ging über bei 158°



Hydrojodangelicasäure — 161°

je unter einem Druck von 766 mm.

Aus ihnen wurde durch Erwärmen mit etwas mehr als der molekularen Menge Kali in alkoholischer Lösung je 1 Mol. Bromwasserstoff abgespalten und so nach den Gleichungen (I) und (II) die beiden Monobrompseudobutylene $CH_3.CBr:CBr.CH_3$ mit ihren schon früher bekannt gewordenen Siedepunkten: jetzt

aus Tiglinsäure $\begin{matrix} H.C.CH_3 \\ \| \\ CH_3.C.Br \end{matrix}$ bei 93,5°

aus Angelicasäure $\begin{matrix} CH_3.C.H \\ \| \\ CH_3.C.Br \end{matrix}$ bei 85°

gewonnen.

1) Liebig's Annalen **150**, 108.

In gleichen abgewogenen Quantitäten wurden dieselben mit gleichen Mengen alkoholischer Kalilösung in Glasröhren eingeschmolzen und nebeneinander genau gleich lange im siedenden Wasser (etwa eine Viertelstunde) erhitzt. Nach gleich schnellem Erkalten wurden die Röhren geöffnet, die Inhalte mit Wasser verdünnt, mit Salpetersäure schwach angesäuert und das aus den Monobromüren abgespaltene Brom mit Silbernitrat gefällt und als Bromsilber gewogen. Aus den so gefundenen Brommengen wurden alsdann die Quantitäten des zersetzten Monobromürs ermittelt und in Procenten der angewendeten Mengen letzterer berechnet.

Dabei ergab

		I	II
$\begin{matrix} H.C.CH_3 \\ \| \\ CH_3.C.Br \end{matrix}$	aus Tiglinsäure-Pseudobutylen zersetzte Antheile	12,2 %	11,1 %
$\begin{matrix} CH_3.C.H \\ \| \\ CH_3.C.Br \end{matrix}$	aus Angelicasäure-Pseudobutylen zersetzte Antheile	87,4 »	88,5 »

Damit aber ist der Beweis geliefert, dass thatsächlich das Pseudobutylen aus Tiglinsäure $\begin{matrix} CH_3.CH \\ \| \\ CH_3.CH \end{matrix}$ die plansymmetrische, aus Angelicasäure $\begin{matrix} CH_3.CH \\ \| \\ H.C.CH_3 \end{matrix}$ die centrisch-symmetrische Modification sein muss, wie es theoretisch vorauszusehen war.

SITZUNG VOM 3. MAI 1897.

Vorträge hielten

1. Herr Ad. Mayer, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von J. Thomae, o. M.: Lineare Construction der Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten.
2. Derselbe: Vorlegung einer Abhandlung von Ed. v. Weber-München: Résumé einer Integrationstheorie höherer partieller Differentialprobleme.
3. Herr Sophus Lie, o. M.: Die Theorie der Integralinvarianten ist ein Corrolar der Theorie der Differentialinvarianten.

J. Thomae, *Lineare Construction der Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten.* **Ergänzung der gleichnamigen Abhandlung in den Berichten von 1892.**

In der Sitzung vom 3. Sept. 1892 habe ich eine lineare Construction einer Fläche F zweiter Ordnung aus neun Punkten gegeben nach einer Methode, die sich als eine Modification der ältesten Construction von Hesse erweist und sich von ihr dadurch unterscheidet, dass sie den Punkt P, für den eine Polarebene in Bezug auf die gesuchte Fläche F ermittelt wird, so wählt, dass sich die Construction wesentlich vereinfacht. Sind die neun Punkte reale, so bedurfte es nur der Zeichnung von dreimal drei Ebenen, die durch je ein gegebenes Ebenenpaar von P harmonisch getrennt sind.

Sind unter den neun Punkten ein bis drei Paare aggregirt idealer (conjugirt imaginärer), so ist die dort gegebene Methode noch anwendbar, wenn schon, wie bemerkt wurde, die Auffindung der P für gewisse Gruppen von je sechs der gegebenen Punkte conjugirten Punkte etwas complicirter wird. Wenn aber vier Paare aggregirt idealer Punkte sich unter den neun befinden, so bedarf die Methode der Ergänzung, die ich hier geben will. Dabei wird es nun nicht mehr nöthig sein, erst einen Kegelschnitt der Fläche (durch Zeichnung von fünf seiner Punkte) herzustellen, sondern es wird auf einer Geraden durch einen (realen)

der gegebenen Punkte der zweite unmittelbar gefunden, und ebenso auf einer beliebigen Geraden die zu F gehörende Involution conjugirter Punkte. — Eine von Herrn HOSSFELD im Jahrgang 33 der Schlömilch'schen Zeitschrift auf Seite 187 gegebene sinnreiche Construction der Fläche F aus einem realen und vier Paaren aggregirt idealer Punkte erfordert die Construction des Schnittes einer Geraden mit zwei Hyperboloiden, und ist deshalb nicht linear. — Ich schliesse hieran einige Sätze, die durch die anzustellenden Betrachtungen nahegelegt werden.

§ 1. Auf den Geraden $\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4$ seien bez. die Punktpaare A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 gegeben, die alle vier aggregirt ideale sein können, und M sei ein neunter realer Punkt. Auf einer Geraden δ durch M soll der zweite Schnittpunkt von δ mit der durch die neun Punkte $A_1 \ldots B_4M$ bestimmten Fläche zweiter Ordnung F linear gefunden werden.

Durch einen Punkt N_1 auf δ und die Geraden $\gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4$ legen wir drei Ebenen $g_2\ g_3\ g_4$, die γ_1 bez. in $C_{12}\ C_{13}\ C_{14}$ treffen mögen. Dann ermitteln wir nach der in den Berichten von 1892 S. 547 gegebenen Methode die drei Punkte, die N_1 für die Gruppen von je sechs Punkten

$$A_2B_2C_{12}\ A_3B_3C_{13} \text{ auf } g_2g_3,$$
$$A_3B_3C_{13}\ A_4B_4C_{14} \text{ auf } g_3g_4,$$
$$A_4B_4C_{14}\ A_2B_2C_{12} \text{ auf } g_4g_2$$

in dem dort definirten Sinne conjugirt sind. Die durch diese drei Punkte bestimmte Ebene n_1 ist die Polarebene des Punktes N_1 für die Fläche Φ' zweiter Ordnung, die die Punkte A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 und die Gerade γ_1 enthält. Sie möge die Gerade δ im Punkte N_1' schneiden.

Läge N_1 auf dem Hyperboloid Φ', so könnte n_1 die Gerade δ ganz enthalten, und N_1' wäre unbestimmt. Dann nimmt man für N_1 einen anderen Punkt auf δ, wodurch sich Φ' nicht ändert. Liegt auch dieser Punkt auf Φ', und enthält n_1 δ, so liegt δ ganz in dieser Fläche, sie ist die durch $A_1 \ldots B_4M$ bestimmte Fläche, und es liegt nicht *ein* zweiter Schnittpunkt von δ in ihr, sondern δ fällt ganz in sie. Geht aber die Polarebene dieses zweiten Punktes nicht durch δ, so fällt N_1' mit N_1 zusammen.

Im Allgemeinen also gehört zu N_1 ein bestimmter Punkt N_1' auf δ, der ihm für Φ' conjugirt ist, und zu einem Punkt N_2 auf

ein Punkt N_2', der ihm für dieselbe Fläche Φ' conjugirt ist. Die Involution

$$N_1 N_1' \,.\, N_2 N_2' \,..$$

ist die zur Fläche Φ' gehörige Involution auf δ, sie wird linear gefunden.

In derselben Weise finden wir auf δ die Involution

$$N_1 N_1'' \,.\, N_2 N_2'' \,..$$

für eine Fläche Φ'' conjugirter Punkte, die die Punkte $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, $A_4 B_4$ und die Gerade γ_2 enthält.

Die beiden Involutionen

$$N_1 N_1' \,.\, N_2 N_2' \ldots, \quad N_1 N_1'' \,.\, N_2 N_2'' \ldots$$

bestimmen eine dritte, deren Doppelelemente von ihrem gemeinsamen Paare gebildet werden, linear. In der Projectivität nämlich

$$N_1' N_2' N_3' N_1'' N_2'' \ldots \overline{\wedge} N_1'' N_2'' N_3'' L_1' L_2' \ldots,$$

die durch die ersten drei Elementenpaare bestimmt ist, mögen, wie schon angeschrieben ist, den Punkten $N_1'' N_2''$ als Punkten der ersten Reihe $L_1' L_2'$ als Punkte der zweiten Reihe entsprechen. Werden dann $L_1'' L_2''$ so bestimmt, dass

$$N_1' N_1'' L_1' L_1'', \quad N_2' N_2'' L_2' L_2'' \ldots$$

harmonische Würfe sind, so ist

$$N_1'' L_1'' \,.\, N_2'' L_2'' \ldots$$

die Involution, die der Flächenbüschel (Φ', Φ'') auf δ bestimmt, und der in dieser Involution M zugehörige Punkt M' ist der Punkt, den δ mit den durch die neun Punkte $A_1 \ldots B_4 M$ bestimmten Flächen neben M noch gemein hat.

§ 2. Für die Bestimmung der Involution $N_1'' L_1'' \,.\, N_2'' L_2'' \ldots$ ist es nicht von Belang, dass δ den Punkt M enthält. Wir dürfen daher behaupten, auf einer beliebigen Geraden ϱ die Involution $R_1' R_1'' \,.\, R_2' R_2'' \ldots$ linear gefunden zu haben, die der Büschel $(\Phi' \Phi'')$ bestimmt.

Die Polarebenen des Punktes M für die Flächen des Büschels $(\Phi' \Phi'')$ bilden einen den Flächen projectiven Ebenenbüschel, der ϱ in den Punkten $S_1 S_2 \ldots$ scheiden möge. Es ist dann $S_1 S_2 \ldots$ $= R_1' R_1'' \,.\, R_2' R_2'' \ldots$ Die Polarebene des Punktes M für die durch

ihn gehende Fläche F des Büschels geht durch M selbst und ist deshalb linear construirbar. Sie treffe ϱ in S, und es entspreche S als Punkt der Reihe $S_1 S_2 \ldots$ das Paar $R' R''$ der ihr projectiven Involution $R_1' R_1'' . R_2' R_2'' \ldots$, dann sind $R' R''$ die Punkte, die die durch die neun Punkte $A_1 \ldots B_4 M$ gegebene Fläche mit ϱ gemein hat. Sie zu construiren ist natürlich eine quadratische Aufgabe, hingegen giebt die Theorie der Kegelschnittbüschel oder der Involutionen auf Kegelschnitten Mittel an die Hand, die Involution linear zu construiren, in der $R' R''$ doppelte Punkte sind, die Involution für F conjugirter Punkte auf ϱ.

Die hier gegebene Methode ist offenbar auch anwendbar, wenn die Punkte $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, $A_4 B_4$ alle oder zum Theil reale sind. Vielmehr vereinfacht sie sich in solchen Fällen, weil dann der N_1 für Gruppen von sechs der gegebenen Punkte conjugirte Punkt leichter zu finden ist. Sie macht nicht, wie die in den Berichten von 1892 gegebene, erst die Construction eines Kegelschnittes, durch Ermittelung von fünf Punkten desselben, nöthig, sondern giebt den zweiten Punkt auf einer Geraden durch einen realen der gegebenen Punkte unmittelbar.

Andererseits muss aber bemerkt werden, dass es einen speciellen Fall giebt, in dem die Methode versagt. Wenn nämlich die Flächen $\Phi' \Phi''$ identisch sind, wie man auch die Indices auf die Geraden $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ vertheilen möge, also wenn diese Geraden ohne sich zu schneiden auf demselben Hyperboloid liegen, denn dann wird durch $\Phi' \Phi''$ kein Flächenbüschel bestimmt. Dieser Fall bietet einerseits die Erleichterung, dass eine durch die acht Punkte $A_1 \ldots B_4$ gehende Fläche zweiter Ordnung unmittelbar gegeben ist. Die Auffindung einer zweiten Fläche durch diese Punkte ist aber weniger einfach. Man kann dann etwa nach der Methode des Herrn HOSSFELD (Schlömilch's Zeitschrift, Jahrg. 33) von der durch $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ bestimmten Curve dritter Ordnung, von der γ_4 eine Secante ist, einige reale Punkte construiren, und dann ein zweites Hyperboloid herstellen, das die Punkte $A_1 .. B_3$ und die Gerade γ_4 enthält, und dieses mit dem ersten Hyperboloid in der oben angegebenen Weise benutzen, um den zweiten Punkt der gesuchten Fläche F auf δ zu bestimmen. Man kann aber auch aus dem realen Punkte und den sechs idealen Punkten $A_1 .. B_3$ und dreimal zwei in einer Ebene e durch γ_4 willkürlich gegebenen Punkten drei Flächen zweiten Grades construiren und in dem durch sie in der

Ebene e bestimmten Kegelschnittnetze den Kegelschnitt bestimmen, der durch $A_4 B_4$ geht. Er gehört der gesuchten Fläche an.

§ 3. In meinem Aufsatze in den Berichten von 1892 findet sich die Bemerkung, dass neun Punkte

$$M_{11} M_{12} M_{13}, \quad M_{21} M_{22} M_{23}, \quad M_{31} M_{32} M_{33}$$

auf einer Curve vierter Ordnung liegen, und dass demnach ein Flächenbüschel durch sie geht, wenn die drei Punkte, die dem Punkte P, dem Schnittpunkte der drei bez. die Tripel $M_{11} M_{12} M_{13}$, $M_{21} M_{22} M_{23}$, $M_{31} M_{32} M_{33}$ enthaltenden Ebenen $e_1 e_2 e_3$ für die Gruppen von je sechs in den Ebenenpaaren $e_2 e_3$, $e_3 e_1$, $e_1 e_2$ liegenden Punkten conjugirt sind, in eine Gerade fallen, und es wird dort eine einfachere Begründung und eine Ergänzung des Beweises für einen nicht erledigten Fall versprochen. Diesem Versprechen soll jetzt nachgekommen werden, wobei wir annehmen, dass wenigstens drei der gegebenen Punkte reale seien, in welchem Falle allein sich die neun Punkte in drei reale Ebenen gruppiren lassen.

Es mögen $A_1 B_1 M_1$, $A_2 B_2 M_2$, $A_3 B_3 M_3$ bez. in den realen Ebenen $e_1 e_2 e_3$ liegen. $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ können Paare idealer Punkte sein. Die Schnittlinien $e_2 e_3$, $e_3 e_1$, $e_1 e_2$ werden bez. mit $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ bezeichnet. P ist der Schnittpunkt der Ebenen $e_1 e_2 e_3$, Q_1 sei ihm für die in $e_2 e_3$, Q_2 für die in $e_3 e_1$, Q_3 für die in $e_1 e_2$ liegenden Punkte conjugirt, und $Q_1 Q_2 Q_3$ sollen in einer Geraden γ liegen, die die Ebenen $e_1 e_2 e_3$ bez. in den Punkten $E_1 E_2 E_3$ schneidet. Alsdann wird die Fläche F, die durch die neun Punkte geht, unter den Flächen zu suchen sein, die in den Ebenen $e_1 e_2 e_3$ Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten $A_1 B_1 M_1 M_1'$, $A_2 B_2 M_2 M_2'$, $A_3 B_3 M_3 M_3'$ bestimmen, deren vierte Grundpunkte $M_1' M_2' M_3'$ in folgender Weise festgelegt sind.

Der Büschel in e_1 geht durch $A_1 B_1 M_1$ und PE_1 sind für ihn conjugirte Punkte. Liegt P nicht mit zweien von diesen Punkten in einer Geraden, so ist durch sie und PE_1 ein Kegelschnittbüschel und also der Punkt M_1' vollständig bestimmt. Auf analoge Weise sind M_2', M_3' bestimmt, wenn nicht P mit irgend zweien der gegebenen Punkte auf einer Geraden liegt. Ein Kegelschnitt K_1 des Büschels $(A_1 B_1 M_1 M_1')$ schneide α_3 in $L_1 L_2$, diese Punkte bestimmen mit $A_2 B_2 M_2$ einen Kegelschnitt K_2'. Für jede durch $K_1 K_2$ gehende Fläche zweiter Ordnung sind PQ_3 conjugirte

Punkte, und ebenso PE_1, also auch PE_2, weil $E_1 Q_3 E_2$ auf einer Geraden liegen, der Kegelschnitt K_2 gehört dem Büschel $(A_2 B_2 M_2 M_2')$ an, und wir können sagen, jeder Kegelschnitt K_1 des Büschels $(A_1 B_1 M_1 M_1')$ bestimmt einen Kegelschnitt K_2 des Büschels $(A_2 B_2 M_2 M_2')$.

Die Polare π_1 von P für K_1 und die Polare π_2 von P für K_2 schneiden sich auf α_3 in dem von P durch $L_1 L_2$ harmonisch getrennten Punkte. Die Polare π_3 von P für den Kegelschnitt K_3, den K_2 im Büschel $(A_3 B_3 M_3 M_3')$ bestimmt, schneidet sich mit π_2 in einem Punkte auf α_1. Die Ebenen $(\pi_1 \pi_2)$ und $(\pi_2 \pi_3)$ enthalten γ und π_2, fallen also zusammen, $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ liegen in einer Ebene, und $\pi_3 \pi_1$ schneiden α_2 in einem und demselben Punkte. Daraus folgt, dass die Polare des Punktes P für den Kegelschnitt K_1', den K_2 im Büschel $(A_1 B_1 M_1 M_1')$ bestimmt, mit π_1 zusammenfällt, weil sie mit dieser Geraden neben dem Punkt auf α_1 noch den Punkt E_1 gemein hat. Durch Pol und Polare $P\pi_1$ ist aber ein Kegelschnitt des Büschels $(A_1 B_1 M_1 M_1')$ völlig bestimmt, es fallen K_1' und K_1 zusammen. Wie man also K_1 auch wählen mag im Büschel $(A_1 B_1 M_1 M_1')$, es bestimmt dieser Kegelschnitt in $(A_2 B_2 M_2 M_2')$ einen Kegelschnitt K_2, K_2 in $(A_3 B_3 M_3 M_3')$ einen Kegelschnitt K_3, und $K_1 K_2 K_3$ schneiden sich paarweise in zwei Punkten, es geht folglich durch sie eine Fläche zweiter Ordnung, es giebt einfach unendlich viele Flächen zweiter Ordnung durch die neun Punkte, die mithin in einer Curve vierter Ordnung erster Species liegen.

Geht die Gerade γ durch den Punkt P, geht die Polarebene von P für die gesuchte Fläche durch P, so liegt P auf ihr selbst, die Punkte $M_1' M_2' M_3'$ fallen mit P zusammen. Ein Kegelschnitt K_1 von $(A_1 B_1 M_1 P)$ bestimmt einen Kegelschnitt K_2 des Büschels $(A_2 B_2 M_2 P)$, die Tangenten an $K_1 K_2$ im Punkte P liegen in der Tangentialebene einer durch $K_1 K_2$ gehenden Fläche zweiter Ordnung, sie liegen also mit γ in einer Ebene, weil auf γ noch ein P conjugirter Punkt liegt. Ebenso liegen die Tangenten an K_2 und K_3, welcher Kegelschnitt durch K_2 im Büschel $(A_3 B_3 M_3 P)$ bestimmt wird, in einer Ebene, und ebenso die Tangente an K_3 und K_1', wenn K_1' der durch K_3 im Büschel $(A_1 B_1 M_1 P)$ bestimmte Kegelschnitt ist. Die Tangenten in P an $K_1 K_2 K_3 K_1'$ liegen mit γ in einer Ebene, was nur möglich ist, wenn die Tangenten an $K_1 K_1'$ und somit diese Kegelschnitte selbst zusammenfallen. Die drei Kegelschnitte $K_1 K_2 K_3$, weil sie sich in je einem Punkte

schneiden, und zum zweiten Male in P so schneiden, dass dort ihre Tangenten in einer Ebene liegen, bestimmen eine Fläche zweiter Ordnung. Auch jetzt giebt es für jede Wahl von K_1 ein K_2 und K_3, die die Bedingung erfüllen, dass durch sie eine Fläche zweiten Grades geht, auch jetzt liegen die neun Punkte in einer Curve vierter Ordnung erster Species.

Sind also neun Punkte gegeben, und ordnet man sie in drei Ebenen $e_1 e_2 e_3$ zu je dreien an, und fallen die drei Punkte $Q_1 Q_2 Q_3$, die dem Schnittpunkte P der drei Ebenen für die drei Gruppen von je sechs Punkten in den Ebenenpaaren $e_2 e_3$, $e_3 e_1$, $e_1 e_2$ conjugirt sind, in eine Gerade, so liegen die neun Punkte in einer Curve vierter Ordnung erster Species.

Liegt jedoch P mit zweien von den gegebenen Punkten, z. B. mit $A_1 B_1$ in einer Geraden, so fallen von den Punkten $Q_1 Q_2 Q_3$ zwei, nämlich $Q_2 Q_3$ auf den Punkt zusammen, der von P durch $A_1 B_1$ harmonisch getrennt ist. Die Punkte $Q_1 Q_2 Q_3$ liegen also in einer Geraden, bestimmen die Polare von P nicht vollständig, die Fläche ist aber doch im Allgemeinen eine bestimmte. Da bei der hier im § 1 gegebenen Construction der Fläche F aus neun Punkten für P ein Punkt N_1 eintritt, der auf δ willkürlich gewählt werden kann, so bewirkt dieser Fall für unsere Flächenconstruction keine Ausnahme.

§ 4. Wohl aber ist es als ein besonderer Fall anzunehmen, wenn die Fläche Φ' durch $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, $A_4 B_4$, γ_4 nicht völlig bestimmt ist, wenn γ_4 Secante der Curve dritter Ordnung ist, die die Punkte $A_2 \ldots B_4$ bestimmen. Dann liegen für jeden Punkt N_1 die ihm für die Gruppen

$$\begin{array}{ll} A_2 B_2 C_{12} & A_3 B_3 C_{13} \\ A_3 B_3 C_{13} & A_4 B_4 C_{14} \\ A_4 B_4 C_{14} & A_2 B_2 C_{12} \end{array}$$

conjugirten Punkte in einer Geraden, und wie Φ' ist auch die Polare des Punktes N_1 für diese Fläche nicht bestimmt.

Abgesehen davon, dass man diesen Fall im Allgemeinen durch passende Vertheilung der Indices auf die Geraden γ umgehen kann, lässt sich die Construction in folgender Weise erledigen.

Durch die Punkte $A_2 B_2 \ldots B_4$ und die Gerade γ_4, wenn γ_4 Secante der Raumcurve dritter Ordnung $(A_2 B_2 \ldots B_4)$ ist, lassen sich unendlich viele Hyperboloide legen und auch eins, das durch

den Punkt M geht. Dieses letztere ist die gesuchte Fläche F durch die neun Punkte. Die Polarebene von M für F geht durch die Gerade γ, die die drei dem Punkte M für die drei Gruppen von sechs Punkten

$$A_1B_1C_{12}\ A_2B_2C_{13},\ A_3B_3C_{23}\ A_4B_4C_{45},\ A_5B_5C_{46}\ A_6B_6C_{14}$$

conjugirten Punkte enthält, wenn $C_{i\mu}$ der Schnitt der Ebene $(\gamma_\mu M)$ mit γ_i ist. Sie wird mit den in den Berichten von 1892 von mir gegebenen Mitteln bestimmt. Soll der Punkt M auf dem Hyperboloid F liegen, so ist (γM) die Polarebene von M. Sie ist die Tangentialebene des Punktes M und schneidet zwei gerade Linien aus der Fläche F, von denen eine die Verbindungslinie γ' von M und des Schnittpunktes der Ebene (γM) mit der Geraden γ_i ist. Jetzt hat man von der gesuchten Fläche zwei gerade Linien γ_i und γ' und die sechs Punkte $A_2 \ldots B_4$ und hat verschiedene Mittel, die Fläche zu vervollständigen. Will man z. B. die hier gegebene Methode der Construction anwenden, so kann man die Punkte $A_1 B_1$ durch zwei reale ersetzen, von denen der eine auf γ_1, der andere auf der eben gefundenen Geraden γ' liegt.

Sollte der Punkt M auf der Geraden γ liegen, so würde die Aufgabe unbestimmt werden. Man kann nach anderen Fällen fragen, in denen die Aufgabe mehrere Lösungen zulässt, in denen die Punkte auf einer Curve vierter Ordnung erster Species liegen. Dies tritt ein, wenn die Involution auf einer durch M gehenden Geraden δ, die den zweiten Schnittpunkt der Fläche mit δ bestimmt, eine uneigentliche wird, und wenn M ihr Doppelpunkt ist.

§ 5. Sind die neun gegebenen Punkte reale, so kann man, wie ich in den Berichten von 1892 gezeigt habe, zur Auffindung des Punktes, der einem in der Schnittlinie zweier Tripelebenen liegenden Punkte P für die sechs Punkte der beiden Tripel conjugirt ist, Ebenen benutzen, die von P durch ein Ebenenpaar harmonisch getrennt sind, und darin liegt die grössere Einfachheit der Flächenconstruction in diesem Falle. Man kann versuchen, auch für den Fall, dass unter den sechs Punkten beliebig viele aggregirt ideale sich befinden, die Ebenen zu ermitteln, die von einem Punkte P durch Ebenenpaare, die je zwei Tripel der sechs Punkte enthalten, harmonisch getrennt sind. Eine solche harmonische Ebene wird immer eine reale Gerade enthalten, es handelt sich darum, diese Gerade und die Involution aufzufinden, in der die gesuchte Ebene eine Doppel-

ebene ist. Die Tripelebenen enthalten auch je eine reale Gerade, die gemeinsame Axe eines Paares von Tripelebenen wird aber im Allgemeinen eine ideale Gerade sein und nur in besonderen Fällen einen realen Punkt enthalten. Es lässt sich voraussehen, dass die Aufsuchung der harmonischen Ebenen im Allgemeinen nicht zu einer Vereinfachung der Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten, unter denen ideale sind, führen wird. Aber die Beantwortung der Frage nach den harmonischen Ebenen ist an sich von Interesse, weshalb sie hier gegeben werden soll.

Sind $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ drei Paare aggregirt idealer Punkte (auf den Geraden $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$), so kann man durch die Punkte $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ je eine Ebene legen, die sich in einer realen Geraden schneiden, ihre Construction ist von Herrn HOSSFELD im 33. Jahrgang von Schlömilch's Zeitschrift auf Seite 112 gegeben. Die Ebene e, die in der Involution, deren Doppelebenen $(A_1 A_2 A_3)$, $(B_1 B_2 B_3)$ sind, zu der durch den Punkt P gehenden Ebene gehört, ist die gesuchte harmonische, so dass dieser Fall als erledigt anzunehmen ist.

§ 6. Als zweiten Fall betrachten wir den, dass die Ebene e gesucht wird, die von einem Punkte P durch eine reale Ebene f und eine ideale g harmonisch getrennt ist. Eine ideale Ebene g enthält unter allen Umständen eine reale Gerade γ und wird als eine Doppelebene einer Ebeneninvolution (γ), deren Träger γ ist, gegeben. Die zweite Doppelebene sei g'.

Wir legen durch P drei gerade Linien $\delta_1 \delta_2 \delta_3$. Auf δ_1 bestimmt die Involution (γ) eine Punktinvolution

$$D_{11} D'_{11} \cdot D_{12} D'_{12} \cdots$$

Wir bestimmen $X_{11} X'_{11}$ $X_{12} X'_{12} \ldots$ so dass

$$PD_{11} X_{11} D_1, \quad PD'_{11} X'_{11} D_1, \quad PD_{12} X_{12} D_1 \ldots$$

harmonische Würfe sind, während D_1 der Schnittpunkt von δ_1 mit der Ebene f ist. Dann ist $X_{11} X'_{11} \cdot X_{12} X'_{12} \ldots$ eine Involution, deren Doppelpunkte $X_1 X'_1$ sein mögen. Sie sind durch f und g bez. f und g' von P harmonisch getrennt. Auf δ_2 seien $X_2 X'_2$, auf δ_3 $X_3 X'_3$ von P durch dieselben Ebenenpaare von P harmonisch getrennt. Die Ebenen $(X_1 X_2 X_3)$ $(X'_1 X'_2 X'_3)$ sind die Ebenen, die durch fg bez. fg' von P harmonisch getrennt sind. Dabei ist auf die richtige Zuordnung der Punkte zu achten. Die Auffindung des Ebenenpaares $(X_1 X_2 X_3)$ $(X'_1 X'_2 X'_3)$ durch je drei

ideale Punkte ist einfacher als im allgemeinen Falle, weil die Paare aggregirt idealer Punkte auf drei Geraden durch einen Punkt liegen. Die Gerade, von der die drei Involutionen auf $\delta_1\,\delta_2\,\delta_3$ gleichzeitig projicirt werden, durch die die Ebenen $(X_1\,X_2\,X_3)$ $(X_1'\,X_2'\,X_3')$ hindurchgehen, liegt in der Ebene, welche die dem Schnittpunkte $(\delta_1\,\delta_2\,\delta_3)$ in den Involutionen $(X_1\,X_1')$ $(X_2\,X_2')$ $(X_3\,X_3')$ zugeordneten Punkte enthält. Sie ist die Gerade, die von P durch γ und f harmonisch getrennt ist.

§ 7. Um die Aufgabe zu lösen, die Ebene e zu bestimmen, die durch zwei ideale (nicht aggregirte) Ebenen von einem Punkte P harmonisch getrennt ist, nehmen wir die (ebene) Aufgabe vorauf, die Gerade zu finden, die durch zwei ideale Gerade in einer Ebene von einem in derselben Ebene liegenden Punkte P harmonisch getrennt ist. Die beiden idealen Geraden seien $\alpha\beta$, die ihnen aggregirten $\alpha'\beta'$. U sei der reale Schnittpunkt von $\alpha\,\alpha'$, V der von $\beta\beta'$. Die Punkte P und U werden durch eine Gerade δ_u verbunden. Die Paare der Involution (V), die $\beta\beta'$ zu Doppelstrahlen hat, seien $\beta_1\beta_1' \,.\, \beta_2\beta_2'$. Auf δ_u werden die Punkte $B_1\,B_1'$, $B_2\,B_2'\ldots$ so bestimmt, dass

$$P\beta_1\,B_1\,U,\quad P\beta_1'\,B_1'\,U,\quad P\beta_2\,B_2\,U\ldots$$

harmonische Würfe sind. Dann bilden $B_1\,B_1'\,.\,B_2\,B_2'\ldots$ eine Involution, deren doppelte Punkte BB' bez. durch $\alpha\beta, \alpha\beta'$ oder auch durch $\alpha'\beta$, $\alpha'\beta'$ harmonisch getrennt sind. Auf der PU verbindenden Geraden δ_u seien AA' die Punkte, die durch $\alpha\beta$, $\alpha'\beta$ und auch durch $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ von P harmonisch getrennt sind. Es giebt zwei Punkte R und S, von denen aus die Involutionen $A\,.\,A'$. $B\,.\,B'$ gleichzeitig projicirt werden. Eine von den beiden projicirenden Involutionen (R) (S) hat die Strahlen zu Doppelstrahlen, die hier gesucht werden. Welcher der beiden Punkte R S unserer Aufgabe entspricht, wird aus der Zuordnung der Punkte AA', BB' erkannt.

Liegt der Punkt P mit UV auf einer Geraden, so ist der Punkt R auf ihr, der von P durch UV harmonisch getrennt ist, der reale Punkt der gesuchten harmonischen Geraden, die Punkte R und S des allgemeinen Falles fallen hier in einen zusammen. Der Aufgabe, zwei Punktinvolutionen gleichzeitig zu projiciren, steht dualistisch die gegenüber, zwei Strahleninvolutionen durch eine Gerade so zu schneiden, dass die beiden Strahleninvolutionen auf ihr dieselbe Involution erzeugen. Oder, so wie man

den realen Punkt der idealen Geraden finden kann, die durch zwei gegebene ideale (nicht aggregirte) Punkte geht, so kann man auch die reale Gerade finden, auf der sich zwei ideale (nicht aggregirte) gerade Linien schneiden. Die reale Gerade, auf der sich $\alpha\beta$ und ebenso $\alpha'\beta'$ schneiden, ist Trägerin einer Involution, deren Doppelpunkte $(\alpha\beta)$ $(\alpha'\beta')$ sind. Projicirt man diese Involution von R aus, so sind die Doppelstrahlen dieser Involution die Geraden, die unsere Aufgabe lösen.

Damit ist zugleich die Aufgabe gelöst: Auf einer Geraden sind zwei Involutionen mit den Doppelpunkten AA' BB' gegeben, es sollen die vier Punkte gefunden werden, die von einem Punkte P derselben Geraden durch AB, AB', $A'B$, $A'B'$ harmonisch getrennt sind. Sie sind die Doppelpunkte zweier mit den gegebenen Mitteln erhältlichen Involutionen.

§ 8. Nun kann man leicht die räumliche Aufgabe lösen, die Ebenen zu finden, die von einem Punkte P durch zwei ideale Ebenen a und b harmonisch getrennt sind. — Die idealen Ebenen a b seien gegeben als Doppelebenen zweier Ebeneninvolutionen, deren gerade Träger $\alpha\beta$ sein mögen, und $a'b'$ seien die ab aggregirten Ebenen. Wir legen durch P eine Ebene e, die aus ab die idealen Geraden δ_a δ_b herausschneidet, und ε sei die Gerade, die von P durch δ_a δ_b harmonisch getrennt ist. Sie wird nach den Vorschriften des vorigen Paragraphen gefunden. In einer zweiten Ebene e' durch P, die aus ab die Geraden $\delta_a'\delta_b'$ schneidet, sei ε' die harmonische Gerade. Die Geraden $\varepsilon\varepsilon'$ bestimmen die Ebene, die von P durch ab harmonisch getrennt ist. Legt man durch P diejenige Gerade, die $\alpha\beta$ trifft, und ist auf ihr Q der Punkt, der von P durch $\alpha\beta$ harmonisch getrennt ist, so ist er ein Punkt der harmonischen Ebene. Die Ebenen e und e' mag man durch P und Q legen. Dann sind $\varepsilon\varepsilon'$ Doppelstrahlen von Involutionen in e bez. e', deren Centrum Q ist. Die Verbindungsebenen je zweier nicht aggregirter Doppelstrahlen dieser Involutionen sind die Ebenen, die von ab ab' $a'b$ $a'b'$ harmonisch getrennt sind. Zwei dieser Ebenen haben eine reale Gerade gemein, zwei eine andere, die beiden Geraden treffen sich in Q.

Liegt P mit $\alpha\beta$ in einer Ebene, so fallen die beiden realen Geraden, durch die die vier harmonischen Ebenen gehen, in die Gerade zusammen, die von P durch $\alpha\beta$ harmonisch getrennt ist.

§ 9. Es seien sechs Punkte $ABCM_1M_2M_3$ gegeben, von denen keine vier in einer Ebene liegen. AB können aggregirt ideale sein, es kommt bei dem hier zu erweisenden Satze überhaupt nur die sie verbindende Gerade γ in Betracht. Ich nehme den Satz als bekannt an, dass ein Punkt Q, der von dem Punkte P durch Ebenenpaare

$$(ABM_1)\ (M_2M_3C)$$
$$(ABM_2)\ (M_3M_1C)$$
$$(ABM_3)\ (M_1M_2C)$$

die sich bez. in den Geraden $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ schneiden mögen, harmonisch getrennt ist, auch noch durch das sich in der Geraden α schneidende Ebenenpaar

$$(ABC)(M_1M_2M_3)$$

harmonisch von P getrennt ist.

Die Geraden $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ bestimmen ein Hyperboloid $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$, auf dem auch γ liegt. Wir beweisen den Satz: *Die zweite Gerade δ, die die Ebene (ABC) aus dem Hyperboloid $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ schneidet, ist die Gerade, die von C durch α und γ harmonisch getrennt ist.*

Von den Geraden $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ schneidet keine die andere. Jede von ihnen nämlich trifft die Gerade γ. Schneiden sich zwei von ihnen in einem Punkte, der nicht auf γ liegt, so liegen sie mit γ in einer Ebene. Es wird dann z. B. $\gamma\alpha_1\alpha_2$ in einer Ebene liegen, d. h. es müssten (ABM_1) und (ABM_2) zusammenfallen und ABM_1M_2 in einer Ebene liegen, was gegen die Voraussetzung ist.

Schneiden sich aber $\alpha_1\alpha_2$ in einem Punkt N auf γ, so würden M_3CM_2N, M_3CM_1N in je einer Ebene liegen. Diese Ebenen müssten entweder zusammenfallen, also es müssten $M_1M_2M_3C$ in einer Ebene liegen, oder (M_2M_3C) und (M_3M_1C) müssten sich in einer Geraden CN der Ebene ABC schneiden, also würden sich (ABC), (M_2M_3C), (M_3M_2C) in einer Geraden CN der Ebene (ABC) schneiden, es würden sich die drei Ebenen in einer Geraden schneiden, die M_3C enthält, es müssten ABM_3C in einer Ebene liegen, was gegen die Voraussetzung ist.

Die Geraden $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ bestimmen daher ein Hyperboloid, in dem auch γ liegt, weil γ die drei Geraden schneidet.

Sucht man zu einem Punkte P den Punkt Q, der von P durch die drei Ebenenpaare $(ABM_1)\ (M_2M_3C)$, $(ABM_2)\ (M_3M_1C)$,

(ABM_3) $(M_1 M_2 C)$ harmonisch getrennt ist, so erhält man im Allgemeinen einen und nur einen Punkt Q. Da die drei Axen $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ dieser Ebenenpaare sich nicht schneiden, so sind die von P durch diese Paare harmonisch getrennten Ebenen sicher von einander verschieden. Schneiden sie sich in einem Punkte, so ist der Schnittpunkt der Punkt Q. Es kann aber P so liegen, dass sich die drei harmonischen Ebenen in einer Geraden ε schneiden. Diese Gerade ε muss dann auch $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ schneiden, weil sie mit jeder dieser Geraden in je einer Ebene liegt, sie muss deshalb auf dem Hyperboloid $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ liegen. Legt man durch P und ε eine Ebene e, so schneidet sie die drei Ebenen

$$(ABM_1) \quad (ABM_2) \quad (ABM_3)$$

in drei Geraden durch einen Punkt L auf γ. Die Gerade PL mag ε in N, die Ebenen

$$(M_2 M_3 C) \quad (M_3 M_1 C) \quad (M_1 M_2 C)$$

bez. in $N_1 N_2 N_3$ schneiden. Die Punkte $PN_1 NL$, $PN_2 NL$, $PN_3 NL$ müssen harmonische Würfe bilden, $N_1 N_2 N_3$ müssen identisch sein, also mit C zusammenfallen, P muss in der Ebene (ABC) liegen, N liegt natürlich auch in dieser Ebene.

Suchen wir zu den drei Ebenen $(\varepsilon \alpha_1)$ $(\varepsilon \alpha_2)$ $(\varepsilon \alpha_3)$ die Ebenen, die von ihnen durch die oben genannten Ebenenpaare mit den Axen $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ harmonisch getrennt sind, so schneiden sie sich in (mindestens) einem Punkte P, dessen für die drei Ebenenpaare conjugirte Punkte die Gerade ε ausfüllen. Es giebt also wirklich einen Punkt P, zu dem nicht *ein* conjugirter, sondern unendlich viele, eine Gerade ε ausfüllende Punkte gehören. Die Punkte von ε müssen P auch für das Ebenenpaar (ABC) $(M_1 M_2 M_3)$ conjugirt sein. Einem Punkte P in (ABC) sind im Allgemeinen für das Ebenenpaar (ABC) $(M_1 M_2 M_3)$ nur die Punkte der Ebene (ABC) selbst conjugirt, und nur wenn P auf α liegt, noch andere. Da nun die Punkte von ε nicht alle in (ABC) liegen und alle Punkte von ε P conjugirt sind, so muss P auf α liegen.

Lässt man ε alle Geraden des Hyperboloids $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ von der Schaar γ durchlaufen, so durchläuft P die Gerade α. Der Strahl ε durchläuft in (ABC) die Gerade δ, die das Hyperboloid neben γ noch mit dieser Ebene gemein hat. Die Elemente $\gamma \varepsilon C \alpha$ bilden einen harmonischen Wurf, w. z. b. w.

Inhalt.

Seite

Angabe des Zieles dieses Aufsatzes 315

§ 1. Allgemeine Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten, unter denen nur ein realer zu sein braucht 316

§ 2. Lineare Construction der Involution für eine durch neun Punkte bestimmte Fläche conjugirter Punkte auf einer beliebigen Geraden 317

Der besondere Fall, dass die vier Geraden, auf denen die vier Paare idealer Punkte liegen, Erzeugende eines Hyperboloides sind 318

§ 3. Die Bedingung dafür, dass neun Punkte auf einer Curve vierter Ordnung erster Species liegen 319

§ 4. Der besondere Fall, in welchem sechs von den gegebenen Punkten eine Curve dritter Ordnung bestimmen, für welche die den siebenten und achten Punkt verbindende Gerade Secante ist 321

§ 5. Construction der Ebene, die durch zwei aggregirt ideale Ebenen von einem Punkte P harmonisch getrennt ist 322

§ 6. Construction der Ebene, die durch eine reale und eine ideale Ebene von einem Punkte P harmonisch getrennt ist 323

§ 7. Construction der Geraden, die durch zwei ideale Gerade von einem Punkte P harmonisch getrennt ist 324

§ 8. Construction der Ebene, die durch zwei ideale Ebenen von einem Punkte P harmonisch getrennt ist 325

§ 9. Satz über die Auffindung einer Erzeugenden in einem gewissen Hyperboloid 326

Eduard von Weber in München, *Résumé einer Integrationstheorie höherer partieller Differentialprobleme.*

Jedes partielle Differentialproblem höherer Ordnung kann durch Einführung neuer unbekannter Functionen in ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit mehreren abhängigen und unabhängigen Variabeln verwandelt werden. Unter den Systemen dieser Art beanspruchen diejenigen besonderes Interesse, welche Herr Lie[1]) als »Involutionssysteme« bezeichnet hat. Die vorliegende Mittheilung bezweckt vor allem, die Begriffsbildungen und Sätze, die aus der Theorie der Involutionssysteme 1. Ordnung mit *einer* abhängigen Veränderlichen bekannt sind, soweit als möglich auf den allgemeinen Fall zu übertragen[2]), wobei wir uns indes auf die Betrachtung solcher Systeme beschränken, die sich in gewisser Weise nach den Ableitungen der unbekannten Functionen auflösen lassen. Unter diesen greifen wir wiederum eine besonders ausgezeichnete Klasse von Differentialproblemen heraus, die wir als »*Normalsysteme*« bezeichnen; in den Sätzen, die wir für diese Systeme aufstellen, finden zwei bekannte wichtige Theorien, die der sogenannten Jacobi'schen Systeme partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung mit *einer* Unbekannten, und die Darboux-Lévy'schen Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen II. Ordnung mit drei Variabeln, ihre naturgemässe und zugleich weitestgehende Verallgemeinerung. Uebrigens werden im Folgenden nur die *Resultate* der Theorie entwickelt; ich behalte mir vor, an anderer Stelle eine ausführliche Darlegung dieser und verwandter Untersuchungen zu geben.

---

1) Vgl. z. B. Leipz. Ber. 1895 pag. 53—128.

2) Die Grundlinien der nachfolgenden Entwickelungen habe ich in einer Note der Compt. Rend. vom 3. Aug. 1896 angedeutet; eine ausführliche Darstellung des Falles zweier Independenten in rein analytischer Behandlungsweise findet sich in meiner Arbeit: »Grundzüge einer Integrationstheorie etc.« Journ. f. Math. Bd. 118.

1. Wir bezeichnen mit $z^1, z^2 \dots z^n$ die abhängigen, mit $x_1, x_2 \dots x_m$ die unabhängigen Veränderlichen, mit p_i^k die partielle Ableitung von z^k nach x_i; ein Werthsystem $x_1, x_2 \dots x_m, z^1 \dots z^n, p_1^1 \dots p_m^n$ werde nach LIE ein *Flächenelement* des Raumes R_{m+n} $(x_1 \dots x_m, z_1 \dots z_n)$ genannt; zwei benachbarte Flächenelemente $x_i z^k p_i^k$ und $x_i + dx_i, z^k + dz^k, p_i^k + dp_i^k$ heissen dann *vereinigt liegend*, wenn die Relationen:

$$dz^k = p_1^k dx_1 + p_2^k dx_2 + \cdots + p_m^k dx_m \quad (k = 1 \dots n)$$

bestehen. Eine ∞^q-Schaar von Flächenelementen von der Beschaffenheit, dass jedes Element der Schaar mit allen ∞^{q-1} benachbarten vereinigt liegt, heisse eine (q-fach ausgedehnte »Mannigfaltigkeit« und werde mit M_q bezeichnet; es ist dann $q \leqq m$. Eine M_q, deren Elemente sämmtlich den N Gleichungen

$$(A) \quad f_1(x_1 \cdots x_m, z^1 \cdots z^n, p_1^1 \cdots p_m^n) = 0, \quad f_2 = 0 \dots \quad f_N = 0,$$

genügen, heisse eine Integral-M_q von (A). Im Folgenden betrachten wir indes ausdrücklich nur M_q von der Eigenschaft, dass die $mn + m + n - q$ Gleichungen, durch die sie definirt werden, die Grössen z^k, p_i^k und $m - q$ der x durch die übrigen q Variabeln x auszudrücken erlauben[1]). Nehmen wir an, dass die Gleichungen (A) hinsichtlich der p_i^k unabhängig seien, so ist $N \leqq mn$; also dürfen wir setzen

$$N = \mu n + \nu, \quad (\mu \leqq m, \ \nu < n)$$

2. Wir führen nun die Voraussetzung ein, dass die Relationen (A), die wir auch kurz als das »System J« bezeichnen, durch Auflösung nach den Ableitungen

$$p_1^1 p_1^2 \cdots p_1^n, \ p_2^1 \cdots p_2^n, \ \cdots p_\mu^1 \cdots p_\mu^n, \ p_{\mu+1}^1 \cdots p_{\mu+1}^\nu \ ^2)$$

die folgende »kanonische Form«[3]) erhalten können:

---

1) Hierin liegt eine ähnliche Beschränkung der Allgemeinheit, wie sie die ältere (JACOBI'sche) Theorie der part. Diffgl. I. O. mit einer Unbekannten der LIE'schen Theorie gegenüber aufweist.

2) Diese Grössen werden künftig generell mit p_α^1, die übrigen mit p_β^1 bezeichnet.

3) Vgl. BOURLET, Ann. de l'Éc. Norm. (3), VIII, 1891, p. 43, woselbst diese Form im Falle *linearer* Systeme betrachtet wird.

$$\left\{\begin{array}{l} -p_1^1+\varphi_1^1(x_i, z^k, p_{\mu+1}^{\nu+1}\cdots p_m^n)=0,\ -p_1^2+\varphi_1^2=0\cdots -p_1^n+\varphi_1^n=0 \\ -p_2^1+\varphi_2^1=0 \qquad\qquad ,\ -p_2^2+\varphi_2^2=0\ \cdots -p_2^n+\varphi_2^n=0 \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -p_\mu^1+\varphi_\mu^1=0\ \cdots \qquad\qquad -p_\mu^2+\varphi_\mu^2=0\cdots -p_\mu^n+\varphi_\mu^n=0 \\ -p_{\mu+1}^1+\varphi_{\mu+1}^1=0\ \cdots \qquad\qquad -p_{\mu+1}^\nu+\varphi_{\mu+1}^\nu=0, \end{array}\right.$$

sowie dass dies System im Sinne des Herrn BOURLET [1]) unbeschränkt integrabel sei, oder nach LIE ein Involutionssystem bilde. Um die Bedingungen hiefür aufzustellen, hat man nach BOURLET so zu verfahren. Setzt man:

$$r_{ij}^k \equiv \frac{\partial^2 z^k}{\partial x_i \partial x_j},$$

so kann man vermöge der mN in den r_{ij}^k linearen Gleichungen, die durch einmalige partielle Ableitung nach $x_1, x_2 \ldots x_m$ aus (A') hervorgehen, alle Grössen r_{ij}^k als ganze lineare Functionen der folgenden unter ihnen ausdrücken:

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} r_{pq}^s (s=1\cdots\nu;\ p, q=\mu+2\cdots m), \\ r_{uv}^w (w=\nu+1\cdots n;\ u, v=\mu+1\cdots m). \end{array}\right.$$

Für jede zweite Ableitung der Form:

$$r_{\alpha\alpha'}^\beta,\ r_{\alpha,\mu+1}^\gamma (\alpha, \alpha'=1\cdots\mu;\ \alpha\neq\alpha';\ \beta=1\cdots n;\ \gamma=1\cdots\nu)$$

ergeben sich solcherweise zwei formal verschiedene Ausdrücke; indem man je zwei derselben identisch, d. h. unabhängig von den Grössen (1) gleichsetzt, erhält man die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Gleichungen (A) ein Involutionssystem bilden. Diese in den Ableitungen $\frac{\partial \varphi_\alpha^b}{\partial x_i}$, $\frac{\partial \varphi_\alpha^b}{\partial z^k}$, $\frac{\partial \varphi_\alpha^b}{\partial p_g^h}$ im Allgemeinen bis zum 3. Grade ansteigenden Relationen mögen die »Definitionsgleichungen des Involutionssystems« heissen.

3. Es gilt das

Theorem I. [2]) *Versteht man unter* $\zeta^1, \zeta^2 \ldots \zeta^\nu$ *arbitrüre Functionen von* $x_{\mu+2} \ldots x_m$, *unter* $\zeta^{\nu+1} \ldots \zeta^n$ *ebensolche Functionen von*

1) l. c. pag. 28.

2) Für *lineare* Involutionssysteme der Form (A') zuerst von Herrn BOURLET aufgestellt, l. c. p. 48.

$x_{\mu+1} \dots x_m$; *sind ferner an der Stelle* $\bar{x}_{\mu+1} \dots \bar{x}_m$ *die* ζ^i *regulär und besitzen daselbst bez. die Werthe* $\bar{z}^1 \dots \bar{z}^n$, *während die Ableitungen* $\frac{\partial \zeta^h}{\partial x_g}$ *ebenda bez. die Werthe* $\bar{p}_g^{\,h}$ *annehmen mögen; sind endlich die Functionen* $\varphi_a^{\,b}$ *in der Umgebung der Stelle* $\bar{x}_i, \bar{z}^k, \bar{p}_g^{\,h}$ *regulär, so gibt es ein und nur ein an der Stelle* $\bar{x}_i \dots \bar{x}_m$ *regulüres System von Integralfunctionen* $z^1 \dots z^n$ *des Involutionssystems* (A) *von der Beschaffenheit, dass* $z^1 \dots z^\nu$ *für* $x_i = \bar{x}_i \dots x_{\mu+1} = \bar{x}_{\mu+1}$, *bez. in* $\zeta^1 \dots \zeta^\nu$, *ferner* $z^{\nu+1} \dots z^n$ *für* $x_i = \bar{x}_i \dots x_\mu = \bar{x}_\mu$ *bez. in* $\zeta^{\nu+1} \dots \zeta^n$ *übergehen.*

4. In begrifflicher und zugleich etwas allgemeinerer Ausdrucksweise kann dieser Sachverhalt so dargestellt werden. Durch eine beliebige Integral-$M_{m-\mu}$ von J ist successive eine ganz bestimmte Serie von Integralmannigfaltigkeiten $M_{m-\mu+1}$, $M_{m-\mu+2} \dots M_m$ von J festgelegt, deren jede die vorhergehende ganz in sich enthält. Die allgemeinste Integral-$M_{m-\mu}$ ergibt sich im Falle $\nu = 0$ ohne jede Integration, im Falle $\nu > 0$ durch Integration eines Hülfssystems von ν Gleichungen I. Ordnung in ν abhängigen und $m - \mu$ unabhängigen Veränderlichen.

5. Die Annahme $\mu = m$ (also $\nu = 0$) führt auf Systeme, deren allgemeines Integral nur von einer endlichen Constantenzahl abhängt und durch Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen ermittelt wird; unter der Annahme $\mu = 0$ können $n - \nu$ der z^k ganz willkürlich angenommen werden. Wir betrachten daher im Folgenden ausschliesslich die Fälle $1 \leqq \mu \leqq m-1$; $0 \leqq \nu \leqq n-1$.

6. Theorem II. *Jede einzelne in* (A) *enthaltene Gruppe von je* $n + \nu$ *Gleichungen*

$$(2) \quad -p_s^1 + \varphi_s^1 = 0, \ \cdots -p_s^n + \varphi_s^n = 0, \ -p_{\mu+1}^1 + \varphi_{\mu+1}^1 = 0 \cdots$$
$$-p_{\mu+1}^\nu + \varphi_{\mu+1}^\nu = 0$$

bildet für sich ein Involutionssystem, wenn man darin $x_1 \dots x_{s-1}$, $x_{s+1} \dots x_\mu$ *als Constante betrachtet.* Wir bezeichnen (2) als das »*Theilsystem* J_s«.

Theorem III. *Führt man in das System* (A') *vermöge der* MAYER*'schen Transformationsformeln*

$$x_1 = \bar{x}_1 + y_1, \quad x_2 = \bar{x}_2 + y_1 y_2 \cdots x_\mu = \bar{x}_\mu + y_1 y_\mu,$$
$$x_{\mu+1} = \bar{x}_{\mu+1} + y_{\mu+1} \cdots x_m = \bar{x}_m + y_m$$

neue Independente $y_1 \dots y_m$ ein[1]*), und wird:*

$$\frac{\partial z^k}{\partial y_i} \equiv q_i^k, \quad \psi_a^b \equiv \varphi_a^b(\bar{x}_1 + y_1, \ \bar{x}_2 + y_1 y_2 \cdots, \ z^1 \cdots z^n, \ q_g^h)$$

gesetzt, so finden sich unter den transformirten Gleichungen die folgenden

$$\left\{ \begin{array}{l} -q_1^b + \psi_1^b + \sum_2^{\mu} y_s \psi_s^b = 0, \quad b = 1 \dots n, \\ -q_{\mu+1}^c + \psi_{\mu+1}^c = 0, \qquad\qquad c = 1 \dots \nu, \end{array} \right. \tag{3}$$

die für beliebige Werthe der als Parameter zu betrachtenden Grössen $y_2 \dots y_\mu$ ein Involutionssystem von $n+\nu$ Gleichungen in den Independenten $y, y_{\mu+1} \dots y_m$ darstellen, und auf deren Integration die Ermittelung des in Nr. 3 definirten Integralsystems zurückkommt.

7. Wir setzen zur Abkürzung:

$$P_{is}^k \equiv \frac{\partial f_i}{\partial p_s^k}; \quad \Pi_i^k \equiv \sum_1^m P_{is}^k \lambda_s,$$

unter den λ_s unbestimmte Grössen verstanden, und bezeichnen das rechteckige Schema:

$$\left\| \begin{array}{l} \Pi_1^1, \ \Pi_1^2 \dots \Pi_1^n \\ \vdots \\ \Pi_N^1, \ \Pi_N^2 \dots \Pi_N^n \end{array} \right\| \tag{B}$$

als die »charakteristische Matrix« des Involutionssystems (A) oder (A'). Dann gilt das

Theorem IV. *Bedeuten die Grössen x_i, z^k, p_i^k irgend welche den Relationen* (A) *genügende Constanten, die $\lambda_1 \dots \lambda_m$ homogene Punktcoordinaten eines R_{m-1}, so drücken die Definitionsgleichungen des Involutionssystems aus, dass die Gleichungen, die man durch Nullsetzen aller n-reihigen Determinanten von* (B) *erhält, zusammen eine $m-\mu-1$-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit M der Ordnung $n-\nu$ darstellen, mit andern Worten, dass zu jedem beliebig gewählten Werthsystem $\lambda_{\mu+1}, \lambda_{\mu+2} \dots \lambda_m$ noch $n-\nu$ Werthsysteme der Variabeln $\lambda_1 \dots \lambda_\mu$ existiren, die alle n-reihigen Determinanten* (B) *annulliren.*

---

[1]) BOURLET, l. c. p. 43.

Die Mannigfaltigkeit M ist ganz unabhängig davon, ob man zur Bildung von (B) die unaufgelöste Form (A) oder die aufgelöste Form (A') benutzt. Ist $\mu = 1$, also $N = n + \nu$, so haben die n-reihigen Determinanten von (B) eine ganzrationale, in den λ homogene Form $n - \nu^{ten}$ Grades

$$K(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m)$$

als gemeinschaftlichen Factor; ebenso ist für $\mu > 1$ jedem Theilsystem J_s eine Form $n - \nu^{ten}$ Grades

$$K_s(\lambda_s, \lambda_{\mu+1}, \lambda_{\mu+2} \dots \lambda_m)$$

zugewiesen.

8. Wir denken uns nun einer beliebigen Integral-M_m von (A) entsprechend die z^k, p_i^k als Functionen der x definirt, und durch eine weitere Relation zwischen den x, die x_m, also auch alle z^k, p_i^k als Functionen von $x_1 \dots x_{m-1}$ auszudrücken erlaubt, eine auf M_m gelegene M_{m-1} bestimmt; dann findet die in Nr. 4 hervorgehobene Thatsache, dass durch eine Integral-M_{m-1} im Allgemeinen eine einzige Integral-M_m von (A) festgelegt ist, ihren analytischen Ausdruck darin, dass sich aus den Relationen, die aus (A) durch partielle Ableitung nach den x entstehen, sowie aus den folgenden

$$\frac{\partial p_l^k}{\partial x_j} - r_{lm}^k \frac{\partial x_m}{\partial x_j} - r_{lj}^k = 0$$

$$(j = 1, 2 \dots m-1;\ l = 1 \dots m;\ k = 1 \dots n)$$

ein und nur ein Werthsystem der Unbekannten r_{ij}^k ermitteln lässt. Es gibt dann und nur dann unendlich viele derartige Werthsysteme, wenn x_m als Function von $x_1 \dots x_{m-1}$ allen partiellen Differentialgleichungen I. Ordnung genügt, die erhalten werden, wenn man in (B) für z^k, p_i^k ihre der M_m entsprechenden Ausdrücke in $x_1 \dots x_m$, ferner für $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m$ bez. die Grössen:

$$\frac{\partial x_m}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial x_m}{\partial x_2}, \quad \dots \frac{\partial x_m}{\partial x_{m-1}}, \quad -1$$

substituirt, hierauf alle n-reihigen Determinanten von (B) null setzt. Die betrachtete M_{m-1} heisst dann eine »$m-1$-fach ausgedehnte Charakteristik«, oder eine C_{m-1}. Ist nun $\mu = 1$, so ergibt sich für x_m eine einzige partielle Differentialgleichung

$$K\left(\frac{\partial x_m}{\partial x_1}, \quad \dots \frac{\partial x_m}{\partial x_{m-1}}, \quad -1\right) = 0,$$

und es folgt, dass durch jede auf einer Integral-M_m von J beliebig gewählte M_{m-2} eine auf M_m gelegene C_{m-1} (präciser ausgedrückt $n-\nu$ Zweige einer solchen) bestimmt ist. Ist $\mu > 1$, so sind nach Theorem IV die für x_m erhaltenen Differentialgleichungen mit μ unabhängigen Relationen aequivalent und die Existenz von C_{m-1} ist nicht unmittelbar evident; ohne weiteres aber erledigt sich die Frage für die »Normalsysteme«, zu deren Definition wir nun übergehen.

9. Wir schreiben:

$$\Omega_{ij}^k \equiv \lambda_1 P_{i1}^k + \cdots + \lambda_\mu P_{i\mu}^k + \lambda_j P_{ij}^k \quad (j > \mu)$$

und bilden die Matrices

$$\begin{matrix} (C_j) \\ j = \mu+1 \ldots m \end{matrix} \left\| \begin{matrix} \Omega_{1j}^1 & \Omega_{1j}^2 & \ldots & \Omega_{1j}^n \\ \vdots & & & \\ \Omega_{Nj}^1 & \Omega_{Nj}^2 & \ldots & \Omega_{Nj}^N \end{matrix} \right\|.$$

Die n-reihigen Determinanten von (C_j) verschwinden nach Theorem IV sämmtlich resp. für $n-\nu$ im Allgemeinen verschiedene Werthsysteme $A_{1j}^\varkappa \ldots A_{\mu j}^\varkappa$ $(\varkappa = 1 \ldots n-\nu)$ der Verhältnisse $-\lambda_1 : \lambda_j \ldots -\lambda_\mu : \lambda_j$. Ist nun (D) die aus N Zeilen und $(m-\mu)n$ Colonnen bestehende Matrix, die durch Nebeneinanderstellung der $m-\mu$ Schemata (C_j) entsteht, so bezeichnen wir (A) als ein »*Normalsystem*«, *wenn alle n-reihigen Determinanten von* (D) *unter der Voraussetzung verschwinden, dass in jedem der Theilschemata* (C_j) *die Verhältnisse* $-\lambda : \lambda_j$ *durch irgend eines der oben genannten* $n-\nu$ *Werthsysteme ersetzt werden*, wobei in allen Matrices (C_j) der Index $\varkappa$ gleich zu nehmen ist. Die Punktmannigkeit M des R_{m-1} zerfällt nunmehr in $n-\nu$ *lineare*, $m-\mu-1$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, die bez. durch die Gleichungen

$$\lambda_1 + \sum_{\mu+1}^{m}{}_j A_{1j}^{(\varkappa)} \lambda_j = 0 \ldots \quad \lambda_\mu + \sum_{\mu+1}^{m}{}_j A_{\mu j}^{(\varkappa)} \lambda_j = 0$$
$$(\varkappa = 1, 2, \ldots n-\nu)$$

definirt werden, und man hat:

$$K_s \equiv \pm \prod_{\varkappa=1}^{n-\nu} \left(\lambda_s + \sum_{\mu+1}^{m}{}_j A_{sj}^{(\varkappa)} \lambda_j \right).$$

10. Wir machen nun zunächst die Annahme $\mu = 1$; dann können wir schreiben

$$K = \pm \Lambda_1 \Lambda_2 \dots \Lambda_{n-\nu}$$
$$\Lambda_\varkappa \equiv \lambda_1 + \Lambda_2^{(\varkappa)} \lambda_2 + \dots \Lambda_m^{(\varkappa)} \lambda_m ;$$

hierin bedeuten $\Lambda_s^{(1)} \dots \Lambda_s^{(n-\nu)}$ die $n - \nu$ Werthe des Verhältnisses $-\lambda_1 : \lambda_s$, welche die charakteristische Form K annulliren, wenn man darin alle λ mit Ausnahme von λ_1 und λ_s durch Null ersetzt. Denkt man sich wiederum durch ein System von Gleichungen, welche $z^1 \dots z^n, p_1^{\,1} \dots p_m^{\,n}$ als Functionen von $x_1 \dots x_m$ definiren, eine Integral-M_m gegeben, so bestimmen die gewöhnlichen Differerentialgleichungen:

$$(4) \qquad dx_2 = \Lambda_2^{(\varkappa)} dx_1 ; \quad \dots dx_m = \Lambda_m^{(\varkappa)} dx_1$$

$n - \nu$ verschiedene Systeme von je ∞^{m-1} auf der M_m gelegenen eindimensionalen Punktmannigfaltigkeiten. Die zu den Punkten einer solchen gehörigen Flächenelemente von M_m bilden eine M_1, welche »*eindimensionale Charakteristik* von J« genannt werden möge; wir bezeichnen eine solche mit $C_1^{(\varkappa)}$, um ihre Zugehörigkeit zu dem Werthsystem $\Lambda_2^{(\varkappa)} \dots \Lambda_m^{(\varkappa)}$ anzudeuten. Sind die $r_{ij}^{\,k}$ die Ableitungen der obigen Functionen $p_i^{\,k}$ von $x_1 \dots x_m$, so genügt jede $C_1^{(\varkappa)}$ den Gleichungen:

$$(5) \quad dz^h = (p_1^h + \Lambda_2^{(\varkappa)} p_2^h + \dots + \Lambda_m^{(\varkappa)} p_m^h)\, dx_1 \quad (h = 1 \dots n)$$

$$(6) \quad dp_i^h = (r_{i1}^h + \Lambda_2^{(\varkappa)} r_{i2}^h + \dots + \Lambda_m^{(\varkappa)} r_{im}^h)\, dx_1 \quad \begin{pmatrix} i = 1 \dots m \\ h = 1 \dots n \end{pmatrix}.$$

Die Elimination der $r_{ij}^{\,h}$ aus (6) und den Relationen, die aus (A) durch partielle Ableitung nach $x_1 \dots x_m$ entstehen, führt auf ein System totaler Differentialgleichungen, die von der betrachteten Integral-M_m ganz unabhängig sind. Wir können diese »Definitionsgleichungen der $C_1^{(\varkappa)}$«, denen wir noch (4) und (5) hinzufügen, so schreiben:

$$(E_\varkappa)\begin{cases} dx_s = A_s^{(\varkappa)}\,dx_1 \quad (s = 2, 3 \dots m) \\ dz^h = (p_1^h + A_2^{(\varkappa)} p_2^h + \cdots A_m^{(\varkappa)} p_m^h)\,dx_1 \quad (h = 1 \dots n) \\ \text{a)}\ \left(M_{i1} + \sum_2^m{}_j A_j^{(\varkappa)} M_{ij}\right) dx_1 + \sum_{s,t} P_{is}^t\,dp_s^t = 0 \quad (i = 1 \dots N) \\ \text{b)}\ \left(\sum_1^N{}_i\, l_{is}^{(\varkappa)} M_{ij}\right) dx_1 + \sum_1^n{}_k \sum_1^N{}_i\, l_{is}^{(\varkappa)} P_{j1}^k\,dp_j^k = 0 \\ \qquad (s = 1 \dots \nu + 1;\ j = 2 . 3 \dots m). \end{cases}$$

Hierin ist

$$M_{ij} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \sum_1^n{}_k \frac{\partial f_i}{\partial z^k}\, p_j^k$$

gesetzt, während $l_{1s}^{(\varkappa)}, l_{2s}^{(\varkappa)} \dots l_{Ns}^{(\varkappa)}$ $\nu + 1$ linear unabhängige Lösungen der $n(m-1)$ Gleichungen:

$$\sum_1^N{}_i\, l_i^{(\varkappa)} (P_{ij}^k - A_j^{(\varkappa)} P_{i1}^k) = 0 \quad \begin{pmatrix} k = 1 \dots n \\ j = 2, 3 \dots m \end{pmatrix}$$

in den Unbekannten $l_i^{(\varkappa)}$ bedeuten. Es ist zu bemerken, dass ν der Relationen b) eine Folge von a) sind; im Uebrigen aber sind die Gleichungen $(E_\varkappa)$ in Bezug auf die Ableitungen $\frac{dp_s^t}{dx_1}$ linear unabhängig, lassen also $(m-1)(n-\nu-1)$ derselben willkürlich.

11. Ist $\mu > 1$, und J ein Normalsystem, so bildet jedes der Theilsysteme J_s für sich ein Normalsystem, wenn $x_1 \dots x_{s-1}$, $x_{s+1} \dots x_\mu$ als Constante gelten. Durch jedes Flächenelement einer Integral-M_m von J geht *eine* und nur eine ganz auf M_m gelegene $C_1^{(\varkappa)}$ von J_s, welche also den Differentialgleichungen:

$$dx_j = A_{sj}^{(\varkappa)}\,dx_1 \quad (j = \mu + 1 \dots m)$$

und den zu (4), (5) analogen Relationen genügt.

Betrachten wir nun ein Flächenelement e einer Integral-M_m von J und die durch e gehende, auf M_m gelegene $C_1^{(\varkappa)}$ von J_1; die auf M_m gelegenen, bez. von den ∞^1 Elementen dieser $C_1^{(\varkappa)}$ auslaufenden Charakteristiken $C_1^{(\varkappa)}$ von J_2 bilden dann eine ganz bestimmte M_2; die von den ∞^2 Elementen dieser M_2 ausgehenden $C_1^{(\varkappa)}$ von J_3 eine M_3 etc.; schliesslich gelangt man so zu einer auf M_m gelegenen M_μ.

Die erhaltene M_μ ist ganz unabhängig von der Reihenfolge, in welcher die Theilsysteme $J_1, J_2 \dots J_\mu$ benutzt werden, und heisst eine »*μ-fach ausgedehnte Charakteristik*« oder eine $C_\mu^{(*)}$ von J.

Theorem V. *Durch jedes Flächenelement e einer allgemeinen Integral-M_m eines Normalsystems J gehen $n-\nu$ im Allgemeinen verschiedene, vollkommen bestimmte μ-fach ausgedehnte Charakteristiken $C_\mu^{(1)} \dots C_\mu^{(n-\nu)}$, die ganz auf der M_m enthalten sind.*

Es ist darnach leicht, die C_μ von J durch $n-\nu$ verschiedene Systeme linearer partieller Differentialgleichungen in den abhängigen Variabeln $x_{\mu+1} \dots x_m, z^h, p_i^k$ und den Independenten $x_1 \dots x_\mu$ unabhängig von der gerade betrachteten Integral-M_m zu definiren.

12. Wird auf einer Integral-M_m von J eine $M_{m-\mu-1}$ beliebig angenommen, so erzeugen die von den Elementen der letzteren auslaufenden $C_\mu^{(*)}$ die allgemeinste auf M_m gelegene C_{m-1} von J; man kann, wie leicht ersichtlich, in analoger Weise auch Charakteristiken $C_{m-1} \dots C_2$ von J definiren.

13. Die Analogie, die solchergestalt zwischen den Theilsystemen $J_1, J_2 \dots J_\mu$ und einem System von μ involutorischen partiellen Differentialgleichungen I. Ordnung mit *einer* Unbekannten von der Form

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \varphi_i\left(x_1, \dots x_m, z, \frac{\partial z}{\partial x_{\mu+1}} \cdots \frac{\partial z}{\partial x_m}\right) \quad (i = 1 \dots \mu)$$

zu Tage tritt, wird noch augenfälliger, wenn wir den Fall $\nu = n-1$, also ein Normalsystem der Form

$$\text{(F)} \qquad \begin{array}{l} p_1^1 = \varphi_1^1, \quad p_2^1 = \varphi_2^1, \quad \dots \quad p_\mu^1 = \varphi_\mu^1, \quad p_{\mu+1}^1 = \varphi_{\mu+1}^1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_1^n = \varphi_1^n, \quad p_2^n = \varphi_2^n, \quad \dots \quad p_\mu^n = \varphi_\mu^n, \quad p_{\mu+1}^{n-1} = \varphi_{\mu+1}^{n-1} \end{array}$$

betrachten. Die $n-\nu$ Systeme $(E_\varkappa)$ reduciren sich jetzt auf ein einziges System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Man erhält sowohl dieses System als auch die Bedingungen, die (F) als Normalsystem charakterisiren, wenn man ausdrückt, dass aus den rechten Seiten der Relationen

$$\frac{dp_{\mu+1}^n}{dx_j} = r_{\mu+1,j}^n + A_{j,\mu+2} r_{\mu+1,\mu+2}^n + \cdots A_{j,m} r_{\mu+1,m}^n,$$

$$\frac{dp_s^i}{dx_j} = r_{sj}^i + A_{j,\mu+2} r_{s,\mu+2}^i + \cdots A_{jm} r_{sm}^i$$

$$(j = 1, 2 \dots \mu;\ s = \mu+2 \dots m;\ i = 1 \dots n)$$

vermöge der Gleichungen, die sich durch partielle Ableitung des Systems (F) nach $x_1 \dots x_m$ ergeben, alle $r_{ij}^{\ k}$ herausfallen. Man erhält so das

Theorem VI. *Damit das Involutionssystem* (F) *ein Normalsystem bilde, ist nothwendig und hinreichend, dass die folgenden Relationen bestehen:*

$$P^{\beta,n}_{\alpha,\mu+1} - P^{n\,n}_{\alpha,\mu+1} P^{\beta\,n}_{\mu+1,\,\mu+1} \equiv 0 \ ^{1})$$

$$P^{\beta\,t}_{\alpha\,s} - P^{n\,n}_{\alpha,\mu+1} P^{\beta\,t}_{\mu+1,\,s} \equiv 0 \quad (\beta \neq t)$$

$$P^{\beta\,\beta}_{\alpha\,s} - P^{n\,n}_{\alpha,\mu+1} P^{\beta\,\beta}_{\mu+1,\,s} \equiv P^{n\,n}_{\alpha\,s}; \ P^{n\,\beta}_{\alpha\,s} \equiv 0$$

$(\alpha = 1 \dots \mu;\ \beta = 1 \dots n-1;\ s = \mu+2 \dots m;\ t = 1 \dots n)$.

Die Grössen $A_{\alpha j}$ haben jetzt bez. die Werthe $-P_{\alpha j}^{\ nn}$; die Definitionsgleichungen der Charakteristiken C_1 des Theilsystems J_1 werden:

$$dx_k = -P^{n\,n}_{sk}\,dx_s; \ dz^i = p^i_s\,dx_s + \sum_{\mu+1}^{m} p^i_j\,dx_j;$$

$$dp^n_k = M^n_{sk}\,dx_s; \ dp^h_g = (M^h_{sg} - P^{n\,n}_{s,\mu+1} M^h_{\mu+1,\,g})\,dx_s \ ^{2})$$

$(k = \mu+1 \dots m;\ h = 1 \dots n-1;\ g = \mu+2 \dots m)$.

Die Differentiale der übrigen Grössen $p_i^{\ k}$ ergeben sich durch Differentiation von (F), wobei $x_1 \dots x_{s-1}, x_{s+1} \dots x_\mu$ als Constante gelten.

Theorem VII. *Durch jedes Flächenelement, das den Relationen* (F) *genügt, ist eine und nur eine Charakteristik eines jeden der* μ *Theilsysteme* J_s, *mithin (nach Theorem V) auch eine und nur eine Charakteristik* C_μ *des Normalsystems* (F) *festgelegt. Die allgemeinste Integral-*M_m *von* (F) *wird erzeugt von den* $\infty^{m-\mu}$ *Charakteristiken* C_μ, *die bez. von den* $\infty^{m-\mu}$ *Elementen einer beliebigen Integral-*$M_{m-\mu}$ *von* (F) *ausgehen.*

Die Integration von (F) kommt sonach zurück auf gewöhnliche Differentialgleichungen und die Herstellung einer Integral-$M_{m-\mu}$, die ihrerseits durch Integration eines Hülfssystems von

---

1) $P^{kj}_{ij} \equiv \dfrac{\partial \varphi_i^{\ k}}{\partial p_j^{\ l}}$.

2) $M_{al}^{\ b} \equiv \dfrac{\partial \varphi_a^{\ b}}{\partial x_l} + \sum_1^n{}_h \dfrac{\partial \varphi_a^{\ b}}{\partial z^h}\, p_l^{\ h}$.

$n-1$ partiellen Differentialgleichungen I. Ordnung in $n-1$ Unbekannten und $m-\mu$ Independenten gefunden wird. Für $n=1$, also $\nu=0$, ergibt sich die bekannte Theorie eines Involutionssystems mit *einer* Unbekannten.

14. Auch im Falle $\nu < n-1$ kann unter Umständen eine Reduction des Normalsystems (A) auf Probleme in einer geringeren Zahl von Independenten erfolgen; dabei können wir uns nach Nr. 6 unbeschadet der Allgemeinheit auf die Annahme $\mu=1$ beschränken; ist nämlich (A) ein Normalsystem, so gilt dasselbe für alle Parameterwerthe $y_2 \dots y_\mu$ auch von dem Systeme (3) der Nr. 6.

Theorem VIII. *Sind* $x_1, x_2 \dots x_s$ *s verschiedene Zahlen der Reihe* $1, 2 \dots n-\nu$ $(s \leqq n-\nu)$, *ferner* $\psi^{(x_1)} \dots \psi^{(x_s)}$ *Functionen von* x_i, z^k, p_i^k *und Lösungen bez. der totalen Differentialgleichungssysteme* $(E_{x_1}) \dots (E_{x_s})$ *von der Beschaffenheit, dass die Relationen*

$$(7) \qquad f_1 = 0 \dots f_{n+\nu} = 0, \quad \psi^{(x_1)} = 0 \dots \psi^{(x_s)} = 0$$

sich nach den Grössen:

$$p_1^1 \dots p_1^n, \quad p_2^1 \dots p_2^{\nu+s}$$

auflösen lassen, so bilden die Gleichungen (7) *ein Involutionssystem, dessen charakteristische Form für* $s < n-\nu$ *durch*

$$\frac{\pm K}{\Delta_{x_1} \Delta_{x_2} \dots \Delta_{x_s}} \quad \text{(vgl. Nr. 10)}$$

gegeben ist.

Besitzt nun jedes der $n-\nu$ Systeme (E_x) je m unabhängige Integrale, und ist $\psi^{(x)}$ eine arbiträre Function derselben, so kann man die $\psi^{(x)}$ auf eine und nur eine Weise so bestimmen, dass die Gleichungen

$$(8) \qquad f_1 = 0 \dots f_{n+\nu} = 0, \quad \psi^{(1)} = 0 \dots \psi^{(n-\nu)} = 0$$

von einer beliebigen Integral-M_{m-1}, also auch von der durch sie bestimmten Integral-M_m des gegebenen Systems (A) befriedigt werden. Da aber die Gleichungen, die aus (8) durch Auflösung nach $p_1^1 \dots p_1^n, p_2^1 \dots p_2^n$ entstehen, mit Hülfe der MAYER'schen Transformation (Nr. 6) auf ein System von n Gleichungen I. Ordnung in $m-1$ Independenten zurückkommen, so haben wir das

Theorem IX. *Durch die angegebene Methode ist die Integration des Normalsystems* (A) $(N=n-\nu)$ *zurückgeführt auf Pro-*

bleme in $m-1$ Independenten, auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen und auf die Herstellung der allgemeinsten Integral-M_{m-1} von (A), *die ihrerseits durch Integration eines Hülfssystems in $m-1$ Independenten gefunden wird.*

15. Die Function $\psi^{(x_i)}$ heisse eine »Normallösung« des Systems (E_{x_i}), wenn die $n+\nu+1$ Gleichungen

$$f_1 = 0 \ldots \quad f_{n+\nu} = 0, \quad \psi^{(x_i)} = 0$$

ein Normalsystem bilden; zu den linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen I. Ordnung, die $\psi^{(x_i)}$ als Lösung von (E_{x_i}) definiren, treten jetzt im Allgemeinen noch weitere derartige Gleichungen. Besitzt jedes der Systeme $(E_{x_1}) \ldots (E_{x_s})$ m unabhängige Normallösungen und sind $\psi^{(x_1)} \ldots \psi^{(x_s)}$ bez. arbiträre Functionen derselben, so ist auch (7) ein Normalsystem. Ist insbesondere $s = n-\nu-1$, so beträgt die Anzahl der Gleichungen (7) $n+n-1$, und die Integration dieses Systems kommt nach Nr. 13 auf gewöhnliche Differentialgleichungen und die Ermittelung der allgemeinsten Integral-M_{m-1} hinaus. So erhalten wir das

Theorem X. *Besitzen $n-\nu-1$ der Systeme (E_x) je m unabhängige Normallösungen, so ist die Integration des vorgelegten Normalsystems* (A) $(N = n+\nu)$ *zurückgeführt auf die Herstellung der allgemeinsten Integral-M_{m-1} und auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen.*

Die in den Nummern 14 und 15 gegebenen Reductionsmethoden bilden Analoga zu der DARBOUX'schen Theorie der partiellen Differentialgleichungen II. Ordnung in drei Veränderlichen, bez. zu der Ergänzung, die Herr M. LÉVY zu dieser Theorie geliefert hat[1]).

München, im März 1897.

---

1) Comptes Rendus 1872.

Sophus Lie, *Die Theorie der Integralinvarianten ist ein Corollar der Theorie der Differentialinvarianten.*

In dieser Note zeige ich zunächst, dass meine allgemeine Theorie der *Differentialinvarianten* ohne Weiteres die vollständige Theorie der *Integralinvarianten* liefert. Sodann gestatte ich mir, das Abhängigkeitsverhältniss klarzustellen, in dem nicht allein die betreffenden Untersuchungen der Herren Zorawsky, Cartan und Hurwitz [1]), sondern auch Arbeiten des Herrn Poincaré und ganz besonders eine Note von Königs zu meinen älteren Arbeiten stehen. Soweit ich es übersehe, ist Herr Cartan der einzige, der die Sachlage ganz correct aufgefasst hat; gleichzeitig spreche ich aber den Herren Zorawsky und Hurwitz meinen Dank dafür aus, dass sie jedenfalls auf die Beziehungen ihrer Untersuchungen zu den meinigen hingewiesen haben. Was die Arbeit des Herrn Königs betrifft, so muss ich annehmen, dass meine aus dem Anfang des Jahres 1877 herrührende Arbeit im norwegischen Archiv, Bd. II: *Die Störungstheorie und die Berührungstransformationen*, seiner Aufmerksamkeit entgangen ist.

I.

Allgemeine Definition des Begriffs Integralinvariante.

Liegt eine *endliche* oder *unendliche* continuirliche Transformationsgruppe in den Veränderlichen:

1) Zorawsky, Akademie zu Krakau, April 1895. — Königs, Comptes rendus, Paris 9. Dec. 1895. — Cartan, Bulletin de la Société math., Paris 1896. — A. Hurwitz, Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, März 1897. — Poincaré, Acta math., t. 13, 1890. — Sophus Lie, Norweg. Archiv, Bd. 2, 1877 und Theorie der Trfgr., Leipzig 1888—1893, Bd. I und III; Ges. d. Wiss. zu Christiania 1883.

$$x_1' \dots x_{n'}' \; x_1'' \dots x_{n''}'' \dots x_1^{(q)} \dots x_{n(q)}^{(q)}$$

$$z_1' \dots z_{m'}' \; z_1'' \dots z_{m''}'' \dots z_1^{(q)} \dots z_{m(q)}^{(q)}$$

vor, so sagen wir, dass ein Integral:

$$\int \Omega \left(x_1' \dots x_{n'}' \dots x_{n(q)}^{(q)} \; z_1' \dots z_{m(q)}^{(q)} \; \frac{\partial z_1'}{\partial x_1'} \dots \frac{\partial^2 z_1'}{\partial x_1'^2} \dots \right) d\omega ,$$

$$\left(d\omega = dx_1' \dots dx_{n'}' \dots dx_{n(q)}^{(q)} \right)$$

eine *Integralinvariante* der betreffenden Gruppe darstellt, wenn die Variation:

$$\delta \int \Omega (\dots) dx_1' \dots dx_{n(q)}^{q}$$

des Integrals bei allen infinitesimalen Transformationen der Gruppe verschwindet, anders ausgesprochen, wenn die Form des Integrals bei allen endlichen Transformationen der Gruppe bewahrt wird.

Es ist hierbei unsere Voraussetzung, dass jedes $z_k^{(i)}$ als eine Function von $x_1^{(i)} x_2^{(i)} \dots x_{n(i)}^{(i)}$ betrachtet wird, ferner dass Ω nicht allein die x und z, sondern zugleich Ableitungen beliebig hoher Ordnung der z nach den x enthält, dass endlich die Grössen $x^{(i)} z^{(i)}$ unter sich transformirt werden.

Dass die *beiden* hier formulirten Definitionen des Begriffes Integralinvariante äquivalent sind, ist ein specieller Fall meines allgemeinen Satzes, dass jede endliche Transformation einer beliebigen endlichen oder unendlichen, continuirlichen Transformationsgruppe durch die Reihenfolge von unendlich vielen infinitesimalen Transformationen der Gruppe ersetzt werden kann.

Ich werde nun zeigen, dass *meine allgemeine Theorie der Differentialinvarianten in jedem einzelnen Falle unmittelbar die Bestimmung aller vorhandenen Integralinvarianten leistet, indem sie dieses Problem auf die Integration eines vollständigen Systems zurückführt.*

Um dem Leser die Richtigkeit dieses beachtenswerthen und allgemeinen Satzes klar zu machen, finde ich es zweckmässig, zuerst ein Beispiel zu betrachten, das ich schon längst ausführlich behandelt habe. Ich werde nämlich zunächst daran erinnern, wie ich seinerzeit die Frage erledigt habe, ob eine

vorgelegte Gruppe von Punkttransformationen des Raumes $x_1 \dots x_n$ einen Differentialausdruck:

$$H(x_1 \dots x_n \; dx_1 \dots dx_n)$$

invariant lässt, der in den Differentialen $dx_1 \dots dx_n$ *homogen von erster Ordnung ist und somit ein Bogenelement in Riemann's Sinne* des Wortes darstellt. Ist irgend ein derartiger Ausdruck H vorgelegt, so ist:

$$\int H\left(x_1 \dots x_n \; 1, \; \frac{dx_2}{dx_1} \dots \frac{dx_n}{dx_1}\right) \cdot dx_1$$

selbstverständlich eine Integralinvariante der betreffenden Gruppe.

II.

Transformationsgruppen, die ein Bogenelement invariant lassen.

Schon im Jahre 1886 [1]) beschäftigte ich mich eingehend mit allen Transformationsgruppen

$$x_k' = f_k(x_1 \dots x_n \; a_1 \dots a_n) \qquad (k = 1 \dots n),$$

bei denen eine in den Differentialen $dx_1 \dots dx_n$ homogene Function erster Ordnung:

$$H(x_1 \dots x_n \; dx_1 \dots dx_n)$$

invariant bleibt. Eine möglichst elementare Darstellung dieser speciellen Theorie, die implicite als ganz einfacher Fall in meiner allgemeinen Theorie der Differentialinvarianten enthalten ist, gab ich dann im Kap. 25 des ersten und Kap. 22, 23 des dritten Bandes meiner Theorie der Transformationsgruppen (1888 und 1893). Ich werde mir erlauben, zunächst diejenigen Entwickelungen zu resumiren, die ich an der letztgenannten Stelle gegeben habe.

Sind $X_1 f \dots X_r f$, wo:

$$X_k f = \sum^i \xi_{ki}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

ist, r unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe, und sind

---

1) Vgl. Leipziger Berichte 1886, S. 341, 342; 1890, S. 292, 293, Grundlagen der Geometrie.

$$X_k'f = \sum_i^n \xi_{ki}(x_1 \dots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,\nu}^n \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu'} x_\nu' \frac{\partial f}{\partial x_i'}$$

$$(k = 1 \dots r)$$

die infinitesimalen Transformationen der einmal erweiterten Gruppe, so erzeugen die $r+1$ infinitesimalen Transformationen $X_1'f \dots X_r'f$ und

$$X_0'f = \sum_1^n x_i' \frac{\partial f}{\partial x_i'}$$

auch ihrerseits eine Gruppe, indem die r Ausdrücke

$$X_0'X_i'f - X_i'X_0'f$$

sämmtlich identisch verschwinden.

Hier können aber zwei Fälle eintreten. Es ist zunächst denkbar, dass $X_0'f$ sich als Summe der $X_i'f$ multiplicirt mit passenden Grössen

(1) $$X_0'f = \varphi_1 X_1'f + \dots + \varphi_r X_r'f$$

darstellen lässt. In diesem Falle sind alle bei der r-gliedrigen Gruppe $X_1f \dots X_rf$ invarianten Differentialausdrücke

$$\Omega(x_1 \dots x_n\, dx_1 \dots dx_n)$$

von *nullter* Ordnung in den Differentialen $dx_1 \dots dx_n$. Dann existirt also kein invarianter Differentialausdruck erster Ordnung in den dx_i, also auch kein invariantes Bogenelement. Die Curven des Raumes $x_1 \dots x_n$ haben dann keine bei der Gruppe invariante Bogenlänge. — Besteht dagegen keine Relation von der Form (1), so erzeugen die Transformationen $X_1'f \dots X_r'f$ und $X_0'f$ eine $(r+1)$-gliedrige Gruppe in den Veränderlichen $x_1 \dots x_n\, x_1' \dots x_n'$ und es ist überdies möglich, Lösungen der Gleichungen

(2) $$\begin{cases} X_1'f = 0 \dots X_r'f = 0 \\ 0 = X_0'f + \varphi\frac{\partial f}{\partial \varphi} \equiv \Sigma x_i'\frac{\partial f}{\partial x_i'} + \varphi\frac{\partial f}{\partial \varphi} \equiv Yf \end{cases}$$

zu finden; denn offenbar erzeugen dann $X_1'f \dots X_r'f$ und Yf eine $(r+1)$-gliedrige Gruppe in $x_1 \dots x_n\, x_1' \dots x_n'$ und φ. Ist $\Phi(x_1 \dots x_n\, x_1' \dots x_n'\, \varphi)$ eine beliebige Lösung des vollständigen Systems (2) und giebt die Gleichung

$$\Phi(x_1 \dots x_n\, x_1' \dots x_n'\, \varphi) = \text{Const.}$$

durch Auflösung

$$\varphi = \varphi(x_1 \dots x_n \; x_1' \dots x_n'),$$

so ist φ eine Differentialinvariante der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$, die in den x_k' homogen von erster Ordnung ist. Dann ist ferner

$$ds = \varphi(x_1 \dots x_n \; dx_1 \dots dx_n)$$

ein bei der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ invariantes Bogenelement.

Dann ist also

$$\int \varphi(x_1 \dots x_n \; x_1' \dots x_n') \frac{dx_1}{x_1'}$$

eine Integralinvariante unserer Gruppe. Offenbar sind hiermit alle Integralinvarianten *erster* Ordnung unserer Gruppe gefunden, die sich auf eine Curve des Raumes $x_1 \dots x_n$ beziehen.

An der citirten Stelle im dritten Bande meiner Theorie der Transformationsgruppen hielt ich die Betrachtungen wesentlich allgemeiner. Einerseits gab ich die Theorie in so allgemeiner Form, dass auch die *unendlichen* Gruppen erledigt wurden, andererseits wurde *angedeutet*, dass ich die Bestimmung *aller* Integralinvarianten durchgeführt hatte.

III.

Ein allgemeiner Satz über Integralinvarianten.

Wir wollen wiederum, wie in § 1 annehmen, dass eine endliche oder unendliche continuirliche Transformationsgruppe in den Veränderlichen:

$$x_1^{(i)} \dots x_{n^{(i)}}^{(i)} \; z_1^{(j)} \dots z_{m^{(j)}}^{(j)} \qquad (i, j = 1, 2 \dots q)$$

vorliegt, und dass wir alle zugehörigen Integralvarianten

$$J = \int \Omega \left(x_1' \dots x_{n^{(q)}}^{(q)} \; z_1' \dots z_{m^{(q)}}^{(q)} \frac{\partial z_1'}{\partial x_1'} \cdots \right) dx_1' \dots dx_{n^{(q)}}^{(q)}$$

suchen; dabei ist es unsere Annahme, dass Ω nicht allein die unabhängigen Veränderlichen x und ihre Functionen z, sondern zugleich die zugehörigen Ableitungen erster, zweiter bis etwa ν^{ter} Ordnung enthält.

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$dx_1' dx_2' \dots dx_{n'}' \dots dx_{n^{(q)}}^{(q)} \equiv d\omega,$$

und dementsprechend:

$$J = \int \Omega d\omega ,$$

so soll für alle infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe die Variation

$$\delta \int \Omega d\omega = \int (\delta\Omega \,.\, d\omega + \Omega d\delta\omega)$$

verschwinden; hierzu ist nach den Regeln der Variationsrechnung nothwendig und hinreichend, dass die Gleichung

$$\delta(\Omega d\omega) = \delta\Omega \,.\, d\omega + \Omega\delta d\omega = 0 ,$$

oder aber die äquivalente:

$$Xf(\Omega d\omega) = X\Omega d\omega + \Omega Xf(d\omega) = 0$$

immer besteht, welche infinitesimale Transformation Xf der Gruppe wir auch als Operator der Variation wählen.

Ist nun

$$Xf = \sum \xi(xz) \frac{\partial f}{\partial x} + \sum \zeta(xz) \frac{\partial f}{\partial z}$$

das allgemeine Symbol einer infinitesimalen Transformation unserer Gruppe, so ist nach einem bekannten Satze der Hydrodynamik, den wir übrigens später gruppentheoretisch ableiten werden:

$$Xf(d\omega) = d\omega \,.\, \Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) ,$$

wobei bei der Berechnung jeder Ableitung $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$ zu beachten ist, dass die z und ihre Ableitungen nach den x als Functionen der x zu betrachten sind.

Sind nun

$$\int \Omega_1 d\omega \quad \text{und} \quad \int \Omega_2 d\omega$$

zwei solche Integralinvarianten, und bestehen dementsprechend für jede infinitesimale Transformation Xf der betreffenden Gruppe die beiden Relationen:

$$\left(X\Omega_1 + \Omega_1 \Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\right) d\omega = 0 ,$$

$$\left(X\Omega_2 + \Omega_2 \Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\right) d\omega = 0 ,$$

oder aber die äquivalenten:

$$X\Omega_1 + \Omega_1 \Sigma\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = 0,$$

$$X\Omega_2 + \Omega_2 \Sigma\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = 0,$$

dann ist

$$X\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right) = 0;$$

d. h. das Verhältniss der beiden Grössen Ω_1 und Ω_2 ist eine *Differentialinvariante der Gruppe, die hinsichtlich ihrer Form gar keiner anderen Beschränkung unterworfen ist, als dass sie nur von den x, den z und den Ableitungen der z nach den x abhängen soll.*

Es gilt also der folgende Satz:

Theorem. *Liegt eine endliche oder unendliche continuirliche Gruppe in den Veränderlichen*

$$x_1^{(i)} \dots x_{n(i)}^{(i)} \; z_1^{(j)} \dots z_{m(j)}^{j} \qquad (i, j = 1, 2 \dots q)$$

vor, und ist

$$\int \Omega . dx_1' \dots dx_{n'}' \dots dx_{n^q}^{(q)}$$

eine bekannte Integralvariante, während

$$U\left(x_1' \dots x_{n'}' \dots x_{n(q)}^{(q)} \; z_1' \dots z_{m(q)}^{(q)} \; \frac{\partial z_1'}{\partial x_1'} \dots \frac{\partial^2 z_1'}{\partial x_1'^2} \dots\right)$$

irgend eine Differentialinvariante der betreffenden Gruppe bezeichnet, die nur von den x, den z und den Ableitungen der z nach den x abhängt, so liefert die allgemeine Formel

$$\int U . \Omega . dx_1' \dots dx_{n(q)}^{q}$$

alle zugehörigen Integralinvarianten der Gruppe.

Zu jeder continuirlichen Gruppe gehören mehrere Reihen von Integralinvarianten, deren jede unbegrenzt viele Individuen umfasst.

Ist $$\int \Omega . dx_1' \dots dx_{n(q)}^{(q)}$$

eine Integralinvariante, so ist Ω selbst im Allgemeinen keine Integralinvariante, denn der Ausdruck $X\Omega$ hat nach den obenstehenden Entwickelungen den Werth

$$- \Omega \Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right),$$

und daher stellt Ω nur, wenn alle Ausdrücke

$$\Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$$

identisch verschwinden, eine Differentialvariante unserer Gruppe dar.

Dagegen ist der Ausdruck

$$\Omega dx_1' \dots dx_{n'}' \dots dx_{n^{(q)}}^{(q)} \equiv \Omega d\omega$$

wiederum eine Differentialinvariante der Gruppe; diese Differentialinvariante ist dadurch particularisirt, dass sie die Grösse $d\omega$ als Factor enthält.

Wir werden später für diese Sachlage einen noch präciseren Ausdruck finden.

IV.

Jede continuirliche Gruppe hat unendlich viele Integralinvarianten.

Indem wir nun weiter gehen, setzen wir:

$$n' + n'' + \dots + n^{(q)} = n$$
$$m' + m'' + \dots + m^{(q)} = m$$

und bezeichneu dementsprechend die unabhängigen Veränderlichen $x_i^{(q)}$ mit:

$$x_1, x_2 \dots x_n$$

und andererseits die Functionen $z_\nu^{(j)}$ mit:

$$z_1 z_2 \dots z_m .$$

Die zugehörigen Ableitungen erster Ordnung bezeichnen wir mit $p_1, p_2 \dots$, die Ableitungen zweiter Ordnung mit $r_1, r_2 \dots$ u. s. w.

Ist nun

$$Uf = \Sigma \xi_k(x_1 \dots x_n\ z_1 \dots z_m) \frac{\partial f}{\partial x_k} + \Sigma \zeta_i(\quad) \frac{\partial f}{\partial z_i}$$

das allgemeine Symbol der infinitesimalen Transformationen einer continuirlichen, endlichen oder unendlichen Gruppe und bezeichnet andererseits

$$\int \Omega(x_1 \dots x_n\ z_1 \dots z_m p_1 \dots r_1 \dots) dx_1 \dots dx_n \equiv \int \Omega d\omega$$

irgend eine zugehörige Integralinvariante, so bestehen, wie wir sahen, die Gleichungen

$$U(\Omega) + \Omega \Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = 0 ,$$

und umgekehrt giebt jede Lösung Ω dieser Gleichungen eine Integralinvariante.

Hierbei ist zu beachten, dass Ω sich zunächst als Function der x, der z, der Ableitungen erster Ordnung p, der Ableitungen zweiter Ordnung r ... u. s. w. darbietet; für unsere Auffassung sind aber die z Functionen der x und daher fassen wir auch Ω als Function der x auf. Wollen wir daher den Ausdruck $U\Omega$ berechnen, so müssen wir zunächst die ν-mal erweiterte infinitesimale Transformation

$$U^{(\nu)} f \equiv \Sigma \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \Sigma \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \Sigma \pi \frac{\partial f}{\partial p} + \Sigma \varrho \frac{\partial f}{\partial r} + \cdots$$

aufstellen, und sodann

$$U(\Omega) = U^{(\nu)} \Omega$$

setzen. Wir müssen andererseits unter $\Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$ die Grösse verstehen, die wir präciser durch

$$\sum_i \left\{ \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial \xi_i}{\partial z_j} p_i^{(j)} \right\}$$

bezeichnen.

Die gesuchte Function Ω der x, z, p, r ... ist somit, wenn Uf das allgemeine Symbol einer infinitesimalen Transformation unserer Gruppe darstellt, dadurch definirt, dass sie jede Gleichung von der Form

$$0 = U^{(\nu)} \Omega + \Omega \sum_i \left\{ \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial \xi_i}{\partial z_j} p_i^{(j)} \right\}$$

erfüllen soll. Wir haben zu untersuchen, ob diese Gleichungen eine gemeinsame Lösung besitzen. *Das ist die Frage, die beantwortet werden soll.*

Diese Frage deckt sich nach längst bekannten Principien mit der Frage, ob die linearen partiellen und *homogenen* Differentialgleichungen

$$U^{(\nu)} f - \Omega \sum_i \left\{ \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial z_j} p_i^j \right\} \frac{\partial f}{\partial \Omega} = 0$$

gemeinsame Lösungen besitzen, und diese letztere Frage wird von meinen Theorien in allgemeiner Weise erledigt.

Da nämlich Uf das allgemeine Symbol der infinitesimalen Transformationen einer Gruppe liefert, und $U^{(\nu)}f$ die zugehörige ν-mal erweiterte Transformation darstellt, so erzeugen auch die infinitesimalen Transformationen

$$U^{(\nu)}f - \Omega \sum_i \left\{ \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial z_j} p_i^j \right\} \frac{\partial f}{\partial \Omega}$$

eine unendliche Gruppe[1]) in den Veränderlichen:

$$x,\ z,\ p,\ r \ldots \Omega .$$

Man hat also nur nach meinen gewöhnlichen Regeln zu entscheiden, ob diese unendliche Gruppe Invarianten besitzt. Jede derartige Invariante, die Ω enthält, liefert eine Integralinvariante

$$\int \Omega dx_1 \ldots dx_n$$

und in dieser Weise findet man alle Integralinvarianten.

Ist insbesondere die vorgesetzte Gruppe endlich, so lässt sich nachweisen, dass ν so gross gewählt werden kann, dass Integralinvarianten ν^{ter} Ordnung vorhanden sind.

Ist dagegen die Gruppe Uf unendlich, so ist eine specielle Untersuchung erforderlich. Nehmen wir z. B. die Gruppe aller Punkttransformationen:

$$\xi(xy) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(xy) \frac{\partial f}{\partial y},$$

und wenden wir diese Transformationen auf das Curvenpaar:

$$y_1 = \varphi_1(x_1) \qquad y_2 = \varphi_2(x_2)$$

an, so haben wir zu untersuchen, ob unsere Gruppe Integralinvarianten von der Form

$$\int \Omega(x_1 x_2 y_1 y_1' y_1'' \ldots y_2, y_2', y_2'' \ldots) dx_1 dx_2$$

besitzt.

Jetzt haben wir zu setzen:

$$Uf = \xi(x_1 y_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta(x_1 y_1) \frac{\partial f}{\partial y_1} + \xi(x_2 y_2) \frac{\partial f}{\partial x_2} + \eta(x_2 y_2) \frac{\partial f}{\partial y_2} .$$

Ist nun $U^{(\nu)}f$ die ν-mal erweiterte infinitesimale Transformation, so erzeugen auch die infinitesimalen Transformationen:

$$U^{(\nu)}f - \Omega \sum_k^{1,2} \left(\frac{\partial \xi(x_k y_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi(x_k y_k)}{\partial y_k} y_k' \right) \frac{\partial f}{\partial \Omega}$$

[1]) Vgl. Leipziger Berichte, 14. April 1895, S. 307—308.

eine unendliche continuirliche Gruppe, die allerdings nicht durch Differentialgleichungen definirt werden kann. Will man entscheiden, ob diese Gruppe für bestimmtes ν Invarianten besitzt, so hat man zu beachten, dass zwischen den verschiedenen Ableitungen erster, zweiter bis ν^{ter} Ordnung von $\xi(x_1 y_1)$ und den entsprechenden Ableitungen von $\xi(x_2 y_2)$ kein Zusammenhang besteht. Die gesuchten Invarianten müssten also gleichzeitig Invarianten einer unendlichen Gruppe sein, die man findet, wenn man

$$Vf = \xi_1(x_1 y_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_1(x_1 y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} + \xi_2(x_2 y_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \eta_2(x_2 y_2)\frac{\partial f}{\partial y_2}$$

setzt, sodann zunächst die ν-mal erweiterte Transformation $V^{(\nu)}f$ und endlich die Gleichung:

$$(3) \qquad V^\nu f - \Omega \sum_k^{1,2}\left(\frac{\partial \xi_k(x_k y_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k(x_k y_k)}{\partial y_k}\, y_k'\right)\frac{\partial f}{\partial \Omega} = 0$$

bildet. Hier stellt die linke Seite die infinitesimale Transformation einer unendlichen Gruppe dar, die durch Differentialgleichungen definirt wird. Die Gleichung (3) zerfällt, da die Grössen $\xi_1 \eta_1 \xi_2 \eta_2$ und die zugehörigen Ableitungen erster bis ν^{ter} Ordnung durch keine (lineare) Relation gebunden sind, in

$$4(1 + 2 + 3 + \cdots + (\nu + 1)) = 2(\nu + 1)(\nu + 2)$$

verschiedene lineare partielle Differentialgleichungen. Die Zahl der unabhängigen Veränderlichen $x_1 y_1 y_1' \ldots y_1^{(\nu)}\, x_2 y_2 \ldots y_2^{(\nu)}$ ist aber gleich

$$2(\nu + 2)$$

und da ν grösser als Null sein muss, so ist die Zahl der unabhängigen Veränderlichen für jedes ν kleiner, als die Zahl der Gleichungen, es lässt sich daher voraussehen, dass die Gruppe

$$V^{(\nu)}f - \Omega \Sigma(\cdot \ \cdots)\frac{\partial f}{\partial \Omega}$$

keine Invarianten besitzt, und dass dementsprechend die unendliche Gruppe Uf keine Integralinvariante besitzt, die sich in der verlangten Weise auf ein Curvenpaar der xy-Ebene bezieht

– – –

Um der Thatsache, dass die Theorie der Diffentialinvarianten die Theorie der Integralinvarianten beherrscht, ja als specielle

Fall umfasst, eine möglichst einfache Form zu geben, dürfte es besser sein, sich in der folgenden Weise auszudrücken:

Soll, wenn wir die früheren Bezeichnungen behalten, das Integral

$$\int \Omega \left(x_1 x_2 \dots z_1 z_2 \dots \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} \dots \right) dx_1 dx_2 \dots,$$

das durch Einführung der Parameter $\tau_1 \dots \tau_n$ auf die Form

$$\int \Omega \cdot \left(\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \tau_1} \dots \frac{\partial x_n}{\partial \tau_n} \right) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n$$

gebracht werden kann, bei allen Transformationen einer gewissen endlichen oder unendlichen, continuirlichen, discontinuirnuirlichen oder gemischten Gruppe in den x und z seine Form bewahren und also eine sogenannte Integralinvariante darstellen, so ist nothwendig und hinreichend, dass das Product

$$\Omega \left(x_1, x_2 \dots z_1, z_2 \dots \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \dots \right) \cdot \left(\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \tau_1} \frac{\partial x_2}{\partial \tau_2} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial \tau_n} \right)$$

irgend eine Differentialinvariante der betreffenden Gruppe darstellt.

Für die praktische Berechnung dürfte allerdings die früher gewählte Form oft die zweckmässigste sein.

Wie man sieht, ist der Zusammenhang zwischen der Theorie der Integralinvarianten und der Theorie der Differentialinvarianten unmittelbar evident für jeden Mathematiker, der sich die ersten Elemente meiner Theorie der Transformationsgruppen angeeignet hat.

Dass ein so ausgezeichneter Mathematiker wie Herr POINCARÉ diese Sachlage vom ersten Augenblick klar erkannt hat, daran habe ich keinen Augenblick gezweifelt. Wenn er es nicht nothwendig gefunden hat, hierauf hinzuweisen, so liegt es wohl darin, dass er sich nur mit eingliedrigen Gruppen beschäftigte. So selbstverständlich aber auch meine Auffassung des Ausdrucks:

$$Xf = \Sigma \xi_k (x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

als Symbol einer infinitesimalen Transformation und als Erzeugende einer eingliedrigen Gruppe *nachträglich* erscheinen mag, so bleibt doch zu berücksichtigen, dass gerade diese meine Auffassung der Ausgangspunkt für Untersuchungen gewesen ist, die schon auf die Entwickelung der reinen wie der angewandten Mathematik einen mächtigen Einfluss geübt haben.

Was besonders die von Herrn POINCARÉ behandelte Theorie der n Körper betrifft, so erlaube ich mir darauf hinzuweisen, dass meine alten Untersuchungen über Functionengruppen in demselben Sinne diese Theorie gefördert haben, wie LAGRANGE's Untersuchungen über algebraische Gleichungen dritten und vierten Grades die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen.

V.

Ueber kanonische Systeme und Differential- bez. Integralinvarianten.

In meinen älteren Untersuchungen (vgl. z. B.: *Die Störungstheorie und die Berührungstransformationen*, Norweg. Archiv Bd. II, Januar 1877) zeigte ich u. a., dass die Reduction eines simultanen Systems

$$\frac{dx_k}{dt} = \alpha_k(x_1 \dots x_{2n}) \qquad (k = 1 \dots 2n)$$

auf die sogenannte kanonische Form dann und nur dann geleistet werden kann, wenn ein gewisser PFAFF'scher Ausdruck

$$X_1(x)\,dx_1 + \cdots + X_{2n}\,dx_{2n} = \Sigma X\,dx$$

vorliegt, der eine Gleichung von der Form

$$\frac{d}{dt}(\Sigma X_k\,dx_k) = d\Omega(x_1 \dots x_{2n})$$

erfüllt, und überdies $2n$ Grössen

$$y_1 \cdots y_n \; q_1 \cdots q_n$$

gegeben sind, die eine Relation von der Form

$$\Sigma q_k\,dy_k + dV = \Sigma X_k\,dx_k$$

erfüllen. Insbesondere ergab sich, dass die charakteristische Function des betreffenden kanonischen Systems *homogen* von *erster* Ordnung in den q wird, wenn die beiden Differentiale $d\Omega$ und dV gleich Null sind.

In diesem letzten Falle ist es *evident*, dass das Integral

$$\int X_1\,dx_1 + \cdots X_{2n}\,dx_{2n}$$

erstreckt längs einer beliebigen Curve des Raumes x seinen Werth behält bei der infinitesimalen Transformation

$$\delta x_k = \alpha_k(x_1 \dots)\,\delta t$$

und gleichzeitig bei allen endlichen Transformationen der zugehörigen eingliedrigen Gruppe.

Diese letzte Bemerkung fand ich es nicht nothwendig explicite zu machen; meine Arbeiten, besonders meine älteren, sind nämlich nicht auf Leser berechnet, denen es nicht unmittelbar klar ist, dass jede Transformation, die ein Differential $d\omega$ invariant lässt, gleichzeitig das entsprechende Integral $\int d\omega$ reproducirt.

In der betreffenden Abhandlung gab ich u. a. auch die allgemeine Bestimmung aller Transformationen in $x_1 \dots x_n\ p_1 \dots p_n$, die *ein vorgelegtes* kanonisches System in ein kanonisches System überführt. Ich fand dabei Transformationen, die im Allgemeinen keine Berührungstransformationen in den x, p darstellen.

Neuerdings (Comptes rend. Paris, Dec. 1895) hat sich nun Herr Königs in der Note: »Application des invariants intégraux à la réduction au type canonique ...« mit gerade einigen unter diesen von mir allgemein erledigten Problemen beschäftigt. Seine Note mag ihren formellen Werth haben. Was die Realität betrifft, hat er nach meiner Ansicht nichts zu meinen Entwickelungen hinzugefügt. Nun weiss ich ja wohl, dass Herr Königs meine oben genannte Arbeit bei der Redaction seiner Note noch nicht kannte. Nach meiner Ansicht hätte er aber jedenfalls auf die Beziehungen hinweisen müssen, die zwischen seiner Note und noch älteren Arbeiten stattfinden, die ebenfalls von mir herrühren und ihm kaum ganz unbekannt sind.

Um zu illustriren, wie viel weiter als Herrn Königs Note meine damaligen Untersuchungen gingen, erlaube ich mir, den folgenden Schlusssatz meiner Arbeit zu reproduciren:

»Sei umgekehrt ein vollständiges System

$$A_1 f = 0 \dots A_q f = 0$$

vorgelegt. Ich setze voraus, dass ich einen Ausdruck

$$X_1 dx_1 + \dots + X_m dx_m$$

kenne, der q Relationen von der Form

$$A_i(\Sigma X dx_k) = d\Omega_i \quad (\text{oder} = 0)$$

erfüllt. Ich stelle die Aufgabe, diesen Umstand möglichst viel zu verwerthen. Ist $q = 1$, $m = 2n$ und enthält dabei die Normalform von $\Sigma X dx$ $2n$ unabhängige Functionen, so verlangt die Integration von $A_1 f = 0$ nur die Operationen

$$2n - 2,\ 2n - 4 \dots 6, 4, 2 \dots«$$

VI.

Geschichtliche Bemerkungen.

Implicite kommt der Begriff Integralinvariante schon bei den alten Mathematikern vor, die ja die Begriffe Bogenlänge, Flächeninhalt, Volum etc. in ziemlich grosser Allgemeinheit eingeführt und selbstverständlich ihre Beziehung zu der Schaar aller Bewegungen vollständig erkannt haben.

Nach und nach tritt der Begriff Integralinvariante in allgemeinerer Form auf, so z. B. haben ja LOBATSCHEFFSKY, BOLYAI, GAUSS und RIEMANN die Begriffe Bogenlänge, Flächeninhalt u. s. w. auch in die nichteuclidische Geometrie eingeführt.

Eine Ausdehnung des Begriffes Integralinvariante auf beliebige Transformationsgruppen war nach der Natur der Sache erst möglich, nachdem ich den allgemeinen Begriff der continuirlichen Gruppe eingeführt hatte.

In allen meinen Untersuchungen über infinitesimale Berührungstransformationen und PFAFF'sche Ausdrücke, die im Jahre 1871 anfangen, und ganz besonders in der oben citirten Note aus dem Jahre 1877 habe ich mich eingehend mit linearen, *homogenen* Differentialausdrücken *erster* Ordnung:

$$\Sigma X_k(x_1' \dots x_n)dx_k$$

beschäftigt, die bei eingliedrigen Gruppen invariant bleiben. Ich habe insbesondere im Jahre 1877 Theorien entwickelt, die KÖNIGS neuerdings reproducirt hat und zwar aus POINCARÉ's im Jahre 1890 veröffentlichten, ganz speciellen Betrachtungen über Integralinvarianten abgeleitet hat.

Im Jahre 1886 habe ich ferner in diesen Berichten allgemeine *Untersuchungen angedeutet, die sich auf Transformationsgruppen beziehen, bei denen Bogenintegrale invariant bleiben.* Eine ausführliche Darstellung dieser Untersuchungen gab ich an verschiedenen Stellen und am ausführlichsten im dritten Bande meiner Theorie der Transformationsgruppen (vgl. insbesondere S. 499 u. f.).

Ich besprach eingehend den Zusammenhang zwischen dieser Theorie und meinen allgemeinen Untersuchungen über die Invarianten mehrerer endlich entfernten Punkte gegenüber allen Transformationen einer continuirlichen Gruppe. Ganz besonders richte ich die Aufmerksamkeit auf den folgenden Satz,

der deutlich zeigt, dass ich damals im Besitze der allgemeinen Theorie der Integralinvarianten war:

»Die vorstehenden Betrachtungen über die Beziehungen »zwischen den Invarianten endlich von einander entfernter »Punkte und denen unendlich benachbarter Punkte lassen sich »noch wesentlich vervollständigen; man kann sie auch ver»allgemeinern, indem man drei und mehr Punkte einführt, die »Differentiale zweiter und höherer Ordnung der x_ν mitnimmt »u. s. w. Wir behalten uns vor, auf diese Fragen bei einer an»dern Gelegenheit ausführlich einzugehen.«

In meinen älteren Vorlesungen habe ich regelmässig den Begriff Integralinvariante gestreift, aber auch nur gestreift.

Im Jahre 1895 (11. April) legte ich der hiesigen Gesellschaft eine Abhandlung vor (deren Inhalt ich übrigens der Gesellschaft schon im Jahre 1894 vorgetragen hatte), die auf S. 307—308 eine Formel aufstellt, die für die wirkliche Berechnung der Integralinvarianten die Grundlage liefert. Genau gleichzeitig (April 1895) veröffentlichte Herr Zorawsky, der in den Jahren 1889 und 1891 bei mir meine Theorien studirte, eine unzweifelhaft werthvolle Arbeit über Integralinvarianten. Leider habe ich nur die Formeln, nicht den Text seiner polnischen Arbeit lesen können.

Später hat Herr Cartan eine sehr interessante Arbeit über diese Theorie veröffentlicht. Herr Cartan, dessen ausgezeichnete Arbeiten über die Zusammensetzung der Gruppen eine besonders hervorragende Stellung unter neueren gruppentheoretischen Untersuchungen einnehmen, sagt, und zwar nach meiner Ansicht mit vollem Rechte: La question, ainsi posée se réduit a un pur problème de calcul, grâce au théories de M. Lie qui permettent de former *toutes* ces quantités (Integralinvarianten). Bei einer anderen Gelegenheit werde ich mir erlauben, zu zeigen, dass Herrn Cartan's schöne Bemerkungen über die Optik des nichteuclidischen Raumes mit meiner Auffassung der Huyghens'schen Wellentheorie als einen Abschnitt aus der Theorie der Berührungstransformationsgruppen, andererseits auch mit meinen Untersuchungen über Flächen, deren Haupttangencurven linearen Liniencomplexen angehören, in Zusammenhang gebracht werden können.

In einer folgenden Note werde ich u. A. die Existenzfrage der Integralinvarianten auch für unendliche continuirliche Gruppen definitiv erledigen.

AUSSERORDENTLICHE SITZUNG VOM 31. MAI 1897.

Nach Erledigung der Geschäfte hielt Vortrag

Herr S. Lie, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von **W. Ahrens**-Rostock »Zur Theorie der adjungirten Gruppe«.

W. Ahrens-Rostock, *Zur Theorie der adjungirten Gruppe.*

Aus Lie's grundlegenden Untersuchungen ist hinlänglich bekannt, dass die Zusammensetzung einer r-gliedrigen Gruppe continuirlicher Transformationen vollständig charakterisirt ist durch r^3 Constanten c_{iks}, welche durch gewisse lineare und bilineare Relationen mit einander verbunden sind[1]). Diese Constanten c_{iks} bestimmen auch die zu der ursprünglichen Gruppe adjungirte Gruppe mit den infinitesimalen Transformationen

$$E_k f \equiv \sum_1^r{}_{is} c_{iks} e_i \frac{\partial f}{\partial e_s},$$

jene Gruppe, welche bekanntlich für Fragen der Zusammensetzung von äusserster Wichtigkeit ist. Diese adjungirte Gruppe ist nun bekanntlich zu der ursprünglichen isomorph und zwar holoëdrisch isomorph, wenn die ursprüngliche Gruppe keine ausgezeichneten Transformationen besitzt, im anderen Falle meroëdrisch isomorph[2]). Im ersteren Falle ist die adjungirte Gruppe also eine mit der ursprünglichen gleichzusammengesetzte lineare homogene Gruppe. Es wurde nun von Lie die Frage aufgeworfen, ob auch in dem zweiten Falle sich eine mit der ursprünglichen Gruppe gleichzusammengesetzte lineare homogene Gruppe angeben liesse. Lie bejahte diese Frage entschieden, bemerkte jedoch, dass die von ihm gegebene Behandlung

1) »Theorie der Transformationsgruppen« (im folgenden kurz »Trfgr.« III, p. 597.

2) »Trfgr.« I, p. 294, Theorem 54.

nicht allgemein sei [1]). Jene Darstellung bei LIE [2]) beschränkt sich nämlich auf Gruppen, deren ausgezeichnete Transformationen in der ersten derivirten Gruppe nicht vorkommen. Dieser Unterschied ist wesentlich in vielen Fällen, wo ausgezeichnete Transformationen eine Sonderstellung einnehmen, und wir wollen daher, ohne jedoch schon jetzt bezüglich der Terminologie einen bestimmten Vorschlag machen zu wollen, der bequemeren Ausdrucksweise wegen unter »wesentlichen« ausgezeichneten Transformationen solche ausgezeichneten Transformationen verstehen, welche in der ersten derivirten Gruppe vorkommen, und unter »ausserwesentlichen« solche, welche dort nicht vorkommen, eine Bezeichnung, welche sich dadurch rechtfertigt, dass die ausgezeichneten Transformationen der letzteren Art gestrichen oder umgekehrt in beliebiger Anzahl zu jeder Gruppe hinzugefügt werden können, ohne dass durch diese Aenderungen das System der charakteristischen Constanten c_{iks} sich um eine von Null verschiedene Grösse ändert, was für die ausgezeichneten Transformationen der ersteren Art nicht zutrifft.

Jene Frage nach einer zu einer gegebenen Gruppe gleichzusammengesetzten linearen homogenen Gruppe ist offenbar erledigt, wenn es gelingt, die umfassendere Aufgabe zu lösen, zu einer gegebenen Zusammensetzung c_{iks} eine Zusammensetzung d_{iks} einer Gruppe so anzugeben, dass die adjungirte Gruppe jener letzteren Gruppe die Zusammensetzung c_{iks} hat. Würden wir dann zu der Zusammensetzung d_{iks} in analoger Weise eine Zusammensetzung e_{iks} u.s.w. bestimmen, so erhielten wir eine Reihe von Zusammensetzungen derart, dass jede Zusammensetzung immer die Zusammensetzung der adjungirten Gruppe der folgenden ist. Es liegt jedoch offenbar näher, diese Reihe von Zusammensetzungen zunächst in der umgekehrten Reihenfolge zu studiren, d. h. zu der adjungirten Gruppe einer Gruppe wieder die adjungirte zu construiren u.s.f. LIE, der auf diese und damit zusammenhängende Fragen hinwies [3]), bezeichnete diese successiven adjungirten Gruppen einer gegebenen Gruppe als erste, zweite etc., entsprechend der Terminologie der derivirten Gruppen, und richtete die Aufmerksamkeit besonders auf diejenigen Gruppen, deren soundsovielte adjungirte Gruppe die

1) »Trfgr.« III, p. 598 Anm.
2) Math. Ann. 25, p. 92.
3) »Trfgr.« III, p. 745.

Identität ist. Ich betrachtete nun zunächst die Gruppen dieser letzteren Art und stellte mir die Aufgabe, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für jene Eigenschaft anzugeben. Dabei zeigte sich denn, dass diese Gruppen identisch sind mit einer von Herrn Killing zuerst studirten Kategorie von Gruppen, den Gruppen vom Range Null. Mit diesen Gruppen, sowie überhaupt mit der Form der successiven adjungirten Gruppen einer beliebigen Gruppe beschäftigt sich § 1, während der § 2 noch einige einfache, sich hier leicht anschliessende Eigenschaften der Gruppen vom Range Null giebt. Auf Grund der Entwickelungen des § 1 glaube ich bestimmt aussprechen zu dürfen, dass die oben aufgeworfene Frage, ob die adjungirte Gruppe jede für Gruppen überhaupt mögliche Zusammensetzung haben kann, bejaht werden muss; immerhin ist es mir bisher nicht gelungen, für ein auf Grund von § 1 leicht angebbares Verfahren zur Erledigung dieser Frage den Nachweis zu führen, dass dasselbe wirklich alle Fälle umfasst, so dass ich jetzt noch darauf verzichten muss, hierauf einzugehen.

§ 1.

Besitzt eine Gruppe keine ausgezeichnete Transformation, so sind ihre successiven adjungirten Gruppen mit ihr holoëdrisch isomorph und unter sich identisch. Besitzt die Gruppe jedoch ausgezeichnete Transformationen, und denken wir uns die Anordnung so getroffen, das $X_{r'+1}$, $X_{r'+2} \ldots X_r$ und auch nur diese ausgezeichnet sind, so ist die erste adjungirte Gruppe r'-gliedrig und mit der ursprünglichen Gruppe meroëdrisch isomorph. Ihre Zusammensetzung geht aus der der ursprünglichen Gruppe hervor, indem wir die ausgezeichneten Transformationen der ursprünglichen Gruppe durch identische, d. h. die betreffenden infinitesimalen durch Null ersetzen[1]) oder, was dasselbe ist: die Zusammensetzung der ersten adjungirten Gruppe wird charakterisirt durch die Constanten c_{iks} der ursprünglichen Gruppe, wenn von diesen die

$$(1) \qquad c_{iks}, \text{ für welche } s > r' \text{ ist, } = 0$$

gesetzt werden. Besitzt die erste adjungirte Gruppe nun keine ausgezeichneten Transformationen, so ist die zweite und alle

1) »Trfgr.« I, p. 303.

folgenden adjungirten Gruppen r'-gliedrig; jedoch braucht die zweite adjungirte nicht dieselbe Form zu haben wie die erste, vielmehr tritt dies dann und nur dann ein, wenn die ausgezeichneten Transformationen der ursprünglichen Gruppe ausserwesentlich waren. Besitzt die ursprüngliche Gruppe dagegen nur eine wesentliche ausgezeichnete Transformation, so sind die erste und zweite adjungirte Gruppe nicht identisch, wenn auch holoëdrisch isomorph, jedoch fallen die zweite und alle folgenden dann zusammen — alles natürlich noch immer unter der Voraussetzung, dass keine Transformation der ersten adjungirten Gruppe ausgezeichnet ist.

Besitzt nun aber die erste adjungirte Gruppe ausgezeichnete Transformationen, so ist die zweite jedenfalls weniger als r'-gliedrig. Die ursprüngliche Gruppe und ihre erste adjungirte seien bezw.

$$X_1, X_2 \dots X_{r'}; X_{r'+1} \dots X_r$$
$$E_1, E_2 \dots E_{r'}$$

und zwar seien sie so angeordnet, dass sie in dieser Form isomorph auf einander bezogen sind. Es werde nun in der adjungirten Gruppe eine solche Anordnung getroffen, dass gerade $E_{r''+1} \dots E_{r'}$ die ausgezeichneten Transformationen derselben sind und in der ursprünglichen Gruppe werde die entsprechende Umformung getroffen, so dass die isomorphe Beziehung beider Gruppen auf einander von Bestand bleibt. Dabei tritt bezüglich der ausgezeichneten Transformationen $X_{r'+1} \dots X_r$ keinerlei Aenderung ein und wir haben also die Anordnung:

$$X_1, X_2 \dots X_{r''}; X_{r''+1} \dots X_{r'}; X_{r'+1} \dots X_r$$
$$E_1, E_2 \dots E_{r''}; E_{r''+1} \dots E_{r'}.$$

Da nun der Uebergang von der Zusammensetzung der ursprünglichen Gruppe zu der der ersten adjungirten durch das Nullsetzen der Constanten (1) bewerkstelligt wird, so müssten also, wenn die Constanten $(1) = 0$ gesetzt würden, $X_{r''+1} \dots X_{r'}$ ausgezeichnete Transformationen werden, mithin muss jeder Klammerausdruck, gebildet mit einer oder zwei der Transformationen $X_{r''+1} \dots X_{r'}$ sich allein durch $X_{r'+1} \dots X_r$ ausdrücken, ohne dass jedoch für eine dieser Transformationen alle mit ihr gebil-

deten Klammerausdrücke $= 0$ sein dürfen. Dies sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass in der ersten adjungirten Gruppe die Transformationen $E_{r''+1} \ldots E_{r'}$ ausgezeichnet sind, und dieses Raisonnement setzt sich offenbar in derselben Weise fort, und wir erhalten als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die successiven adjungirten Gruppen einer Gruppe beständig an Gliederzahl abnehmen und schliesslich mit der Identität endigen, die, dass sich eine solche Anordnung in der ursprünglichen Gruppe treffen lässt, dass eine letzte Classe alle ausgezeichneten Transformationen $X_{r'+1} \ldots X_r$ enthält, eine vorletzte Classe alle die Transformationen $X_{r''+1} \ldots X_{r'}$, welche die Eigenschaft haben, dass jeder Klammerausdruck, gebildet mit wenigstens einer von ihnen, sich allein durch $X_{r'+1} \ldots X_r$ ausdrückt, ferner eine drittletzte Classe alle Transformationen $X_{r'''+1} \ldots X_{r''}$ mit der Eigenschaft, dass jeder Klammerausdruck, gebildet mit wenigstens einer Transformation von ihnen, sich nur durch $X_{r''+1} \ldots X_{r'}$, $X_{r'+1} \ldots X_r$, die Transformationen der späteren Classen, ausdrückt u. s. f. Analytisch drückt sich dies natürlich so aus, dass

$$(2) \qquad (X_i, X_{i+k}) = \sum_{i+k+1}^{r} c_{i,\,i+k,\,s} X_s$$

sein muss. Es gebe

$$(3) \quad X_1 \ldots X_{r(\varrho)} \mid X_{r(\varrho)+1} \ldots X_{r(\varrho-1)} \mid \ldots \mid X_{r''+1} \ldots X_{r'} \mid X_{r'+1} \ldots X_r$$
$$r(\varrho) < r(\varrho-1) < \ldots < r'' < r' < r$$

die Anordnung der Transformationen in Classen in dem oben angegebenen Sinne, wobei eine beliebige Transformation

$$\sum_{1}^{r} a_s X_s$$

natürlich derjenigen Classe zuzurechnen ist, welcher das X_s mit kleinstem Index s und nicht verschwindendem Coefficienten a_s angehört, und wo nach den obigen Angaben über die Anordnung zu jeder beliebigen Transformation $\sum_{1}^{r} a_s X_s$ sich auch wenigstens eine $\sum_{1}^{r} b_t X_t$ so angeben lässt, dass

$$\left(\sum_1^r{}_s a_s X_s , \quad \sum_1^r{}_t b_t X_t\right)$$

derjenigen Classe angehört, welche auf die Classe von

$$\sum_1^r{}_s a_s X_s$$

(im Sinne der obigen Festsetzung) folgt.

Da (X_i, X_k) stets einer späteren Classe als X_i oder X_k angehört, so können zwei Transformationen einer solchen Gruppe von der Zusammensetzung (2) nur dann eine zweigliedrige Untergruppe bilden, wenn sie vertauschbar sind, mithin sind diese Gruppen nach einem von Herrn KILLING[1]) eingeführten Begriffe vom Range Null. Da nun umgekehrt jede Gruppe vom Range Null, wie Herr ENGEL[2]) gezeigt hat, sich auf eine solche Form bringen lässt, dass sie eine Zusammensetzung von der Form (2) besitzt, so können wir sagen:

Theorem: »Alle Gruppen vom Range Null und auch nur diese haben die Eigenschaft, dass ihre successiven adjungirten Gruppen beständig an Gliederzahl abnehmen und mit der Identität endigen.«

Was schliesslich den allgemeinen Fall einer Gruppe, deren Rang > 0 ist, anlangt, so ist hier die Anordnung der Transformationen in Classen nach den obigen Principien, so weit wie möglich, durchzuführen, und ergeben sich alsdann aus dieser Anordnung sofort die Gliederzahlen der successiven adjungirten Gruppen.

§ 2.

Da nach LIE[3]) die integrablen Gruppen sich auf eine solche Form bringen lassen, dass

$$(X_i, X_{i+k}) = \sum_{i+k}^{s}{}_s c_{i,i+k,s} X_s$$

---

1) Math. Ann. **31**, p. 266.

2) s. UMLAUF, »Ueber die Zusammensetzung der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen, insbesondere der Gruppen vom Range Null«. Leipziger Dissert. 1894, p. 40.

3) »Trfgr.« I, p. 597, Theorem 108.

ist, so folgt, dass die im vorigen Paragraph betrachteten Gruppen von der Zusammensetzung (2) a fortiori integrabel sind. In der That kann die erste derivirte Gruppe offenbar keine Transformation der ersten Classe mehr enthalten, allgemein die $k$te derivirte nur noch aus Transformationen der $(k+1)$ten und späterer Classen bestehen. Da nun die erste Classe offenbar aus mindestens zwei Transformationen bestehen muss, so ist die erste derivirte Gruppe höchstens $(r-2)$-gliedrig[1]). Rechnen wir nun einen Augenblick zwei aufeinanderfolgende Classen von je einer Transformation in der Darstellung (3) für äquivalent mit einer Classe von zwei Transformationen und ist bei dieser Art der Zählung k die Anzahl von Classen von mindestens je zwei Transformationen, so besitzt die Gruppe höchstens $k-1$ derivirte Gruppen; eine r-gliedrige Gruppe vom Range Null hat also überhaupt höchstens $\frac{r-2}{2}$ resp. $\frac{r-3}{2}$ derivirte Gruppen, je nachdem r gerade oder ungerade ist.

Ist nun $Y_1, Y_2 \ldots Y_\varrho$ eine Untergruppe einer Gruppe von der Zusammensetzung (2) und gehört keine der Transformationen dieser Untergruppe einer späteren Classe als Y_ϱ an, so muss (Y_i, Y_ϱ) als Transformation einer noch späteren Classe $= 0$, mithin Y_ϱ in der Untergruppe ausgezeichnet sein, und es ergiebt sich offenbar durch Fortsetzung dieses Schlusses, dass auch jede beliebige Untergruppe einer Gruppe von der Zusammensetzung (2) auf diese charakteristische Form (2) gebracht werden kann[2]). Wir können demnach sagen:

Satz 1: »Nehmen die successiven adjungirten Gruppen einer Gruppe beständig an Gliederzahl ab und endigen mit der Identität, so gilt dies auch für die adjungirten Gruppen aller ihrer Untergruppen, insbesondere für die ihrer successiven derivirten Gruppen.«

Die Transformationen der verschiedenen Classen besitzen nun eine bemerkenswerthe Eigenschaft in Bezug auf die derivirten Gruppen. Sind nämlich X_a, X_b beliebige Transformationen der ursprünglichen Gruppe, also (X_a, X_b) eine Transforma-

1) Killing, l. c. p. 289.

2) Bei Zugrundelegung des Killing'schen Begriffes »Rang Null« in Verbindung mit dem oben (p. 363) citirten Satze des Herrn Engel ergiebt sich dies natürlich ohne weiteres.

tion der ersten derivirten Gruppe, und X_i eine Transformation der k-ten Classe in der Anordnung (3), so folgt aus der JACOBIschen Identität

$$(4) \qquad (X_i(X_a, X_b)) = (X_a(X_i, X_b)) - (X_b(X_i, X_a)),$$

da ja (X_i, X_b) und (X_i, X_a) der $(k+1)$-ten oder einer späteren Classe, mithin $(X_a(X_i, X_b))$ und $(X_b(X_i, X_a))$ der $(k+2)$-ten oder einer späteren Classe angehören, dass durch Bildung des Klammerausdrucks aus einer Transformation der k-ten Classe und einer der ersten derivirten Gruppe eine Transformation entsteht, welche keiner früheren als der $(k+2)$-ten Classe angehört. Denkt man sich jetzt in der Gleichung (4) unter X_a, X_b zwei beliebige Transformationen der ersten derivirten Gruppe, unter (X_a, X_b) also eine Transformation der zweiten derivirten Gruppe, während X_i seine Bedeutung beibehält, so folgt offenbar auf Grund des soeben erhaltenen Resultats, dass durch Bildung des Klammerausdrucks aus einer beliebigen Transformation der k-ten Classe und einer Transformation der zweiten derivirten Gruppe sich eine Transformation ergiebt, welche der $(k+3)$-ten oder einer späteren Classe angehört; allgemein folgt so offenbar:

Satz 2: »Ist X eine Transformation der k-ten Classe einer Gruppe vom Range Null und Y eine Transformation der i-ten derivirten Gruppe jener Gruppe, so ist (X, Y) eine Transformation der $(k+i+1)$-ten oder einer späteren Classe in der ursprünglichen Gruppe. Insbesondere sind die Transformationen der vorletzten Classe mit denen der ersten derivirten Gruppe vertauschbar, die der drittletzten Classe mit denen der zweiten derivirten Gruppe u. s. f.«

Bei dieser Gelegenheit gestatte ich mir zugleich, einige Bemerkungen über »gemischte Gruppen« hinzuzufügen. Genügen die Transformationen

$$(1) \qquad x_i' = f_i(x_1 \dots x_n;\ a_1 \dots a_r), \quad i = 1 \dots n,$$

Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r{}_j\, \psi_{kj}(a) \cdot \xi_{ij}(x'), \quad \begin{matrix} i = 1 \dots n \\ k = 1 \dots r \end{matrix}$$

und enthält die Transformationenschaar die identische Transformation, d. h. existirt ein Werthsystem $a_k = a_k^0$ so, dass

$$f_i(x_1 \dots x_n;\ a_1^0 \dots a_r^0) = x_i$$

ist, so bildet die Transformationenschaar (1) eine Gruppe[1]). Unterwirft man die Parameter $a_1 \dots a_r$ gewissen Bedingungen, etwa

$$\varphi_\varrho(a_1 \dots a_r) = 0\,, \quad \varrho = 1 \dots r'\,, \tag{2}$$

und bestimmen sich aus diesen Gleichungen (2) r' der a als eindeutige Functionen der übrigen $r - r'$ und genügen die Werthe $a_k = a_k^0$ den Gleichungen (2), so bilden unter einer gewissen — hier nicht zu erörternden — weiteren Bedingung die zu diesen Werthen der a als Parameter gehörigen Transformationen für sich eine continuirliche Gruppe, eine Untergruppe der ursprünglichen Gruppe. Bestimmen sich aus den Gleichungen (2) die a jedoch nicht als eindeutige, sondern als mehrdeutige Functionen, so zwar, dass zu einem der Zweige die Werthe $a_k = a_k^0$ gehören, so erhält man zu den verschiedenen Zweigen der betreffenden Functionen verschiedene Schaaren von Transformationen, unter denen eine jedenfalls für sich eine continuirliche Gruppe bildet, und welche alle zusammen unter einer gewissen weiteren Bedingung eine Gruppe bilden können, insofern als zwei beliebige Transformationen aus beliebigen Schaaren, nach einander ausgeführt, stets eine Transformation ergeben, welche einer der Schaaren angehört. Unterwirft man z. B., um die Gedanken zu fixiren, die Parameter der allgemeinen linearen homogenen Gruppe

$$x_i' = \sum_1^n{}_k\, a_{ik} x_k\,; \quad i = 1 \dots n,$$

der Bedingung $|\, a_{ik} \,|^s = 1$, so erhält man — entsprechend den s verschiedenen Wurzeln der Einheit — s discrete Schaaren, welche zusammen eine Gruppe bilden und unter denen gerade eine Schaar für sich eine continuirliche Gruppe bildet. Auf die Existenz solcher Gruppen, welche aus discreten Schaaren continuirlicher Transformationen bestehen, wies Lie 1883[2]) unter

1) »Trfgr.« III, p. 563.

2) »Ueber unendliche continuirliche Gruppen«. Berichte d. Ges. d. Wiss. zu Christiania 1883.

Angabe der praktisch wichtigsten Beispiele hin und gab dann später eine grundlegende Theorie derselben[1]). Man nennt dieselben jetzt nach Lie »gemischte« Gruppen[2]), da sie gewissermaassen eine Brücke zwischen continuirlichen und discontinuirlichen Gruppen bilden. Lie zeigte, dass eine Schaar der gemischten Gruppe stets eine continuirliche Gruppe für sich bildet[3]). Die Zusammensetzung dieser ausgezeichneten Schaar, welche die Eigenschaft besitzt, bei allen Transformationen der gemischten Gruppe invariant zu bleiben[4]), und daher die »invariante« Schaar der gemischten Gruppe heisst, ist für die Zusammensetzung der gemischten Gruppe überhaupt von grösster Bedeutung. Jedes Problem, für welches die Zusammensetzung gemischter Gruppen in Betracht kommt, zerlegt sich nämlich in zwei, von denen eins der Theorie der continuirlichen Gruppen (eben in Bezug auf jene »invariante« Schaar), das andere der Theorie der discontinuirlichen Gruppen angehört. In dieser Hinsicht sind die von Lie gegebenen Untersuchungen über Differentialinvarianten gemischter Gruppen vorbildlich[5]), wo dieses Princip klar hervortritt. Es liegt nach diesen Untersuchungen nahe, dass überall dort, wo eine gemischte Gruppe für ein Integrationsproblem ausschlaggebend ist, das Integrationsgeschäft sich in zwei Aufgaben zerlegt, von denen die eine von einer continuirlichen, die andere von einer discontinuirlichen Gruppe beherrscht wird[6]).

Ich stellte mir nun die Aufgabe, die gemischten Gruppen nach der Seite des discontinuirlichen Elements näher zu betrachten und gestatte mir, in Folgendem einige Resultate mitzutheilen, welche ich an anderer Stelle in ausführlicherer Darstellung entwickeln werde. Sind T_a, $T_{a'}$ einerseits und T_b, $T_{b'}$ andererseits Transformationen derselben Schaar, so ergiebt sich, dass dann auch $T_a \,.\, T_b$ und $T_{a'} \,.\, T_{b'}$ derselben Schaar angehören. Hiernach erscheinen die Transformationen derselben

---

1) »Trfgr.« I, Kap. 18.

2) »Influence de Galois sur le développement des mathématiques«, Livre du centenaire de l'école normale supérieure 1895, p. 486.

3) »Trfgr.« I, p. 315, Theorem 56.

4) »Trfgr.« I, p. 320, Theor. 58.

5) »Trfgr.« I § 87.

6) Diesen Gedanken entwickelte mein hochverehrter Lehrer, Herr Prof. Dr. Lie, in seinem Seminar im Januar 1897.

Schaar in gewissem Sinne als äquivalent und daher jede Transformation als Repräsentant der ganzen Schaar, der sie angehört. Damit werden die gemischten Gruppen offenbar für die in der Theorie der discontinuirlichen Gruppen üblichen Methoden zugänglich, und es ergiebt sich alsdann, dass, wenn m die Anzahl der discreten Schaaren ist, eine m-malige Anwendung derselben Transformation oder, was in dieser Hinsicht nach dem eben angegebenen Princip auf dasselbe hinauskommt, m Transformationen derselben Schaar, nach einander ausgeführt, eine Transformation der invarianten Schaar liefern. Ist nun m eine Primzahl, so lässt sich hiernach die ganze gemischte Gruppe aus den Transformationen einer Schaar durch Iterationen herleiten; ist m dagegen eine zusammengesetzte Zahl, so gilt dies im Allgemeinen nicht mehr, jedoch auch noch dann, wenn 1) für die gemischte Gruppe das commutative Gesetz gilt, dass bei beliebigen Transformationen T_a, T_b die Transformationen $T_a . T_b$ und $T_b . T_a$ derselben Schaar angehören und 2) m nur einfache Primfactoren enthält. Ist die Bedingung 1) erfüllt, 2) dagegen nicht, so lässt sich die gemischte Gruppe nur aus mehreren Schaaren, einem »Fundamentalsystem« von Schaaren, herleiten.

Rostock, 11. April 1897.

INHALT.

Seite

Friedrich Engel, Ueber lineare homogene Transformationen . 249

W. Ostwald, Studien über die Bildung und Umwandlung fester Körper. Mit 6 Textfiguren 254

Johannes Wislicenus, Die tautomeren Formen des Dibenzoylmethans 301

Derselbe, Die geometrisch-isomeren Pseudobutylene 307

J. Thomae, Lineare Construction der Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten 315

Eduard von Weber, Résumé einer Integrationstheorie höherer partieller Differentialprobleme 329

Sophus Lie, Die Theorie der Integralinvarianten ist ein Corollar der Theorie der Differentialinvarianten 342

W. Ahrens, Zur Theorie der adjungirten Gruppe. 358

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Math Class
FEB 11 1898

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1897.

IV.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1897.

Einzelpreis: 1 Mark.

FEB 11 1898

SITZUNG VOM 5. JULI 1897.

Vorträge hielten:

1. **Paul Flechsig**, o. M.: Neue Mittheilung über die Entwicklung der Sinnes- und Associationscentren des menschlichen Gehirnes. (Siehe Abhandlungen.)
2. **Sophus Lie**, o. M.: Ueber Integralinvarianten und ihre Verwerthung für die Theorie der Differentialgleichungen.
3. Derselbe: Vorlegung einer Arbeit von **Paul Stäckel**-Kiel unter dem Titel: Anwendungen von Lie's Theorie der Transformationsgruppen auf die Differentialgleichungen der Dynamik.
4. Adolf Mayer, o. M.: Vorlegung einer Arbeit von **E. Study**-Greifswald unter dem Titel: Ueber die Invarianten der projectiven Gruppe einer quadratischen Mannigfaltigkeit von nicht-verschwindender Discriminante.

Sophus Lie, *Ueber Integralinvarianten und ihre Verwerthung für die Theorie der Differentialgleichungen.*

In einer Abhandlung über Integralinvarianten und Differentialinvarianten der continuirlichen Gruppen zeigte ich neuerdings (vgl. diese Berichte 1897, S. 342), dass alle Integralinvarianten

$$\int \varphi \, dw$$

einer gegebenen continuirlichen Gruppe durch Integration eines vollständigen Systems gefunden werden können. Nun aber trat die gesuchte Grösse φ selbst als unabhängige Veränderliche in dem betreffenden vollständigen Systeme auf, und es gab andererseits eine Lösung Φ dieses vollständigen Systems nur dann eine Integralinvariante, wenn Φ wirklich die Grösse φ enthielt. Da ferner das betreffende vollständige System im Allgemeinen Lösungen Φ besitzt, die φ nicht enthalten, und es sogar oft vorkommen kann, dass sämmtliche Lösungen Φ von φ unabhängig sind, so war in jedem einzelnen Falle eine Discussion der Matrix des betreffenden vollständigen Systems erforderlich, ehe eine definitive Antwort auf die gestellte Frage nach der Existenz von Integralinvarianten m^{ter} Ordnung gegeben werden konnte.

Nun ist es allerdings nach der Natur der Sache nicht möglich *einen allgemeinen* Satz zu formuliren, der die Frage nach den Integralinvarianten einer *beliebigen* continuirlichen Gruppe definitiv und gleichzeitig in erschöpfender Weise erledigt; denn factisch können mehrere wesentlich verschiedene Möglichkeiten eintreten. Immerhin ist man dazu im Stande, allgemeine Sätze über die Existenz der Integralinvarianten aufzustellen. Solche Sätze beweisen wir im ersten Kapitel dieser Abhandlung, und gleichzeitig gehen wir auf den Zusammenhang zwischen den beiden Begriffen Differential- und Integralinvariante genauer ein.

Im zweiten Kapitel denken wir uns, dass eine lineare partielle Differentialgleichung in *drei* unabhängigen Veränderlichen:

$$0 = \xi(xyz)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(xyz)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(xyz)\frac{\partial f}{\partial z} \equiv Xf$$

zu Integration vorgelegt ist, und dass wir zufälligerweise von vornherein ein Flächenintegral erster Ordnung:

$$\int \varphi(xyzpq)\,dx\,dy$$

oder ein Curvenintegral erster Ordnung:

$$\int \psi(xyzy'z')\,dx \quad \left(y' = \frac{dy}{dz},\ \ z' = \frac{dz}{dx}\right)$$

kennen, das bei der Transformation Xf invariant bleibt. Wir zeigen, dass sich aus dem Vorhandensein einer solchen Integralinvariante immer Integrationsvereinfachungen der Gleichung $Xf = 0$ ergeben. Wir erkennen aber gleichzeitig, dass verschiedene Möglichkeiten denkbar sind. Während es unter gewissen Umständen gelingt, die Integration von $Xf = 0$ auf ausführbare Operationen zurückzuführen, kann man in anderen Fällen beweisen, dass sich aus dem Vorhandensein einer gewissen Integralinvariante kein weiterer Vortheil als die Auffindung eines *Jacobischen Multiplicators* ziehen lässt.

Die Sätze des zweiten Kapitels erledigen daher, so beachtenswerth und elegant sie auch erscheinen mögen, nicht einmal vollständig die an sich so specielle Frage nach den Integrationsvereinfachungen einer Gleichung:

$$0 = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z} \equiv Xf,$$

die sich aus dem Vorhandensein eines bekannten, invarianten

Flächen- oder Curvenintegrals erster Ordnung ergeben. Man übersieht andererseits keineswegs unmittelbar, ob sich die Theorien des zweiten Kapitels auf n-dimensionale Räume und auf Integralinvarianten zweiter und höherer Ordnung ausdehnen lassen.

Daher schlagen wir im dritten Kapitel einen anderen Weg ein, und zwar bringen wir die *allgemeinen Methoden meiner Invariantentheorie* zur Anwendung. In dieser Weise gelingt es uns in jedem einzelnen Falle, *das vorliegende Integrationsproblem auf ein wohlbegrenztes Problem zurückzuführen, das von meinen Theorien vollständig beherrscht wird, nämlich auf die Integration der Definitionsgleichungen der endlichen Transformationen einer continuirlichen Gruppe.*

Endlich im Kapitel 4 dehnen wir den Begriff Integralinvariante auf *Berührungs*transformationsgruppen aus und finden dadurch Gelegenheit zur Entwickelung einiger allgemeinen Theorien, die ein selbstständiges Interesse darbieten.

Schon in meiner vorigen Abhandlung sah ich mich dazu veranlasst, stark zu betonen, dass die Theorie der Integralinvarianten als ein Abschnitt meiner allgemeinen Theorie der Differentialinvarianten betrachtet werden muss. Jedes Kapitel dieser neuen Abhandlung bestätigt die Richtigkeit dieser Auffassung. In der That sind die Theorien dieser Abhandlung im Grunde nur Ausflüsse meiner allgemeinen Transformationstheorie. Wenn ich nichtsdestoweniger auf die Ergebnisse dieser Arbeit Gewicht lege, so rührt das in erster Linie davon her, dass meine jetzigen Entwickelungen lehrreiche Illustrationen meiner allgemeinen Theorien liefern.

Ich behalte mir vor, bei einer späteren Gelegenheit verschiedene Probleme zu discutiren, die durch die Entwickelungen dieser Abhandlung, wenn auch implicite, gestellt werden. Gleichzeitig werde ich den allgemeinen Begriff Integralinvariante sogar nach mehreren Richtungen verallgemeinern.

Kapitel I.

Allgemeine Sätze über die Existenz von Integralinvarianten.

Liegt eine continuirliche Gruppe vor, so gehören zu dieser Gruppe immer mehrere Reihen von Differentialinvarianten, deren Form nicht allein von der Gruppe, sondern auch von den

Gegenständen abhängt, auf welche die Transformationen der Gruppe ausgeführt werden.

Besteht die betreffende Gruppe z. B. aus Punkttransformationen des Raumes x, y, z, so können diese Transformationen auf *Curven*, auf *Flächen*, auf *Differentialgleichungen*, auf Flächenschaaren, überhaupt auf viele verschiedene Gegenstände ausgeführt werden. Ist die vorliegende Gruppe insbesondere *endlich* und continuirlich, so giebt es in allen Fällen, d. h. gleichgültig ob man Curven, Flächen, Differentialgleichungen u. s. w. in Betracht zieht, immer eine unendliche Reihe zugehöriger Differentialinvarianten. Ganz anders, wenn die Gruppe *unendlich* ist. Da kann man nicht von vorneherein behaupten, dass zu dieser Gruppe unendlich viele Differentialinvarianten gehören, die sich z. B. auf Flächen (oder auf Curven) beziehen, während man allerdings weiss, dass man immer die Transformationen der Gruppe auf Gegenstände anwenden kann, denen unendlich viele Differentialinvarianten entsprechen.

Betrachtet man z. B. die Gruppe aller Punkttransformationen: $x_1 = X(xyz)$, $y_1 = Y$, $z_1 = Z$, bei denen alle Volumina ungeändert bleiben, d. h. alle Transformationen, deren Functionaldeterminante

$$\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial x} \frac{\partial y_1}{\partial y} \frac{\partial z_1}{\partial z} = 1$$

ist, so erkennt man leicht, dass zu dieser Gruppe keine Differentialinvariante von Flächen:

$$J(x, y, z, p, q, r, s, t \ldots),$$

ja nicht einmal eine invariante partielle Differentialgleichung:

$$\Omega(x\ y\ z\ p\ q\ r\ s\ t \ldots) = 0$$

gehören kann, die z als Function von x, y bestimmt. Wäre nämlich $z = \psi(xy)$ eine Integralfläche einer solchen invarianten Differentialgleichung: $\Omega = 0$, und $z = \chi(xy)$ irgend eine Fläche, die $\Omega = 0$ nicht erfüllt, dann würde die Transformation:

$$x_1 = x,\ y_1 = y,\ z_1 = z + \chi(x, y) - \psi(x, y),$$

die offenbar der Gruppe angehört, die Integralfläche: $z = \psi(xy)$ der invarianten Differentialgleichung: $\Omega = 0$ in eine Fläche: $z = \chi(x, y)$ überführen, die $\Omega = 0$ nicht befriedigt, und das steht mit der vorausgesetzten Invarianz von $\Omega = 0$ im Wider-

spruche. Es giebt also keine invariante partielle Differentialgleichung: $\Omega(x\,y\,z\,p\,q\ldots) = 0$.

Bei der Gruppe aller Transformationen: $x_1 = X$, $y_1 = Y$, $z_1 = Z$, *deren Determinante gleich 1 ist, haben daher Flächen keine Differentialinvariante* $J(x, y, z, p, q, r, s, t\ldots)$. Ein ganz analoges Räsonnement zeigt, dass auch nicht die Curven des Raumes Eigenschaften haben, die bei den Transformationen dieser Gruppe invariant bleiben, dass also keine Differentialinvarianten von der Form

$$U(x, y, z, y', z', y'', z''\ldots), \qquad y' = \frac{dy}{dx}\cdots,$$

vorhanden sind.

Betrachten wir andererseits die Gruppe:

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = Z(z, x, y),$$

deren infinitesimale Transformationen die allgemeine Form:

$$\zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

besitzen. Sucht man jetzt alle zugehörigen Differentialinvarianten von Flächen, so erkennt man wiederum, indem man genau wie im vorigen Falle räsonnirt, dass Differentialinvarianten erster oder höherer Ordnung $J(x, y, z, p, q, r\ldots)$ nicht vorhanden sind. Dagegen sind x und y, sowie jede Function von x und y Differentialinvarianten *nullter* Ordnung unserer Gruppe.

Es verdient wohl beachtet zu werden, dass *es wirklich unendliche Gruppen in* x, y, z *giebt, bei denen zwei und nur zwei Differentialinvarianten von Flächen vorhanden sind.* Dies ist deswegen beachtenswerth, weil, sobald *drei* unabhängige Differentialinvarianten u, v, w von Flächen vorhanden sind, immer unendlich viele Differentialinvarianten:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\begin{vmatrix} v & w \\ x & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v & u \\ x & y \end{vmatrix}}, \qquad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\begin{vmatrix} u & w \\ x & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v \\ x & y \end{vmatrix}} \qquad \text{u. s. w.}$$

construirt werden können.

Denken wir uns andererseits die Transformationen der Gruppe:

$$\zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

auf *Curven* angewandt, so sind x und y wiederum Differentialinvarianten von nullter Ordnung. Jetzt aber genügt das Vorhandensein dieser beiden Invarianten, um beliebig viele weitere Invarianten:

$$y' = \frac{dy}{dx},\ y'',\ y''' \ldots$$

zu construiren.

Liegt daher eine (unendliche) continuirliche Gruppe von Punkttransformationen des Raumes x, y, z vor, und werden ihre Transformationen auf Flächen angewandt, so können die folgenden verschiedenen Fälle eintreten. Es ist denkbar, dass gar keine Invariante von Flächen: $J(x, y, z, p, q, r, s, t \ldots)$ vorhanden ist; oder es giebt eine einzige derartige Invariante; oder es giebt zwei derartige Invarianten u, v und keine von u, v unabhängige Invariante; oder endlich, es giebt unendlich viele unabhängige Flächeninvarianten, die dann immer aus einem *vollen Systeme*:

$$I_1, I_2, J_1, \ldots \quad J_m$$

durch Differentiation abgeleitet werden können. In diesem letzten Falle ist:

$$\Omega\left(I_1, I_2, J_1, \ldots J_m, \frac{\partial J_1}{\partial I_1} \cdots\right)$$

die allgemeine Form der zugehörigen Flächeninvarianten.

Dieses Beispiel genügt, um zu zeigen, dass *bei der Aufsuchung aller Differentialinvarianten einer q-fachen Mannigfaltigkeit gegenüber allen Punkttransformationen eines n-fachen Raumes viele wesentlich verschiedene Fälle eintreten können.*

Unter diesen Umständen darf es nicht überraschen, dass sich auch nicht für das Auftreten von Integralinvarianten bei (unendlichen) continuirlichen Gruppen ein einfaches und allgemeines Gesetz angeben lässt, das alle Möglichkeiten erschöpft. Wir werden aber eine Reihe von Sätzen aufstellen, die eine wirkliche Einsicht in die Sachlage gewähren. Um die Sprache zu erleichtern, werden wir zunächst im dreifachen Raume x, y, z bleiben.

Betrachten wir zuerst die Gruppe aller Translationen und denken wir uns, dass diese Transformationen auf Flächen an-

gewandt werden, so erkennen wir unmittelbar, dass p, q, r, s, t und überhaupt alle Differentialquotienten von z nach x und y invariant bleiben. Setzen wir:

$$p = I_1, \quad q = I_2, \quad r = J_1, \quad s = J_2, \quad t = J_3,$$

so können wir jede derartige Differentialinvariante einer Fläche auf die Form:

$$U(I_1, I_2, J_1, J_2, J_3, \frac{\partial J_1}{\partial I_1} \cdots)$$

bringen. Liegt irgend eine nicht developpable Fläche vor, so können wir $I_1 = p$ und $I_2 = q$ als *Gaussische* Coordinaten der Flächenpunkte wählen. Alsdann wird jede (geschlossene) Curve dieser Fläche durch eine Relation zwischen I_1 und I_2 (d. h. zwischen p und q) definirt. Es kann daher jedes Flächenintegral, gleichgültig ob es bei der Gruppe invariant bleibt oder nicht, auf die Form

$$\int W \, dI_1 \, dI_2$$

gebracht werden, und dabei wird der zugehörige Integrationsbereich durch eine gewisse Gleichung zwischen I_1 und I_2 definirt.

Es ist aber unmittelbar evident, dass ein Flächenintegral: $\int W dI_1 dI_2$ dann und nur dann bei allen Transformationen unserer Gruppe invariant bleibt, wenn W selbst eine Differentialinvariante der Gruppe ist, und es ist daher im vorliegenden Falle:

$$\int U(I_1, I_2, J_1, J_2, J_3, \frac{\partial J_1}{\partial I_1}, \frac{\partial J_1}{\partial I_2} \cdots) \, dI_1 \cdot dI_2$$

die allgemeine Form eines invarianten Flächenintegrals.

Man übersieht ohne Weiteres, dass sich diese Betrachtungen und Ergebnisse auf n-dimensionale Räume und q-dimensionale Mannigfaltigkeiten ausdehnen. Wir können daher unmittelbar das folgende allgemeine Theorem aufstellen:

Theorem I. *Liegt eine (endliche oder) unendliche continuirliche Gruppe von Punkttransformationen des Raumes* $x_1 \ldots x_q z_1 \ldots z_m$ *vor, die auf* q*-dimensionale Mannigfaltigkeiten*

$$z_1 = \varphi_1(x_1 \ldots x_q) \ldots, \quad z_m = \varphi_m(x_1 \ldots x_q)$$

dieses Raumes angewandt werden, so ist es in zwei

Fällen immer möglich, die allgemeine Form aller zugehörigen Integralinvarianten anzugeben.

Besitzt die Gruppe mehr als q unabhängige Differentialinvarianten:

$$U(x_1 \dots x_q\, z_1 \dots z_m \tfrac{\partial z_1}{\partial x_1} \cdots),$$

so können, wenn

$$I_1 \dots I_q J_1 \dots J_s$$

passend gewählte Invarianten bezeichnen, alle weiteren Differentialinvarianten auf die Form

$$\Omega(I_1 \dots I_q J_1 \dots J_s \tfrac{\partial J_1}{\partial I_1} \cdots)$$

gebracht werden; dann ist:

$$\int W(I_1 \dots I_q J_1 \dots J_s \tfrac{\partial J_1}{\partial I_1} \cdots)\, dI_1 \dots dI_q$$

die allgemeine Form der Integralinvarianten einer q-dimensionalen Mannigfaltigkeit.

Besitzt andererseits die vorgelegte Gruppe q und nur q von einander unabhängige Differentialinvarianten:

$$I_\varkappa(x_1 \dots x_q\, z_1 \dots z_m \tfrac{\partial z_1}{\partial x_1} \cdots), \qquad (\varkappa = 1 \dots q),$$

so ist

$$\int \Phi(I_1 \dots I_q)\, dI_1 \dots dI_q$$

die allgemeine Form einer Integralinvariante der q-fachen Mannigfaltigkeiten.

Wenden wir dieses allgemeine Theorem z. B. auf die Gruppe

$$\zeta(xyz) \frac{\partial f}{\partial z}$$

an, die keine anderen Flächeninvarianten $\Phi(xyzpqr..)$ als x und y zulässt, so dürfen wir schliessen, dass die allgemeine Formel:

$$\int \psi(xy)\, dx\, dy$$

alle zugehörigen Integralinvarianten von Flächen liefert.

Betrachten wir dagegen die Gruppe aller Transformationen:

(A) $\qquad z_1 = z, \quad x_1 = \varphi(xyz), \quad y_1 = \psi(xyz)$

mit den infinitesimalen Transformationen:

$$\xi(xyz)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(xyz)\frac{\partial f}{\partial y},$$

so finden wir keine andere Flächeninvariante $\Omega(xyzpq\ldots)$ als z. Daher giebt das obenstehende Theorem keinen Aufschluss über die Existenz von invarianten Flächenintegralen. Eins können wir immerhin von vorneherein sagen. Sind nämlich

$$\int \varphi_1(x, y, z, p, q \ldots)\, dx\, dy$$

und

$$\int \varphi_2(x, y, z, p, q \ldots)\, dx\, dy$$

zwei invariante Flächenintegrale, so ist $\varphi_1 : \varphi_2$ eine Differentialinvariante und somit eine Function von z:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = W(z).$$

Jetzt können wir aber in der folgenden Weise die vorliegende Frage entscheiden. Ist

$$\int \varphi(x, y, z, p, q \ldots)\, dx\, dy$$

ein invariantes Flächenintegral, so besteht, welche Functionen von x, y, z auch ξ und η sein mögen (diese Berichte S. 348), immer die Relation:

$$X'\varphi + (\xi_x + \eta_y + \xi_z p + \eta_z q)\varphi = 0,$$

und es bleibt in Folge dessen die *Gleichung*: $\varphi = 0$ invariant bei jeder Transformation von der Form (A). Wäre nun φ eine Function von x, y, z allein, so wäre $\varphi = 0$ eine invariante Fläche und zwar eine Ebene $z = \text{Const.}$; dann besässe aber unser Flächenintegral die Form:

$$\int \omega(z)\, dx\, dy$$

und wäre dementsprechend keine Integralinvariante. Enthielte andererseits die Grösse φ wirkliche Differentialquotien von z, dann wäre $\varphi = 0$ eine invariante partielle Differentialgleichung; unsere Gruppe hat aber keine invarianten Differentialgleichungen.

Bei der unendlichen Gruppe:

$$\xi(xyz)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(xyz)\frac{\partial f}{\partial y}$$

existirt daher gar keine Integralinvariante von Flächen und nur eine einzige Differentialinvariante von Flächen, nämlich: z.

Schon früher betrachteten wir die Gruppe aller Punkttransformationen des Raumes x, y, z, deren Determinante gleich 1 ist. Wir sahen, dass weder Flächen noch Curven Differentialinvarianten bei dieser Gruppe haben. Unsere damaligen Betrachtungen führen aber weiter. Existirte nämlich ein invariantes Flächenintegral $\int \varphi\, dx\, dy$ oder ein invariantes Curvenintegral $\int \psi\, dx$, so wäre die Gleichung $\varphi = 0$ bez. die Gleichung $\psi = 0$ invariant bei den Transformationen unserer Gruppe. Aber solche invariante Gleichungen giebt es nicht. Also gilt der

Satz 1. *Bei der Gruppe aller Transformationen:* $x_1 = X$, $y_1 = Y$, $z_1 = Z$, *deren Determinante gleich 1 ist, haben Flächen und Curven des Raumes weder Differential- noch Integral-Invarianten, und das einzige invariante Raumintegral ist* $\int dx\, dy\, dz$.

Es liegt nahe, sich das Problem zu stellen, in drei Veränderlichen x, y, z alle Transformationsgruppen Xf zu finden, die entweder *keine*, oder *eine einzige*, oder nur *zwei* unabhängige Flächen-Differentialinvarianten

$$U(x, y, z, p, q, r, s, t \ldots)$$

besitzen, ferner alle Gruppen Xf, die entweder kein Flächenintegral

$$\int V(x, y, z, p, q, r, s, t \ldots)\, dx\, dy$$

oder ein einziges derartiges Integral invariant lassen. Die hier formulirten Probleme bieten keine bedeutenden Schwierigkeiten, während die entsprechenden Probleme für n Dimensionen noch nicht von mir in Angriff genommen worden sind.

Liefert die Formel:

$$\int \Psi(u, v)\, w\, dx\, dy$$

mit der willkürlichen Function Ψ zweier Argumente u, v alle invarianten Flächenintegrale einer Gruppe des Raumes x, y, z, so können diese Integrale nach den früheren Entwickelungen die Form $\int X(u, v)\, du\, dv$ erhalten, und es sind u und v die einzigen Differentialinvarianten von Flächen der betreffenden Gruppe.

In dieser Abhandlung beschränken wir uns auf die hier gegebenen Entwickelungen über die Existenz der Integralinvarianten. Wir halten es aber für zweckmässig, die wichtigsten soeben

vorgetragenen Resultate durch neue Betrachtungen abzuleiten, die unter mehreren Gesichtspunkten Interesse darbieten. Um die Formelsprache zu vereinfachen, beschränken wir uns auf Gruppen in x, y, z. Es wird aber nicht der Aufmerksamkeit eines intelligenten Lesers entgehen, dass sich unsere Entwickelungen unmittelbar auf n Dimensionen ausdehnen.

Wir denken uns die Coordinaten x, y, z der Punkte einer Fläche als Functionen zweier Parameter u, v gegeben, die bei den Transformationen:

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

einer vorliegenden Gruppe invariant bleiben. Wir führen andererseits für die partiellen Ableitungen von x, y, z nach u und v die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = x', \quad \frac{\partial y}{\partial u} = y', \quad \frac{\partial z}{\partial u} = z',$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = x_1, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = y_1, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = z_1,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = x'', \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = x_1', \quad \text{u. s. w.}$$

Dann lässt sich jede Function von $x, y, z, p, q, r, s, t \ldots$ als Function der Grössen:

$$x, y, z, x', x_1, y' \ldots x'', x_1', x_{11}, \ldots$$

ausdrücken, während das Umgekehrte keineswegs immer der Fall ist.

Wünscht man, dass die Grösse:

$$\Omega(x, y, z, x', x_1 \ldots x'' \ldots)$$

eine Function von $x, y, z, p, q \ldots$ sein soll, dass also Ω von der zufälligen Wahl der Parameter u, v unabhängig sein soll, so hat man nur zu verlangen, dass Ω eine Differentialinvariante derjenigen unendlichen Gruppe:

$$u_1 = U(u, v), \quad v_1 = V(u, v)$$

sein soll, deren Transformationen in allgemeinster Weise den Uebergang von einem Parametersystem u, v zu einem anderen Parametersystem u_1, v_1 definiren. Wir setzen daher:

$$\delta u = \alpha(u, v)\delta t\,, \quad \delta v = \beta(u, v)\delta t$$

und verstehen unter α und β willkürliche Functionen von u, v; wir berechnen die entsprechenden Incremente von $x', x_1, y', y_1, \ldots$, indem wir berücksichtigen, dass x, y, z bei der Aenderung der Parameter invariant bleiben, und wir verlangen, dass der entsprechende Zuwachs von Ω:

$$\delta\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\delta x_1 + \cdots, \quad + \frac{\partial\Omega}{\partial x''}\delta x'' + \cdots$$

gleich Null sein soll.

Es ist:

$$dx - x'\,du - x_1\,dv = 0\,, \quad \delta(dx - x'\,du - x_1\,dv) = 0$$

und

$$\delta x' = -x'\alpha' - x_1\beta'\,, \quad \delta x_1 = -x'\alpha_1 - x_1\beta_1\,,$$

ferner

$$\delta y' = -y'\alpha' - y_1\beta'\,, \quad \delta y_1 = -y'\alpha_1 - y_1\beta_1\,,$$
$$\delta z' = -z'\alpha' - z_1\beta'\,, \quad \delta z_1 = -z'\alpha_1 - z_1\beta_1\,.$$

In entsprechender Weise berechnen wir die Incremente $\delta x''$, $\delta x_1'$, u. s. w. Es ist

$$\delta(dx' - x''du - x_1'dv) = 0$$

und

$$d\delta x' - x''d\alpha - x_1'd\beta - \delta x''du - \delta x_1'dv = 0\,,$$

ferner

$$d(-x'\alpha' - x_1\beta') - x''(\alpha'du + \alpha_1dv) - x_1'(\beta'du + \beta_1dv)$$
$$- \delta x''du - \delta x_1'dv = 0\,,$$

woraus

$$\delta x'' = -2x''\alpha' - 2x_1'\beta' - x'\alpha'' - x_1\beta''\,,$$
$$\delta x_1' = -x''\alpha_1 - x_1'(\alpha' + \beta_1) - x_{11}\beta' - x'\alpha_1' - x_1\beta_1'\,,$$
$$\delta x_{11} = -2x_1'\alpha_1 - 2x_{11}\beta_1 - x'\alpha_{11} - x_1\beta_{11}$$

u. s. w.

Bezeichnen wir eine Summation über x, y, z mit Σ, so erhalten wir für $\delta\Omega$ den Ausdruck:

$$\delta\Omega = \sum \frac{\partial\Omega}{\partial x'}(x'\alpha' + x_,\beta') + \sum \frac{\partial\Omega}{\partial x_,}(x'\alpha_, + x_,\beta_,)$$
$$+ \sum \frac{\partial\Omega}{\partial x''}(2x''\alpha' + 2x_,'\beta' + x'\alpha'' + x_,\beta'')$$
$$+ \sum \frac{\partial\Omega}{\partial x_,'}(x''\alpha_, + x_,'(\alpha' + \beta_,) + x_{,,}\beta' + x'\alpha_,' + x_,\beta_,')$$
$$+ \sum \frac{\partial\Omega}{\partial x_{,,}}(2x_,'\alpha_, + 2x_{,,}\beta_, + x'\alpha_{,,} + x_,\beta_{,,}),$$
$$+ \cdots$$

wobei wir nur die Incremente der Ableitungen erster und zweiter Ordnung explicite hingeschrieben haben.

Es soll nun $\delta\Omega$ gleich Null sein, welche Werthe auch α', $\alpha_,$, β', $\beta_,$, α'' ... haben mögen. Daher muss Ω (nach meiner allgemeinen Theorie der Differentialinvarianten) alle linearen partiellen Differentialgleichungen erfüllen, die wir erhalten, wenn wir der Reihe nach die Coefficienten von α', $\alpha_,$, β', $\beta_,$, α'' ... gleich Null setzen. Durch eine kleine Umformung gelingt es diese Gleichungen auf die folgende Form zu bringen:

$$U_1 f = \sum x' \frac{\partial\Omega}{\partial x_,} + \sum x'' \frac{\partial\Omega}{\partial x_,'} + 2\sum x_,' \frac{\partial\Omega}{\partial x_{,,}} + \cdots = 0,$$

$$U_2 f = \sum\left(x' \frac{\partial\Omega}{\partial x'} - x_, \frac{\partial\Omega}{\partial x}\right) + 2\sum\left(x'' \frac{\partial\Omega}{\partial x''} - x_{,,} \frac{\partial\Omega}{\partial x_{,,}}\right) + \cdots = 0,$$

$$U_3 f = \sum x_, \frac{\partial\Omega}{\partial x'} + 2\sum x_,' \frac{\partial\Omega}{\partial x''} + \sum x_{,,} \frac{\partial\Omega}{\partial x_,'} + \cdots = 0,$$

$$Uf = \sum x' \frac{\partial\Omega}{\partial x'} + x_, \frac{\partial\Omega}{\partial x_,} + 2\sum\left(x'' \frac{\partial\Omega}{\partial x''} + x_,' \frac{\partial\Omega}{\partial x_,'} + x_{,,} \frac{\partial\Omega}{\partial x_{,,}}\right)$$
$$+ \cdots = 0,$$

$$\sum x' \frac{\partial\Omega}{\partial x''} + \cdots = 0, \quad \sum x' \frac{\partial\Omega}{\partial x_,'} + \cdots = 0, \quad \sum x' \frac{\partial\Omega}{\partial x_{,,}} + \cdots = 0,$$

$$\sum x_, \frac{\partial\Omega}{\partial x''} + \cdots = 0, \quad \sum x_, \frac{\partial\Omega}{\partial x_,'} + \cdots = 0, \quad \sum x_, \frac{\partial\Omega}{\partial x_{,,}} + \cdots = 0,$$

. . . . . .

Wir heben ausdrücklich hervor, dass die drei Ausdrücke $U_1 f$, $U_2 f$, $U_3 f$ Relationen von der Form:

$$(U_1 U_2) = -2U_1 f, \quad (U_1 U_3) = U_2 f, \quad (U_2 U_3) = -2U_3 f$$

erfüllen, und dass sie daher eine dreigliedrige Gruppe erzeugen,

die mit der allgemeinen projectiven Gruppe einer einfachen Mannigfaltigkeit gleichzusammengesetzt ist. Wir bemerken ferner, dass

$$(U_1 U_4) = (U_2 U_4) = (U_3 U_4) = 0$$

ist, und dass daher $U_1 f$, $U_2 f$, $U_3 f$, $U_4 f$ eine viergliedrige Gruppe erzeugen, die mit der allgemeinen linearen homogenen Gruppe einer zweifachen Mannigfaltigkeit gleichzusammengesetzt ist.

Wir wollen nun annehmen, dass unsere Gruppe Xf Differentialinvarianten besitzt, die nur von x, y, z, p, q, r, s, t abhängen und dass Φ und Ψ zwei derartige Invarianten sind, die als Functionen von $x, y, z, x', x_1, \ldots x'' \ldots$ gegeben sind. Es sind dann Φ und Ψ Lösungen der obenstehenden linearen partiellen Differentialgleichungen. Wir können auch sagen, dass Φ und Ψ Differentialinvarianten derjenigen unendlichen Gruppe sind, die sowohl alle Xf der ursprünglich gegebenen Gruppe wie alle möglichen Parametertransformationen:

$$\alpha(u, v)\frac{\partial f}{\partial u} + \beta(u, v)\frac{\partial f}{\partial v}$$

umfasst. Jedenfalls ist klar, dass bei jeder infinitesimalen Transformation von der Form:

$$\delta u = \alpha(u, v)\delta t, \quad \delta v = \beta(u, v)\delta t$$
$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = 0,$$

sowohl Φ wie Ψ invariant bleiben, und dass daher

$$\delta\Phi = 0, \quad \delta\Psi = 0$$

ist. Setzen wir nun

$$d\Phi - \Phi' du - \Phi_1 dv = 0, \quad d\Psi - \Psi' du - \Psi_1 dv = 0,$$

so erkennen wir durch Rechnungen, die mit den auf S. 380 angestellten identisch sind, dass die Ableitungen Φ', Φ_1, Ψ', Ψ_1 die Incremente

$$\delta\Phi' = -(\Phi'\alpha' + \Phi_1\beta')\delta t, \quad \delta\Phi_1 = -(\Phi'\alpha_1 + \Phi_1\beta_1)\delta t,$$
$$\delta\Psi' = -(\Psi'\alpha' + \Psi_1\beta')\delta t, \quad \delta\Psi_1 = -(\Psi'\alpha_1 + \Psi_1\beta_1)\delta t$$

erhalten; hieraus ergiebt sich, wenn wir für die *Functionaldeterminante* von Φ und Ψ die Bezeichnung:

$$\begin{vmatrix} \Phi' & \Psi' \\ \Phi_1 & \Psi_1 \end{vmatrix} = \Delta$$

einführen und sodann das Increment $\delta\Delta$ von Δ berechnen, dass $\delta\Delta$ den Werth

$$\delta\Delta = -(\alpha' + \beta_i)\Delta \cdot \delta t$$

besitzt.

Wir behaupten und werden beweisen, dass hieraus hervorgeht, dass das Integral:

$$\int \Delta\, du\, dv$$

bei allen Transformationen Xf der ursprünglichen Gruppe invariant bleibt und somit eine Integralinvariante dieser Gruppe darstellt.

Zum Beweise wollen wir die analytischen Kriterien suchen, die eine Function:

$$\varphi(x\, y\, z\, x'x, \ldots x'' \ldots)$$

erfüllen muss, wenn das Integral:

$$\int \varphi(x \ldots x'x, \ldots x'' \ldots)\, du\, dv$$

alle Transformationen Xf der ursprünglich vorgelegten Gruppe gestatten soll. Nach unseren früheren Entwickelungen ist zunächst erforderlich, dass φ eine Differentialinvariante dieser Gruppe darstellt. Hierzu kommen aber noch weitere Bedingungen, die das Verhalten der Grösse φ bei Aenderung der Parameter u, v charakterisiren.

Es besteht, wie wir wissen (diese Berichte S. 353), eine Gleichung von der Form:

$$\varphi = F(xyzpqrst\ldots)\begin{vmatrix} x' & y' \\ x_r & y_r \end{vmatrix} \equiv F \cdot D$$

und wir kennen das Verhalten der beiden Grössen F und D bei dem Uebergang von den Parametern u, v zu den neuen Parametern:

$$u_1 = U(u, v), \quad v_1 = V(u, v).$$

Bei einer solchen Aenderung der Parameter behält ja F ihre Form, während

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial v_1} & \frac{\partial y}{\partial v_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial v_1}{\partial u} \\ \frac{\partial u_1}{\partial v} & \frac{\partial v_1}{\partial v} \end{vmatrix}$$

ist. Bei der infinitesimalen Transformation:

$$\delta u = \alpha(uv)\delta t, \quad \delta v = \beta(uv)\delta t, \quad \delta x = \delta y = \delta z = 0$$

erhält dementsprechend die Functionaldeterminante

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix},$$

das Increment:

$$\delta D = -(\alpha' + \beta_1) D \delta t,$$

also erhält die Grösse $\varphi = F \cdot D$ das Increment:

$$\delta\varphi = (\delta F \cdot D + F \cdot \delta D) = \delta t = -(\alpha' + \beta_1) F \cdot D \cdot \delta t$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt:

$$\delta\varphi = -(\alpha' + \beta_1) \cdot \varphi \cdot \delta t.$$

In dieser Weise erhalten wir zunächst den

Satz 2. *Die Forderung, dass die Grösse*

$$\int \varphi(x, y, z, x', x_1, y' \ldots x'' \ldots) \, du \, dv$$

eine Integralinvariante einer continuirlichen Gruppe sein soll, deren infinitesimale Transformationen durch das allgemeine Symbol:

$$Xf = \xi(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z}$$

dargestellt werden, wird analytisch formulirt, wenn wir verlangen einerseits, dass φ eine Differentialinvariante der Gruppe Xf sein soll und andererseits, dass φ bei jeder infinitesimalen Aenderung der Parameter:

$$\delta u = \alpha(uv)\delta t, \quad \delta v = \beta(uv)\delta t$$

das Increment

$$\delta\varphi = -\varphi(\alpha' + \beta_1)\delta t$$

erhalten soll.

Es ist nun leicht zu sehen, dass die früher aufgestellte Functionaldeterminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Phi' & \Psi' \\ \Phi_1 & \Psi_1 \end{vmatrix}$$

wirklich alle Forderungen erfüllt, die an die Grösse φ zu stellen sind, dabei selbstverständlich vorausgesetzt, dass Φ und Ψ Differentialinvarianten der Gruppe Xf darstellen, die bei Aenderung der Parameter u, v invariant bleiben. Denn einerseits haben wir ja schon gesehen, dass Δ bei der infinitesimalen Transformation:

$$\delta u = \alpha(u, v)\delta t, \quad \delta v = \beta(u, v)\delta t, \quad \delta x = \delta y = \delta z = 0$$

das Increment:

$$\delta \Delta = -(\alpha' + \beta_{,})\Delta \cdot \delta t$$

erhält. Andererseits aber können wir, da Φ und Ψ, wie u und v, bei den infinitesimalen Transformationen der vorgelegten Gruppe Xf:

$$\delta u = 0, \quad \delta v = 0, \quad \delta x = \xi\delta t, \quad \delta y = \eta\delta t, \quad \delta z = \zeta\delta t$$

invariant bleiben, ohne weiteres {eventuell durch Ausführung der Gleichungen:

$$\delta(d\Phi - \Phi' du - \Phi_{,}dv) = 0, \quad \delta(d\Psi - \Psi' du - \Psi_{,}dv)\}$$

schliessen, dass auch die Ableitungen von Φ und Ψ nach u und v Differentialinvarianten unserer Gruppe Xf darstellen, und hieraus folgt unmittelbar, dass auch Δ eine Differentialinvariante der Gruppe Xf darstellt.

Die Functionaldeterminante Δ erfüllt daher wirklich alle Forderungen, die an die gesuchte Grösse φ gestellt werden müssen und wir können daher das folgende beachtenswerthe Theorem aufstellen:

Theorem II. *Sind Φ und Ψ Differentialinvarianten einer Fläche: $z = f(x, y)$ gegenüber einer gewissen continuirlichen Gruppe von Punkttransformationen des Raumes x, y, z, so liefert die Formel:*

$$\int \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial u} & \frac{\partial\Psi}{\partial u} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial v} & \frac{\partial\Psi}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv$$

immer eine Integralinvariante der Gruppe. Es ist dabei unsere Voraussetzung, dass u und v Parameter bezeichnen, die bei den Transformationen der betreffenden Gruppe invariant bleiben.

Ist ferner $W(x, y, z, p, q, r, s, t \ldots)$ irgend eine Differentialinvariante der Gruppe, so ist

$$\int W \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial u} & \frac{\partial\Psi}{\partial u} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial v} & \frac{\partial\Psi}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv$$

immer eine Integralinvariante und in dieser Weise werden alle Integralinvarianten der betreffenden Gruppe gefunden, die sich auf Flächen beziehen.

Die hier aufgestellte Integralinvariante einer Fläche

$$\int_W \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u} & \frac{\partial \Psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v} & \frac{\partial \Psi}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv$$

kann offenbar auf die Form

$$\int W\, d\Phi\, d\Psi$$

gebracht werden und es deckt sich daher das eben aufgestellte Theorem, das sich ohne Weiteres auf n Dimensionen ausdehnt, mit dem auf S. 375 formulirten allgemeinen Theorem I.

Kapitel II.

Verwerthung invarianter Flächenintegrale erster Ordnung.

Wir wollen annehmen, dass eine lineare partielle Differentialgleichung in x, y, z:

$$0 = \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z} \equiv Xf$$

zur Integration vorliegt und dass wir zufälliger Weise eine zugehörige Integralinvariante erster Ordnung:

$$(1) \qquad \int \varphi(xyz\,pq) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv$$

kennen, die sich auf eine allgemeine Fläche $z = Z(xy)$ bezieht. Wir wollen zeigen, dass sich aus diesem Umstande immer wesentliche Vereinfachungen in der Integration der Gleichung: $Xf = 0$ ergeben. Wir bemerken aber ausdrücklich, dass die Entwickelungen dieses Kapitels, so interessant sie auch einem Functionentheoretiker erscheinen mögen, vom gruppentheoretischen Gesichtspunkte keineswegs als definitiv zu betrachten sind. Denn die *allgemeine Invariantentheorie*, die ich schon seit etwa zwanzig Jahren auf meine Theorie der continuirlichen Gruppen gegründet habe, gestattet, wie wir im nächsten Kapitel zeigen werden,

nicht allein zu beweisen, dass man das Vorhandensein einer Integralinvariante zur Vereinfachung der Integrationsschwierigkeiten verwerthen kann: *sie entscheidet überdies genau, welche Vereinfachungen in jedem einzelnen Falle erreicht werden können.* Gerade in dem letzten Umstande liegt für den wesentlichsten Theil die *hervorragende Bedeutung meiner allgemeinen Invariantentheorie*, deren Wesen, ja Existenz, den Mathematikern fortwährend unbekannt zu sein scheint.

Unsere Voraussetzung, dass die infinitesimale Transformation Xf das Flächenintegral: $\int \varphi \, dx \, dy$ invariant lässt, findet, wie wir wissen, ihren analytischen Ausdruck in dem Bestehen der Gleichung:

$$X'\varphi + (\xi_x + \eta_y + \xi_z p + \eta_z q)\varphi = 0 \,, \tag{2}$$

wobei $X'f$ durch einmalige Erweiterung aus Xf entstanden ist, und die Form:

$$\begin{aligned} X'f = {} & \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} \\ & + \{\zeta_x + p\zeta_z - p(\xi_x + p\xi_z) - q(\eta_x + p\eta_z)\} \frac{\partial f}{\partial p} \\ & + \{\zeta_y + q\zeta_z - p(\xi_y + q\xi_z) - q(\eta_y + q\eta_z)\} \frac{\partial f}{\partial q} \end{aligned} \tag{2'}$$

besitzt.

Die fundamentale Gleichung (2) sagt zunächst aus, dass die partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0$$

die infinitesimale Transformation Xf gestattet, und hieraus folgt nach meinen allgemeinen Theorien, dass die beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0 \,, \quad \xi p + \eta q - \zeta = 0$$

(wenn sie sich nicht zufälliger Weise auf *eine* Gleichung reduciren) ∞^1 gemeinsame Integralflächen:

$$u(x, y, z) = \text{Const.}$$

besitzen, die jedenfalls durch Integration einer totalen Differentialgleichung:

$$dz - P(x, y, z)dx - Q(x, y, z)dy = 0 \,,$$

also durch die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung gefunden werden können. Dabei ist

$u(x, y, z)$ eo ipso eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung $Xf = 0$, und wir können daher die fehlende Lösung v jedenfalls durch Integration einer neuen Differentialgleichung erster Ordnung finden.

Es ist überdies immer möglich, diese letzte Integration zu ersparen, sodass die Integration der Gleichung:

$$0 = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} \equiv Xf,$$

sobald eine Integralinvariante:

$$\int \varphi(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$$

von Xf vorliegt, und φ nicht gleichzeitig mit $\xi p + \eta q - \zeta$ verschwindet, jedenfalls auf die Erledigung einer einzigen gewöhnlichen Differentialgleichung *erster* Ordnung reducirt werden kann. Wir wollen die Richtigkeit dieser Behauptung nachweisen.

Zu diesem Zwecke müssen wir allerdings recht weit ausholen, und zwar werden wir einerseits meine Theorie der infinitesimalen Berührungstransformationen, andererseits den von mir aufgedeckten Zusammenhang zwischen der *Jacobischen* Multiplicatortheorie und meiner allgemeinen Transformationstheorie zu Hülfe nehmen.

In meiner Theorie der Berührungstransformationen habe ich gezeigt, dass jede infinitesimale Berührungstransformation des Raumes x, y, z durch eine einzige Function W von x, y, z, p, q — meine sogenannte *charakteristische Function* — vollständig bestimmt ist, dass ferner das Symbol Bf der betreffenden infinitesimalen Transformation die Form:

$$Bf = \frac{\partial W}{\partial p} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial y} + \left(p \frac{\partial W}{\partial p} + q \frac{\partial W}{\partial q} - W\right) \frac{\partial f}{\partial z} - \left(\frac{\partial W}{\partial x} + p \frac{\partial W}{\partial z}\right) \frac{\partial f}{\partial p} - \left(\frac{\partial W}{\partial y} + q \frac{\partial W}{\partial z}\right) \frac{\partial f}{\partial q},$$

oder mit Benutzung des *Poissonschen* Klammersymbols [ ] die Form:

$$Bf = [Wf] - W \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Ich zeigte ferner, dass sich aus zwei infinitesimalen Berührungstransformationen:

$$B_1 f = [W_1 f] - W_1 \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$B_2 f = [W_2 f] - W_2 \frac{\partial f}{\partial z}$$

immer eine ganz bestimmte dritte Berührungstransformation:

$$Bf = [\mathfrak{W} f] - \mathfrak{W} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}$$

ableiten lässt, deren charakteristische Function $\mathfrak{W}$ die Form besitzt:

$$\mathfrak{W} = [W_1 W_2] - W_1 \frac{\partial W_2}{\partial z} + W_2 \frac{\partial W_1}{\partial z},$$

und zwar wurde der Zusammenhang zwischen $B_1 f$, $B_2 f$ und Bf durch die Formel:

$$Bf = B_1(B_2(f)) - B_2(B_1(f))$$

gegeben.

Setzen wir insbesondere

$$W_1 = \varphi, \quad W_2 = \xi p + \eta q - \zeta,$$

so wird

$$\mathfrak{W} = [\varphi, \xi p + \eta q - \zeta] - \varphi(\xi_z p + \eta_z q - \zeta_z) + \varphi_z(\xi p + \eta q - \zeta).$$

Nun aber besteht nach unsrer Voraussetzung die Gleichung (2′):

$$\begin{aligned}\xi\varphi_x + \eta\varphi_y + \zeta\varphi_z + \{\zeta_x + \zeta_z p - p(\xi_x + \xi_z p) - q(\eta_x + \eta_z p)\}\varphi_p \\ + \{\zeta_y + \zeta_z q - p(\xi_y + \xi_z q) - q(\eta_y + \eta_z q)\}\varphi_q \\ + (\xi_x + p\xi_z + \eta_y + q\eta_z)\varphi = 0,\end{aligned}$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Gleichung:

$$(3) \quad \begin{cases} 0 = -[\varphi, \xi p + \eta q - \zeta] - \varphi_z(p\xi + q\eta - \zeta) \\ \qquad + (\xi_x + p\xi_z + \eta_y + q\eta_z)\varphi, \end{cases}$$

und also erhält der obenstehende Ausdruck für $\mathfrak{W}$ die beachtenswerthe Form

$$(4) \quad \mathfrak{W} = \varphi(\xi_x + \eta_y + \zeta_z).$$

Wir notiren das erhaltene Resultat als Satz.

Satz 3. *Gestattet das Flächenintegral erster Ordnung:*

$$\int \varphi(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$$

die infinitesimale Punkttransformation:

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z},$$

so erfüllen die beiden infinitesimalen Berührungstransformationen:

$$Af = [\varphi, f] - \varphi \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$Bf = [\xi p + \eta q - \zeta, f] - (\xi p + \eta q - \zeta) \frac{\partial f}{\partial z}$$

die Relation

(5) $A(B(f)) - B(A(f)) = [\varphi(\xi_x + \eta_y + \zeta_z), f] - \varphi(\xi_x + \eta_y + \zeta_z) \frac{\partial f}{\partial z},$

sowie die damit äquivalente:

(5') $A(B(f)) - B(A(f)) = (\xi_x + \eta_y + \zeta_z) Af + \varphi [\xi_x + \eta_y + \zeta_z, f].$

Um aus der hiermit gefundenen wichtigen Formel eine für uns noch wichtigere, wenn auch speciellere, Formel ableiten zu können, wollen wir zunächst nachweisen, dass das Gleichungssystem:

(6) $\varphi(x, y, z, p, q) = 0, \quad \xi p + \eta q - \zeta = 0$

sowohl die infinitesimale Transformation Af wie die Transformation Bf gestattet.

Dass unser Gleichungssystem (5) die infinitesimale Berührungstransformation:

$$Bf = [\xi p + \eta q - \zeta, f] - (\xi p + \eta q - \zeta) \frac{\partial f}{\partial z}$$

gestattet, beruht darauf, dass diese Transformation geradezu die Erweiterung der infinitesimalen Punkttransformation:

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

darstellt. Es ist

$$B(\xi p + \eta q - \zeta) = [\xi p + \eta q - \zeta, \ \xi p + \eta q - \zeta] - (\xi p + \eta q - \zeta) \frac{\partial (\xi p + \eta q - \zeta)}{\partial z}$$

$$= - (\xi p + \eta q - \zeta) \frac{\partial (\xi p + \eta q - \zeta)}{\partial z}$$

und

$$B(\varphi) = [\xi p + \eta q - \zeta, \varphi] - (\xi p + \eta q - \zeta) \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung (3):

$$B(\varphi) = - (\xi_x + p \xi_z + \eta_y + q \eta_z) \varphi,$$

und wie oben:

$$B(\xi p + \eta q - \zeta) = - \frac{\partial (\xi p + \eta q - \zeta)}{\partial z} (\xi p + \eta q - \zeta).$$

Die beiden letzten Gleichungen zeigen, dass die Ausdrücke $B(\varphi)$ und $B(\xi p + \eta q - \zeta)$ vermöge des Gleichungssystems: $\varphi = 0$, $\xi p + \eta q - \zeta = 0$ verschwinden, und dass daher dieses Gleichungssystem wirklich die infinitesimale Berührungstransformation Bf gestattet.

Ferner ist:

$$A(\xi p + \eta q - \zeta) = [\varphi, \xi p + \eta q - \zeta] - \varphi \frac{\partial(\xi p + \eta q - \zeta)}{\partial z}$$

oder nach Berücksichtigung der Formel (3):

$$A(\xi p + \eta q - \zeta) = -\varphi_z(p\xi + q\eta - \zeta) + \varphi(\xi_x + \eta_y + \zeta_z)$$

und andererseits:

$$A(\varphi) = [\varphi\varphi] - \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Also verschwinden auch die Ausdrücke $A(\xi p + \eta q - \zeta)$ und $A(\varphi)$ vermöge des Gleichungssystems: $\varphi = 0$, $\xi p + \eta q - \zeta = 0$, das somit auch die infinitesimale Berührungstransformation Af gestattet. Es besteht daher der

Satz 4. *Gestattet das Flächenintegral erster Ordnung:*

$$\int \varphi(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$$

die infinitesimale Punkttransformation:

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z},$$

so gestattet das System der beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung: $\varphi = 0$, $\xi p + \eta q - \zeta = 0$ eine jede unter den beiden infinitesimalen Berührungstransformationen:

$$Af = [\varphi f] - \varphi \frac{\partial f}{\partial z} \text{ und } Bf = [\xi p + \eta q - \zeta, f] - (\xi p + \eta q - \zeta)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Die Differentialgleichungen erster Ordnung: $\varphi = 0$ und $\xi p + \eta q - \zeta = 0$ bilden überdies, wenn sie nicht zufälliger Weise identisch sind, ein Involutionssystem, indem die linke Seite der früher gefundenen Gleichung:

$$(3) \quad \begin{cases} [\varphi, \xi p + \eta q - \zeta] = -\varphi_z(\xi p + \eta q - \zeta) \\ \qquad\qquad + (\xi_x + p\xi_z + \eta_y + q\eta_z)\varphi \end{cases}$$

vermöge $\varphi = 0$, $\xi p + \eta q - \zeta = 0$ verschwindet. Dieses Involutionssystem hat eo ipso ∞^1 Integralflächen: $u(x, y, z) = c$.

Im fünfdimensionalen Raume x, y, z, p, q liegt also eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit vor, deren Gleichungen:

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0\,, \quad \xi p + \eta q - \zeta = 0$$

wir nach p und q auflösen:

$$p = P(xyz), \quad q = Q(xyz).$$

Wir können dabei die Grössen x, y, z als Coordinaten jeder einzelnen Stelle in dieser dreidimensionalen Mannigfaltigkeit betrachten.

Diese Mannigfaltigkeit gestattet, wie wir wissen, die beiden infinitesimalen Transformationen:

$$Af = \varphi_p \frac{\partial f}{\partial x} + \varphi_q \frac{\partial f}{\partial y} + (p\varphi_p + q\varphi_q - \varphi)\frac{\partial f}{\partial z} - (\varphi_x + p\varphi_z)\frac{\partial f}{\partial p} - (\varphi_y + q\varphi_z)\frac{\partial f}{\partial q}$$

und

$$Bf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \{\zeta_x + p\zeta_z - p(\xi_x + p\xi_z) - q(\eta_x + p\eta_z)\}\frac{\partial f}{\partial p} + \{\zeta_y + q\zeta_z - p(\xi_y + q\xi_z) - q(\eta_y + q\eta_z)\}\frac{\partial f}{\partial q},$$

die, wie wir sahen, in der Beziehung:

$$(5) \quad A(B(f)) - B(A(f)) = (\xi_x + \eta_y + \zeta_z)Af + \varphi[\xi_x + \eta_y + \zeta_z, f]$$

stehen.

Betrachten wir nun x, y, z als Coordinaten der einzelnen Stellen unserer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit, so zeigen, können wir sagen, die verkürzten infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{A}f = (\varphi_p)_{p=P,\,q=Q}\frac{\partial f}{\partial x} + (\varphi_q)_{p=P,\,q=Q}\frac{\partial f}{\partial y} + (p\varphi_p + q\varphi_q - \varphi)_{p=P,\,q=Q}\frac{\partial f}{\partial z}$$

und

$$\overline{B}f = \xi(xyz)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(xyz)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(xyz)\frac{\partial f}{\partial z},$$

wie diese dreidimensionale Mannigfaltigkeit transformirt wird.

Wir wollen zeigen, dass $\overline{A}f$ und $\overline{B}f$ die Relation:

$$\overline{A}(\overline{B}(f)) - \overline{B}(\overline{A}(f)) = (\xi_x + \eta_y + \zeta_z)\overline{A}f$$

erfüllen.

Um die Richtigkeit dieser Behauptung nachzuweisen, bemerken wir, dass in der identischen Gleichung (5) die Coefficienten von $\frac{\partial f}{\partial x}$, bez. $\frac{\partial f}{\partial y}$ oder $\frac{\partial f}{\partial z}$ links und rechts übereinstimmen müssen, und dass daher die drei Relationen:

$$A(\xi) - B(\varphi_p) = (\xi_x + \eta_y + \zeta_z)\varphi_p,$$
$$A(\eta) - B(\varphi_q) = (\xi_x + \eta_y + \zeta_z)\varphi_q,$$
$$A(\zeta) - B(p\varphi_p + q\varphi_q - \varphi) = (\xi_x + \eta_y + \zeta_z)(p\varphi_p + q\varphi_q - \varphi)$$

bestehen. In diesen drei Relationen machen wir links und rechts die Substitution: $p = P(xyz)$, $q = Q(xyz)$ und erhalten hierdurch (vgl. meine Theorie der Transformationsgruppen Bd. I, S. 110, Formel (3)) die Gleichungen:

$$\overline{A}\xi - \overline{B}((\varphi_p)_{p=P,\,q=Q}) = (\xi_x + \eta_y + \zeta_z)\cdot(\varphi_p)_{p=P,\,q=Q},$$
$$\overline{A}\eta - \overline{B}((\varphi_q)_{p=P,\,q=Q}) = (\xi_x + \eta_y + \zeta_z)\cdot(\varphi_q)_{p=P,\,q=Q},$$
$$\overline{A}\zeta - \overline{B}((p\varphi + q\varphi_q - \varphi)_{p=P,\,q=Q})$$
$$= (\xi_x + \eta_y + \zeta_z)\cdot(p\varphi_p + q\varphi_q - \varphi)_{p=P,\,q=Q},$$

die uns zeigen, dass die angekündigte Relation:

$$\overline{A}(\overline{B}(f)) - \overline{B}(\overline{A}(f)) = (\xi_x + \eta_y + \zeta_z)\overline{A}(f) \tag{7}$$

wirklich identisch besteht.

Hiermit haben wir den

Satz 5. *Gestattet das Flächenintegral erster Ordnung:*

$$\int \varphi(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$$

die infinitesimale Punkttransformation:

$$Xf = \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z}$$

des Raumes x, y, z, und geben dabei die beiden Gleichungen: $\varphi = 0$, $\xi p + \eta q - \zeta = 0$ durch Auflösung für p und q die Werthe: $p = P(x, y, z)$, $q = Q(x, y, z)$, so besteht zwischen Xf und der infinitesimalen Punkttransformation:

$$\bar{A}f = (\varphi_p)_{p=P,\,q=Q}\frac{\partial f}{\partial x} + (\varphi_q)_{p=P,\,q=Q}\frac{\partial f}{\partial y} + (p\varphi_p + q\varphi_q - \varphi)_{p=P,\,q=Q}\frac{\partial f}{\partial z}$$

die Relation:

$$\bar{A}(X(f)) - X(\bar{A}(f)) = (\xi_x + \eta_y + \zeta_z)\bar{A}f. \tag{7}$$

Ehe wir nun weiter gehen, wollen wir, um die Formeln zu vereinfachen, die Incremente der Grössen x, y, z bei der Transformation $\bar{A}f$ mit α, β, γ bezeichnen und dementsprechend:

$$\bar{A}f = \alpha(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \beta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

setzen.

Die Formel (7) zeigt zunächst, dass die beiden linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$Xf = 0, \quad \bar{A}f = 0$$

immer eine und im Allgemeinen auch nur eine gemeinsame Lösung $u(x, y, z)$ besitzen, wobei unmittelbar klar ist, dass die Gleichung:

$$u = \text{einer willkürlichen Constanten}$$

die früher besprochenen Integralflächen des Involutionssystems:

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0, \quad \xi p + \eta q - \zeta = 0$$

liefern. Aus der Formel (7) können wir aber noch mehr schliessen, nämlich, dass wenn $v(x, y, z)$ irgend eine Lösung von $Xf = 0$ bezeichnet, die nicht gleichzeitig $\bar{A}f = 0$ erfüllt, dass dann die Grösse $Av = \Phi$, die offenbar die Relation

$$X\Phi + (\xi_x + \eta_y + \zeta_z)\Phi = 0$$

erfüllt, einen Multiplicator der linearen partiellen Differentialgleichung: $Xf = 0$ darstellt.

Das hiermit erhaltene Resultat, das ein Interesse darbietet, wenn es gleich im Folgenden keine Rolle spielt, formuliren wir folgendermassen.

Satz 6. *Ist*

$$\int \varphi(xyzpq)\,dx\,dy$$

eine Integralinvariante der infinitesimalen Transformation

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z},$$

und ergeben die beiden Gleichungen $\varphi = 0$, $\xi p + \eta q - \zeta = 0$ *durch Auflösung:* $p = P(x, y, z)$, $q = Q(x, y, z)$, *so ist, wenn* $\varphi(x, y, z)$ *eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung:* $Xf = 0$ *darstellt, die nicht gleichzeitig die Gleichung:*

$$0 = (\varphi_p)_{p=P,\, q=Q} \frac{\partial f}{\partial x} + (\varphi_q)_{p=P,\, q=Q} \frac{\partial f}{\partial y} + (p\varphi_p + q\varphi_q - \varphi)_{p=P,\, q=Q} \frac{\partial f}{\partial z} \equiv \overline{A}f$$

erfüllt, die Grösse $\overline{A}v$ *immer ein Jacobischer Multiplicator der Gleichung:* $Xf = 0$.

Der eben aufgestellte Satz wird hinfällig, wenn eine Relation von der Form

$$\overline{A}f = \varrho \cdot Xf$$

besteht. Dann hat aber die Relation (7) die Gestalt:

$$-X\varrho \cdot Xf = (\xi_x + \eta_y + \zeta_z)\varrho \cdot Xf,$$

und dementsprechend besteht die Gleichung:

$$X(\varrho) + (\xi_x + \eta_y + \zeta_z) \cdot \varrho = 0,$$

die direct aussagt, dass ϱ einen Multiplicator von $Xf = 0$ darstellt. Es gilt daher, wenn wir die Bezeichnungen des Satzes 6 behalten, der

Satz 7. *Sind die Ausdrücke* $\overline{A}f$ *und* Xf *des Satzes 6 durch die Relation:*

$$\overline{A}f = \varrho \cdot Xf$$

gebunden, so ist ϱ *ein Multiplicator von* $Xf = 0$.

Wir werden jetzt zeigen, dass es *immer* möglich ist, einen Multiplicator unserer Gleichung: $Xf = 0$ anzugeben. Zu diesem Zwecke wollen wir den folgenden Satz verwerthen, den wir längst aufgestellt haben (vgl. z. B. Math. Ann. Bd. XI):

Satz 8. *Gestattet die lineare partielle Differentialgleichung:*

$$0 = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} \equiv Uf$$

die infinitesimale Transformation:

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

und besteht in Folge dessen die Relation:

$$XUf - UXf = \lambda \cdot Uf;$$

ist ferner M ein Multiplicator der Gleichung: $Uf = 0$, so ist die Grösse:

$$X(\log M) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) + \lambda$$

eine Lösung der Gleichung $Uf = 0$.

Diesen Satz wenden wir auf die früher betrachtete Gleichung $\bar{A}f = 0$ an und setzen dabei der Kürze wegen:

$$\bar{A}f = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Jetzt besteht die Gleichung:

$$(7) \qquad X(\bar{A}(f)) - \bar{A}(X(f)) = -(\xi_x + \eta_y + \zeta_z) \cdot \bar{A}f$$

und es ist daher in unserem Falle:

$$\xi_x + \eta_y + \zeta_z + \lambda = 0,$$

was wieder heisst, dass die Grösse $X(\log M)$ eine Lösung von $\bar{A}f = 0$ darstellt, sobald M einen Multiplicator von $\bar{A}f = 0$ bezeichnet:

$$\bar{A}(X \log M) = 0.$$

Indem wir dieses Resultat mit früheren Ergebnissen (vgl. Satz 6) zusammenfassen, können wir sagen:

Satz 9. *Wenn die Ausdrücke:*

$$\bar{A}f = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

(wie in den vorhergehenden Entwickelungen) in der Beziehung:

$$\bar{A}(X(f)) - X(\bar{A}(f)) = (\xi_x + \eta_y + \zeta_z) \cdot \bar{A}f$$

stehen, so liefert jede Lösung v von $Xf = 0$ den Multiplicator: $\bar{A}v$ von $Xf = 0$; und jeder Multiplicator M von $\bar{A}f = 0$ giebt eine Lösung, nämlich $X(\log M)$, von $\bar{A}f = 0$.

Setzen wir in der Identität (7):

$$\bar{A}(X(f)) - X(\bar{A}(f)) = (\xi_x + \eta_y + \zeta_z) \cdot \bar{A}f$$

f gleich $\log M$ und bemerken dabei, dass $A(X(\log M))$ verschwindet, so erhalten wir die Gleichung:

$$X(\bar{A}(\log M)) + (\xi_x + \eta_y + \zeta_z) \cdot \bar{A}(\log M) = 0,$$

die aussagt, dass $\bar{A}(\log M)$ einen Multiplicator von $Xf = 0$ darstellt, wenn M einen Multiplicator von $\bar{A}f = 0$ bezeichnet. Unter dieser Voraussetzung besteht aber die Gleichung:

$$\bar{A}(\log M) + \alpha_x + \beta_y + \gamma_z = 0,$$

und also ist die Grösse: $\alpha_x + \beta_y + \gamma_z$, die wir immer aufstellen können, ein Multiplicator von $Xf = 0$.

Um die Wichtigkeit des hiermit gefundenen Resultates hervorzuheben, formuliren wir es als *Theorem*.

Theorem III. *Bleibt das Flächenintegral:*

$$\int \varphi(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$$

invariant bei der infinitesimalen Transformation

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z},$$

so ist es möglich, einen Multiplicator der Gleichung: $Xf = 0$ *zu finden. Geben nämlich die Gleichungen:*

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0, \quad \xi p + \eta q - \zeta = 0$$

durch Auflösung: $p = P(x, y, z)$, $q = Q(x, y, z)$, *und setzen wir*

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)_{p=P,\, q=Q} = \alpha(x, y, z), \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)_{p=P,\, q=Q} = \beta(x, y, z),$$

$$\left(p \frac{\partial \varphi}{\partial p} + q \frac{\partial \varphi}{\partial q} - \varphi\right)_{p=P,\, q=Q} = \gamma(x, y, z),$$

so ist die Grösse $\alpha_x + \beta_y + \gamma_z$ *ein Multiplicator von* $Xf = 0$. *Ist die Gleichung* $\varphi = 0$ *linear in* p *und* q:

$$\varphi \equiv Ap + Bq + C$$

und die Determinante

$$\begin{vmatrix} A & B \\ \xi & \eta \end{vmatrix} \equiv 0,$$

so werden unsere Betrachtungen hinfällig. Ist dagegen φ *linear in* p *und* q, *die obenstehende Determinante aber nicht gleich Null, so erhalten wir einen wirklichen Multiplicator von* $Xf = 0$. *Ist die Grösse* φ *nicht linear in*

p und q, so sind die durch Auflösung der Gleichungen $\varphi = 0$, $\xi p + \eta q - \zeta = 0$ *hervorgehenden Werthe:* $p = P(x, y, z)$, $q = Q(x, y, z)$ *im Allgemeinen mehrdeutige Functionen von* x, y, z; *alsdann wird auch der Multiplicator* $\alpha_x + \beta_y + \gamma_z$ *im Allgemeinen eine mehrdeutige Function von* x, y, z *innerhalb eines Bereiches darstellen, in dem sich* ξ, η, ζ *u. s. w. regulär und eindeutig verhalten. Im Allgemeinen finden wir daher mehrere Multiplicatoren von* $Xf = 0$ *und dementsprechend durch Division zweier Multiplicatoren eine Lösung von* $Xf = 0$, *deren Integration im ungünstigsten Falle eine Quadratur verlangen wird.*

Das eben aufgestellte Theorem wird, wie wir ausdrücklich bemerkten, hinfällig, wenn φ linear in p und q ist und überdies die specielle Form

$$\varphi \equiv \sigma(\xi p + \eta q) + \omega$$

besitzt. Stellen wir uns daher direct die Frage, welchen Vortheil wir in diesem speciellen Falle von der bekannten Integralinvariante ziehen können. Dass dieser Fall wirklich eintreten kann, erkennen wir leicht. Sind nämlich $u(x, y, z)$ und $v(x, y, z)$ zwei beliebige Lösungen von $Xf = 0$, so ist, wie wir früher sahen, das Integral:

$$\int \begin{vmatrix} u_x + p\,u_z & v_x + p\,v_z \\ u_y + q\,u_z & v_y + q\,v_z \end{vmatrix} dx\,dy$$

oder ausführlicher geschrieben das Integral:

$$\int \left\{ \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} u_z & v_z \\ u_y & v_y \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{vmatrix} \right\} dx\,dy$$

eine Invariante gegenüber Xf, und hier besteht wirklich eine Relation von der Form:

$$\varphi = \sigma(\xi p + \eta q - \zeta).$$

Es verdient daher wohl der besprochene Ausnahmefall eine besondere Discussion.

Ist

$$f(Ap + Bq - C)\,dx\,dy$$

eine Integralinvariante der Transformation Xf und verschwinden dabei nicht alle zweireihigen Determinanten der Matrix:

(M) $$\begin{vmatrix} A & B & C \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix},$$

so können wir durch eine passende Vertauschung der Coordinaten x, y, z immer erreichen, dass

$$\begin{vmatrix} A & B \\ \xi & \eta \end{vmatrix} \not\equiv 0$$

ist. Wir brauchen uns daher nur mit der Annahme zu beschäftigen, dass *alle* zweireihigen Determinanten der Matrix (M) verschwinden, und dass dementsprechend:

$$\varphi \equiv (Ap + Bq - C) \equiv \omega(\xi p + \eta q - \zeta)$$

ist.

Tragen wir diesen Werth von φ in die fundamentale Gleichung:

$$X'\varphi + (\xi_x + p\xi_z + \eta_y + q\eta_z)\varphi = 0$$

ein, so erhalten wir die Relation:

$$\begin{aligned} X\omega \cdot (\xi p + \eta q - \zeta) + \omega(pX\xi + qX\eta - X\zeta) \\ + \omega\xi\{\zeta_x + p\zeta_z - p(\xi_x + p\xi_z) - q(\eta_x + p\eta_z)\} \\ + \omega\eta\{\zeta_y + q\zeta_z - p(\xi_y + q\xi_z) - q(\eta_y + q\eta_z)\} \\ + (\xi_x + p\xi_z + \eta_y + q\eta_z)\,\omega(\xi p + \eta q - \zeta) = 0 \end{aligned}$$

und schliesslich die Gleichung

$$(\xi p + \eta q - \zeta)\{X(\omega) + (\xi_x + \eta_y + \zeta_z)\omega\} = 0,$$

die aussagt, dass ω einen Multiplicator von $Xf = 0$ darstellt.

Es ist uns also gelungen, die früheren Ergebnisse zu vervollständigen und wir können dementsprechend das folgende Theorem aufstellen:

Theorem IV. *Kennen wir ein Flächenintegral erster Ordnung:*

$$\int \varphi(x, y, z, p, q)\, dx\, dy,$$

das bei der Transformation $Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$ *invariant bleibt, so ist es immer möglich, einen Multiplicator der Gleichung:* $Xf = 0$ *zu finden. Geben die Regeln des Theorems III, auch nach Vertauschung der Buchstaben* x, y, z, *keinen Multiplicator von* $Xf = 0$, *so ist* φ *linear in* p *und* q *und besitzt überdies die Form:*

$$\varphi = \varrho(\xi p + \eta q - \zeta)$$

und dann stellt ϱ selbst einen Multiplicator von $Xf = 0$ dar.

Ist andererseits M ein beliebiger Multiplicator von $Xf = 0$, so ist

$$\int M(\xi p + \eta q - \zeta)\, dx\, dy$$

immer eine Integralinvariante von $Xf = 0$.

Die Jacobische Multiplicatortheorie einer Gleichung

$$\xi f_x + \eta f_y + \zeta f_z = 0$$

unterordnet sich somit in gewissem Sinne als ganz speciell unter der Theorie der invarianten Flächenintegrale.

Wir fassen die wichtigsten Ergebnisse von den Untersuchungen dieses Kapitels zum folgenden Theoreme zusammen:

Theorem V. *Kennt man ein Flächenintegral:*

$$\int \varphi(x, y, z, p, q)\, dx\, dy,$$

das bei der infinitesimalen Transformation Xf invariant bleibt, so lässt sich dieser Umstand immer für die Integration der Gleichung: $Xf = 0$ verwerthen. Der ungünstigste Fall ist der, dass φ die Form

$$\varphi \equiv \varrho(\xi p + \eta q - \zeta)$$

besitzt, alsdann ist ϱ ein Jacobischer Multiplicator von $Xf = 0$ und da andererseits das Integral

$$\int M(\xi p + \eta q - \zeta)\, dx\, dy$$

immer invariant bleibt, wenn M einen Multiplicator von $Xf = 0$ bezeichnet, so leistet das bekannte Flächenintegral im vorliegenden Falle nur die Bestimmung der letzten Lösung durch Quadratur.

Besitzt φ nicht die Form $\varrho(\xi p + \eta q - \zeta)$, so können die Gleichungen:

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0, \quad \xi p + \eta q - \zeta = 0$$

jedenfalls nach einer passenden Vertauschung der Grössen x, y, z nach p und q aufgelöst werden:

$$p = P(xyz), \quad q = Q(xyz).$$

Setzt man dann:

$$(\varphi_p)_{p=P,q=Q} = \alpha\,, \quad (\varphi_q)_{p=P,q=Q} = \beta\,, \quad \alpha P + \beta Q = \gamma\,,$$

so ist die Grösse: $\alpha_x + \beta_y + \gamma_z$ *immer ein Jacobi'scher Multiplicator der Gleichung* $Xf = 0$. *Alsdann ist ferner die totale Differentialgleichung:*

$$dz - P(xyz)\,dx - Q(xyz)\,dy = 0$$

integrabel, und ihr Integral $u(xyz)$ *ist immer eine Lösung von* $Xf = 0$, *deren fehlende Lösung sodann durch Quadratur gefunden wird.*

Ist φ *nicht linear in* p *und* q, *so sind* P *und* Q *sowie* α, β, γ *im Allgemeinen mehrdeutige Functionen von* x, y, z, *und dann giebt die Formel:* $\alpha_x + \beta_y + \gamma_z$ *mehrere Multiplicatoren von* $Xf = 0$, *deren Integration in diesem Falle nur ausführbare Operationen verlangt.*

Ein besonderes Interesse bietet der Fall, wenn eine Relation von der Form:

$$\alpha p + \beta q - \gamma = \sigma(\xi p + \eta q - \zeta)$$

besteht; alsdann ist nämlich σ *ein Multiplicator und* $\alpha_x + \beta_y + \gamma_z : \sigma$ *eine Lösung von* $Xf = 0$.

In ganz analoger Weise liesse sich nun die Frage behandeln, wie sich die Integration einer Gleichung: $Xf = 0$ vereinfacht, wenn man von vorneherein ein *Curvenintegral*: $\int \psi(xyzy'z') \cdot dx$ kennt, das Xf gestattet.

Kapitel III.

Die grösstmögliche Verwerthung bekannter Integralinvarianten.

Im vorigen Kapitel behandelten wir die Frage, wie sich die Integration der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$0 = \xi(xyz)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(\ldots)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(\ldots)\frac{\partial f}{\partial z} \equiv Xf$$

vereinfacht, wenn eine Integralinvariante *erster* Ordnung der infinitesimalen Transformation Xf:

(1) $$\int \varphi(xyzpq)\,dx\,dy$$

zufälliger Weise von vorneherein bekannt ist. Es gelang uns, mehrere schöne Resultate abzuleiten, aus denen hervorging, dass man das Vorhandensein einer solchen Invariante immer

für die Integration der Gleichung $Xf = 0$ verwerthen kann. In gewissen speciellen Fällen war es überdies möglich zu beweisen, dass unsere Sätze den grösstmöglichen Vortheil aus dem betreffenden Umstande zu ziehen gestatteten. Aber in voller Allgemeinheit haben wir noch nicht genau festgestellt, welche Vereinfachungen sich aus dem Vorhandensein einer bekannten Integralinvariante (1) erster Ordnung ergeben.

Meine allgemeine Invariantentheorie gestattet nun nicht allein das soeben bezeichnete Problem, sondern überhaupt jedes derartige Problem definitiv zu erledigen.

Um die Sprache zu erleichtern, beschränken wir uns vorläufig auf das folgende Problem, das schon einen sehr allgemeinen Charakter besitzt.

Wie vereinfacht sich die Integration der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$0 = \xi_1(x_1 \dots x_n\, z_1 \dots z_m)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \xi_n(\dots)\frac{\partial f}{\partial x_n} + \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \dots + \zeta_m \frac{\partial f}{\partial z_m} \equiv Xf,$$

wenn eine Integralinvariante:

$$\int \varphi(x_1 \dots x_n\, z_1 \dots z_m \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial^s z_1}{\partial x_1^s} \dots)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$$

der infinitesimalen Transformation Xf von vorneherein bekannt ist?

Denken wir uns für einen Augenblick, dass wir die endlichen Gleichungen:

$$x_\varkappa' = \chi_\varkappa(x_1 \dots x_n\, z_1 \dots z_m\, c) \qquad (\varkappa = 1 \dots n)$$
$$z_i' = \psi_\varkappa(x_1 \dots x_n\, z_1 \dots z_m\, c) \qquad (i = 1 \dots m)$$

der eingliedrigen Gruppe Xf schon kennen, so wissen wir, wie sich φ und Xf bei Einführung der neuen Veränderlichen x', z' verhalten. Es bleibt ja Xf invariant, während φ mit einem Factor reproducirt wird, und es besteht dementsprechend die Gleichung:

$$(2) \quad \varphi(x_1' \dots z_1' \dots \frac{\partial z_1'}{\partial x_1'} \dots) = \varphi(x_1 \dots z_1 \dots \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \dots) : \sum^{\prime} \pm \left(\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\right) \dots \left(\frac{\partial x_n'}{\partial x_n}\right)$$

wo

$$\left(\frac{\partial x_i'}{\partial x_\varkappa}\right) = \frac{\partial x_i}{\partial x_\varkappa} + \sum_1^m{}_j \frac{\partial x_i}{\partial z_j}\frac{\partial z_j}{\partial x_\varkappa},$$

ferner

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum{}^i \xi_i(x'z')\frac{\partial f}{\partial x'_i}+\sum{}^j \zeta_j(x'z')\frac{\partial f}{\partial z'_j}\\ &\qquad\qquad =\sum{}^i \xi_i(xz)\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum{}^j \zeta_j(xz)\frac{\partial f}{\partial z_j}.\end{aligned}\right.$$

Wir werden zeigen, dass alles darauf beruht, ob die Transformationen der eingliedrigen Gruppe Xf die einzigen sind, die unsere Gleichungen (2) und (3) erfüllen oder nicht. Im ersten Falle können wir zeigen, dass die Integration der Gleichung Xf nicht einmal Quadraturen verlangt, sondern durch *ausführbare* Operationen geleistet werden kann.

Giebt es noch weitere Transformationen $x'_i = \chi_i(x, z)$, $z'_j = \psi_j(x, z)$, die unsere beiden Bedingungsgleichungen (2) und (3) erfüllen, so zeigt die Form dieser Bedingungsgleichungen, dass *alle diese Transformationen eine Gruppe bilden*, die unter Umständen gemischt sein kann, dann aber eine invariante *continuirliche* Untergruppe G enthält.

Rechnerisch gestaltet sich alles in der folgenden Weise.

Betrachtet man in den beiden Gleichungen:

$$(2)\quad \varphi\left(x'_1\cdots z'_1\cdots \frac{\partial z'_1}{\partial x'_1}\cdots\right)=\varphi\left(x_1\cdots z_1\cdots \frac{\partial z_1}{\partial x_1}\cdots\right):\sum\pm\left(\frac{\partial x'_1}{\partial x_1}\right)\cdots$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum \xi_i(x', z')\frac{\partial f}{\partial x'_i}+\sum \zeta_\varkappa(x', z')\frac{\partial f}{\partial z'_\varkappa}\\ &\qquad\qquad =\sum \xi_\varkappa(x, z)\frac{\partial f}{\partial x_\varkappa}+\sum \zeta_j(x, z)\frac{\partial f}{\partial z_j}\end{aligned}\right.$$

die Grössen x'_i und z'_j als unbekannte Functionen der x und z, und ertheilt man in der letzten Gleichung der Grösse f nach und nach die Werthe $x'_1 \ldots x'_n\, z'_1 \ldots z'_m$, so erhält man eine Reihe *partielle Differentialgleichungen, die alle x' und z' als Functionen der x und z bestimmen. Diese Differentialgleichungen liefern geradezu, was ich die Definitionsgleichungen der endlichen Transformationen der gesuchten Gruppe G* zu nennen pflege.

Hier geht nun das allgemeinste Lösungssystem $\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n\, \mathfrak{z}_1 \cdots \mathfrak{z}_m$ aus einem speciellen Lösungssystem $x'_1 \ldots x'_n\, z'_1 \ldots z'_m$ durch Gleichungen hervor:

$$\mathfrak{x}_i = F(x'_1 \ldots x'_n\, z'_1 \ldots z'_m)$$
$$\mathfrak{z}_\varkappa = \Phi(x'_1 \ldots x'_n\, z'_1 \ldots z'_m),$$

die eine Gruppe und zwar die Gruppe G bilden.

Daher lassen sich unsere Differentialgleichungen auf *die Form*

$$L_\varkappa(x_1' \dots x_n' z_1' \dots z_m' \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} \dots \frac{\partial z_1'}{\partial z_1} \dots) = B_\varkappa(x z)$$

bringen, wo die $L_\varkappa$ Differentialinvarianten der Gruppe G bezeichnen und überdies ein volles System von Differentialinvarianten bilden.

Die Integration der Gleichungen $L_\varkappa = B_\varkappa$ wird aber in bekannter Weise von der Gruppe G beherrscht.

Sind die endlichen Transformationen der Gruppe Xf die einzigen Transformationen, die unsere Forderungen erfüllen, anders ausgesprochen: umfasst die Gruppe G keine anderen Transformationen als die endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppe Xf, so finden sich unter den Differentialinvarianten $L_\varkappa$ insbesondere $m + n - 1$ von nullter Ordnung:

$$L_\varkappa(x_1' \dots x_n' z_1' \dots z_m'), \qquad \varkappa = 1 \dots m + n - 1,$$

nämlich die Lösungen der Gleichung:

$$0 = \Sigma \xi_i(x_1' \dots x_n' z_1' \dots z_m') \frac{\partial f}{\partial x_i'} + \Sigma \zeta_\varkappa(x' z') \frac{\partial f}{\partial z_\varkappa'} = 0.$$

Aus den Gleichungen $L_\varkappa = B_\varkappa$ leitet man daher (durch Elimination aller Ableitungen der x' und z' nach den x und z) $m + n - 1$ Gleichungen zwischen $x_1 \dots x_n z_1 \dots z_m$ und $x_1' \dots x_n' z_1' \dots z_m'$ her:

$$\Omega_\varkappa(x, z, x', z') = 0.$$

Diese Gleichungen bestimmen direct alle Bahncurven der infinitesimalen Transformation Xf, indem sie alle ∞^1 Lagen x', z' liefern, die zu einer beliebigen Anfangslage xz gehören.

Setzen wir sodann voraus, dass die Gruppe G nur *zwei* infinitesimale Transformationen enthält, nämlich Xf und Yf. Dann bilden die Gleichungen:

$$X'f = 0, \quad Y'f = 0$$

ein vollständiges System mit $m + n - 2$ oder gar $m + n - 1$ Lösungen:

$$L_\varkappa(x', z'),$$

die als Differentialinvarianten nullter Ordnung der Gruppe G zu betrachten sind. Unter den Gleichungen $L_\varkappa = B_\varkappa$ finden sich

daher sicher alle von der Form:

$$L_\varkappa(x', z') = L_\varkappa(x, z).$$

Diese Gleichungen oder ein damit äquivalentes Gleichungssystem:

$$W_i(x\ z\ x'\ z') = 0$$

finden wir, indem wir aus den Gleichungen $L_\varkappa = B_\varkappa$ alle Ableitungen der x' und z' nach den x und z durch Elimination wegschaffen. Ertheilt man in dem hiermit gefundenen Gleichungssystem: $W_i = 0$ den x und z feste Werthe, so erhalten wir im Raume $x'z'$ im Allgemeinen ein zweidimensionales Gebiet, das ∞^1 Bahncurven von Xf enthält. Diese Bahncurven findet man sodann durch Quadratur.

Unter allen Umständen findet man die endlichen Gleichungen der Gruppe G durch Integration von Hülfsgleichungen, deren Anzahl und Beschaffenheit in der von mir längst angegebenen Weise durch die Gruppe G bestimmt ist. Nachdem hiermit die endlichen Gleichungen der Gruppe G gefunden sind, bestimmt man insbesondere die endlichen Gleichungen der Untergruppe Vf, gleichzeitig also die Bahncurven von Xf. Hierzu ist es, *wenn die Gruppe nur eine begrenzte Anzahl Parameter enthält, nur nothwendig, gewisse Quadraturen auszuführen.* Dies folgt unmittelbar aus meinem allgemeinen Satze, dass man, sobald die endlichen Gleichungen irgend einer continuirlichen endlichen Gruppe gefunden sind, immer die endlichen Gleichungen jeder Untergruppe, insbesondere auch die Bahncurven jeder infinitesimalen Transformation der Gruppe, durch Ausführung gewisser Quadraturen finden kann.

Setzen wir jetzt voraus, dass die Gruppe G unendlich ist, und dass wir schon ihre endlichen Gleichungen durch Integration der erforderlichen Hülfsgleichungen gefunden haben. Wir werden zeigen, dass dann die Bestimmung der Bahncurven von Xf nur gewisse Quadraturen verlangt

Ist die Gruppe G intransitiv, so findet man die Invarianten nullter Ordnung dieser Gruppe durch Elimination.

Wir können ferner ohne Integration alle endlichen Transformationen des Raumes x, z finden, die mit allen Transformationen der Gruppe G vertauschbar sind. Diese neuen Transformationen bilden ihrerseits eine Gruppe Γ, die Xf umfasst.

Da die Gruppe G unendlich und transitiv ist, so muss die Gruppe Γ intransitiv sein. *Ihre Invarianten nullter Ordnung, die eo ipso Lösungen von $Xf = 0$ darstellen, werden ohne Integration gefunden.*

Wir kennen nun alle Invarianten nullter Ordnung der Gruppe G und ebenfalls alle Invarianten nullter Ordnung der Gruppe Γ. *Daher findet man ohne Integration alle Invarianten derjenigen Gruppe g, die aus den gemeinsamen Transformationen der Gruppen G und Γ besteht.* Gleichzeitig findet man die endlichen Gleichungen der Gruppe g, deren Transformationen paarweise mit einander, also auch mit Xf vertauschbar sind. Sodann *findet man die noch fehlenden Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung $Xf = 0$ durch gewisse Quadraturen, die von einander unabhängig sind.*

Alles beruht somit auf der Bestimmung der endlichen Gleichungen der Gruppe G. Sind die Transformationen dieser Gruppe gefunden, so verlangt die Integration von $Xf = 0$ jedenfalls nur gewisse Quadraturen.

Wir behalten uns vor, die hier in knapper Form skizzirte Erledigung des gestellten Problems gelegentlich ausführlicher darzustellen und gleichzeitig durch Beispiele zu illustriren.

Es ist leicht zu sehen, dass die hier entwickelten allgemeinen Theorien sich ohne Weiteres nach mehreren Richtungen verallgemeinern lassen.

Man kann z. B. annehmen, dass gewisse infinitesimale Transformationen $X_1 f$, $X_2 f$, ... $X_q f$ vorliegen, die ein vollständiges System:

$$X_1 f = 0, \quad X_2 f = 0, \quad \ldots \quad X_q f = 0$$

bestimmen, und dass man gewisse gemeinsame Integralinvarianten:

$$\int \varphi_1 d\omega_1, \quad \int \varphi_2 d\omega_2, \quad \ldots \quad \int \varphi_\nu d\omega_\nu$$

aller Xf von vorneherein kennt. Man kann fragen, welche Vereinfachungen in der Integration des vollständigen Systems sich aus diesem Umstande ergeben.

Oder man kann annehmen, dass ein vollständiges System $X_1 f = 0, \ldots X_q f = 0$ zur Integration vorliegt, und dass gewisse gemeinsame Integralinvarianten und zugleich gewisse gemeinsame Differentialinvarianten aller $X_\varkappa f$ von vorneherein bekannt sind. In jedem einzelnen Falle gestattet meine allgemeine In-

variantentheorie genau zu entscheiden, wie sich die vorliegenden Umstände für die Integration des vollständigen Systems verwerthen lassen.

Man kann endlich annehmen, dass es sich darum handelt, ein gewisses vollständiges System: $X_1 f = 0, \ldots X_q f = 0$ mit gewissen bekannten infinitesimalen Transformationen $Y_1 f$, $Y_2 f \ldots$ und gewissen bekannten Integral- und Differentialinvarianten, sowie gewissen invarianten Systemen von Differentialgleichungen zu integriren. Meine Invariantentheorie erledigt jedes derartige Problem in definitiver Weise. Mit verschiedenen speciellen Problemen von dieser Beschaffenheit habe ich mich schon längst eingehend beschäftigt. Hierher gehört z. B. meine Integrationstheorie einer Gleichung $Af = 0$ mit einem bekannten Multiplicator und bekannten infinitesimalen (oder endlichen) Transformationen.

Wir unterlassen nicht, ausdrücklich darauf hinzuweisen, dass die vorangehenden Entwickelungen implicite ein interessantes Problem erledigen, nämlich die Bestimmung aller Transformationen, bei denen ein vorgelegtes Integral oder mehrere derartige Integrale bezüglich Differentialausdrücke oder Gleichungen invariant bleiben.

Wünscht man z. B. alle Transformationen des Raumes xyz zu finden, bei denen ein Flächenintegral erster Ordnung

$$\int \varphi(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$$

invariant bleibt, so bildet man die Gleichung:

$$\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = \frac{\varphi(x, y, z, p, q)}{\sum \pm \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}\right)} .$$

Ersetzt man hier die Grössen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ durch ihre Werthe als Functionen von

$$p,\ q,\ \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x},\ \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y},\ \ldots\ \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z},$$

so erhält man die Definitionsgleichungen der allgemeinsten Gruppe G, deren Transformationen das vorgelegte Integral invariant lassen.

Im Allgemeinen ist es vortheilhaft, zunächst die *infinitesimalen* Transformationen der Gruppe G zu suchen. Zu diesem

Zwecke bildet man die Gleichung

$$X'\varphi + (\xi_x + \eta_y + p\xi_z + q\eta_z)\varphi = 0$$

und verlangt, dass sie in p und q identisch bestehen soll[1]).

Kapitel IV.

Integralinvarianten der Berührungs-Transformationsgruppen.

In diesem Kapitel dehnen wir den Begriff Integralinvariante auf Berührungs-Transformationsgruppen aus. Um die Sprache und die Formeln zu vereinfachen, beschränken wir uns auf Transformationen in x, y, z, p, q. Die Ausdehnung auf n Dimensionen, wie die Beschränkung auf verkürzte Berührungs-Transformationen (d. h. auf Transformationen in $x_1 \ldots x_n p_1 \ldots p_n$) bieten keine Schwierigkeiten.

Wir bezeichnen die infinitesimalen Transformationen einer vorgelegten Berührungs-Transformationsgruppe des Raumes x, y, z mit dem Symbol:

$$[Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z} = Xf$$

und ein invariantes Flächenintegral *zweiter* Ordnung dieser Gruppe sei:

$$\int \Omega(x, y, z, p, q, r, s, t) \cdot \begin{vmatrix} x' & y' \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} du\, dv,$$

wo die Parameter u, v nicht transformirt werden, während x', x_1, y', y_1 wie früher die partiellen Ableitungen von x und y noch u und v bezeichnen.

Setzen wir nun

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \Delta,$$

so kommt

$$X(\Delta) = \begin{vmatrix} (W_p)' & (W_q)' \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x' & y' \\ (W_p)_1 & (W_q)_1 \end{vmatrix}$$

---

[1]) Herr CARDA, der meine Theorien bei mir in Leipzig studirt hat, bestimmte neuerdings alle Punkttransformationen des Raumes x, y, z, bei denen das Integral $\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$ der Flächenräume invariant bleibt. Die obenstehende Theorie giebt eine einfachere Erledigung dieses Problems.

und bei Benutzung der Symbole

$$\Phi_x + \Phi_z p + \Phi_p r + \Phi_q s = A\Phi$$
$$\Phi_y + \Phi_z p + \Phi_p s + \Phi_q t = B\Phi$$

ergiebt sich

$$X(\Delta) = \{A(W_p) + B(W_q)\}\Delta ,$$

und dementsprechend wird $\overline{\Omega}$ durch die Gleichungen bestimmt

$$X(\overline{\Omega}) + (AW_p + BW_q)\overline{\Omega} = 0 .$$

Bei unserer infinitesimalen Transformation Xf erhalten r, s, t Incremente

$$\delta r = \varrho\delta\omega , \quad \delta s = \sigma\delta\omega , \quad \delta t = \tau\delta\omega ,$$

die in bekannter Weise gefunden werden.

Wir bilden die infinitesimale Transformation:

$$Wf) - Wf_z + \varrho f_r + \sigma f_s + \tau f_t - \{AW_p + BW_q\}\Omega\frac{\partial f}{\partial\Omega} = Uf$$

und bemerken, dass diese Transformation in den Veränderlichen x, y, z, p, q, r, s, t und Ω nicht allein die beiden Gleichungssysteme

$$dz - pdx - qdy = 0$$

und

$$dr - pdx - qdy = 0,\ dp - rdx - sdy = 0,\ dq - sdx - tdy = 0,$$

sondern zugleich die Gleichung

$$\Omega - \overline{\Omega}(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t) = 0$$

invariant lassen.

Sind daher $U_1 f$ und $U_2 f$ zwei derartige Transformationen mit den charakteristischen Functionen W_1 und W_2, so lässt auch die Transformation

$$U_1(U_2(f)) - U_2(U_1(f))$$

jedes einzelne unter den drei obenstehenden Gleichungssystemen invariant, und es besitzt daher diese Transformation $U_1(U_2(f)) - U_2(U_1(f))$ eine ganz ähnliche Form wie $U_1 f$ und $U_2 f$; ihre charakteristische Function ist nach meinen Regeln die Grösse:

$$(W_1 W_2) - W_1\frac{\partial W_2}{\partial z} + W_2\frac{\partial W_1}{\partial z} .$$

In dieser Weise erkennen wir, dass alle Uf, die zu der vorgelegten Berührungs-Transformationsgruppe gehören, eine

erweiterte Gruppe in den Veränderlichen x, y, z, p, ... Ω bilden.

Hat diese erweiterte Gruppe Lösungen Φ, die nicht sämmtlich von Ω frei sind, und findet man durch Auflösung einer Gleichung

$$\Phi(x \ldots \Omega) = a = \text{Const.}$$

für Ω den Werth

$$\Omega = \overline{\Omega}(x, y, z, p, q, r, s, t),$$

so ist

$$\int \overline{\Omega}\, dx\, dy$$

ein invariantes Flächenintegral zweiter Ordnung unserer Berührungs-Transformationsgruppe.

In ganz analoger Weise bestimmt man alle invarianten Flächenintegrale von dritter und höherer Ordnung. Man übersieht ohne Weiteres, wie sich die in den früheren Kapiteln I und III aufgestellten allgemeinen Theoreme auf Berührungs-Transformationsgruppen ausdehnen.

Ein besonderes Interesse bietet die Anwendung dieser Theorien auf partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, auf kanonische Systeme u. s. w.

Paul Stäckel in Kiel, *Anwendungen von Lie's Theorie der Transformationsgruppen auf die Differentialgleichungen der Dynamik.*

Einleitung.

In dieser Mittheilung erlaube ich mir der Königlichen Gesellschaft die Ergebnisse von Untersuchungen mitzutheilen, die sich aufs engste anschliessen an meine Note vom 8. Mai 1893: *Ueber dynamische Probleme, deren Differentialgleichungen eine infinitesimale Transformation gestatten*, und zwar wird es sich darum handeln, die dort gestellte Aufgabe nach zwei sogleich genauer zu kennzeichnenden Richtungen hin zu verallgemeinern.

Unter einem *dynamischen Problem* will ich ein Problem der Mechanik vorstehen, bei dem der Ausdruck der lebendigen Kraft die Form hat:

$$1)\quad T = \frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}(p_1, \ldots, p_n)\frac{dp_\lambda}{dt}\frac{dp_\mu}{dt} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n),$$

wo $a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}$ sein und die Determinante

$$2)\quad |\, a_{\lambda\mu} \,| = a \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n)$$

nicht identisch verschwinden soll, und für das eine Kräftefunction

$$U(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

existirt, die sich nicht auf eine Constante reducirt; ein solches Problem soll im Folgenden kurz durch das Symbol

$$[ds \mid U]$$

bezeichnet werden. Reducirt sich aber U auf eine Constante, so werde ich von einem *geodätischen Problem* sprechen und dafür kurz

$$[ds]$$

schreiben.

Die ∞^{2n-1} *Bahncurven* eines dynamischen Problems ordnen sich zu ∞^1 *natürlichen Familien* von je ∞^{2n-2} Bahncurven, deren jede durch einen Werth der Constanten h in der Gleichung der lebendigen Kraft:

$$\frac{1}{2}\sum a_{\lambda\mu}\frac{dp_\lambda}{dt}\frac{dp_\mu}{dt} = U + h \tag{3}$$

charakterisirt ist, und das Princip der kleinsten Action zeigt, wie wohl zuerst LIPSCHITZ bemerkt hat[1]), dass die Bahncurven der natürlichen Familie (h) als die geodätischen Curven des Linienelementes

$$ds_h = \sqrt{U + h}\cdot ds \tag{4}$$

angesehen werden können. Mithin lassen sich alle Sätze über die geodätischen Linien n-fach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten unmittelbar auf die natürlichen Familien von Bahncurven übertragen. Im Besonderen gilt das von den infinitesimalen Transformationen dieser Linien, und es gewinnen so die schönen Untersuchungen, die SOPHUS LIE über diesen Gegenstand angestellt hat[2]), eine Bedeutung auch für die dynamischen Probleme. Zwar beschäftigt sich LIE mit dem Falle $n=2$, aber eine Anmerkung[3]) zeigt, dass er bereits die Erweiterung auf n Dimensionen ins Auge gefasst hatte und im Besitze eines fundamentalen Satzes über die Linienelemente ds war, deren geodätische Linien eine *conforme* infinitesimale Transformation gestatten. Nach diesem Satze ändern sich bei einer solchen Transformation alle Bogenlängen in *constantem* Verhältnisse, und hieraus folgt sofort, dass ds^2 auf die Form

$$ds^2 = e^{\omega p_1}\cdot\sum_{\lambda,\mu} b_{\lambda\mu}(p_2, p_3, \ldots, p_n)\,dp_\lambda\,dp_\mu \tag{5}$$

gebracht werden kann, wo ω eine Constante bedeutet[4]).

---

1) *Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist.* Journal für Mathematik, Bd. 74, S. 119—120, 1872. Man vergleiche dazu DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, T. II. Paris 1889, S. 500.

2) *Classification der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Linien*, Universitätsprogramm, Christiania 1879 und *Untersuchungen über geodätische Curven*, Mathematische Annalen, Bd. 20, 1882, S. 357—454.

3) Math. Annalen, Bd. 20, S. 374.

4) Mir war diese Anmerkung zuerst entgangen, und so ist es gekommen, dass ich den Ausdruck (5) für ds^2 in der Note: *Sur des problèmes de Dynamique dont les equations differentielles admettent une transformation*

Von besonderem Interesse ist der Fall, dass die sämmtlichen ∞^1 natürlichen Familien von Bahncurven eine und dieselbe infinitesimale Transformation gestatten. Gerade diesen Fall habe ich in der bereits erwähnten Note vom 8. Mai 1893 untersucht und bin zu folgendem Theoreme gelangt:

Soll jede der ∞^1 natürlichen Familien von Bahncurven eines dynamischen Problems dieselbe infinitesimale Transformation gestatten, so ist nothwendig und hinreichend, dass:

I. jedes Niveaufeld, d. h. jede $(n-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit $U = const.$, durch die infinitesimale Transformation in sich übergeführt wird;

II. die infinitesimale Transformation für das Linienelement ds conform ist;

III. bei dieser conformen infinitesimalen Transformation auch die Familie der ∞^{2n-2} geodätischen Linien von ds invariant bleibt[1]).

Dass die Bedingung III nothwendig ist, ergiebt sich unmittelbar aus der Bemerkung, dass die ∞^{2n-2} geodätischen Linien von ds stets eine der ∞^1 natürlichen Familien von Bahncurven bilden, nämlich die zu dem Werthe $h = \infty$ gehörende Familie[2]).

Der Umstand, dass man ∞^1 natürliche Familien hat, führt nun zu folgender Verallgemeinerung der Fragestellung: *Wann*

infinitésimale, C. R. t. 119. 17. Sept. 1894. S. 508, als neu mitgetheilt habe, während er, wie ich ausdrücklich hervorheben möchte, eine unmittelbare Folge jenes Satzes von LIE ist.

1) Verwandte Untersuchungen hat für $n = 2$ und $n = 3$ O. STAUDE angestellt: *Ueber die Bahncurven eines auf einer Oberfläche beweglichen Punktes, welche infinitesimale Transformationen zulassen*, diese Berichte, 17. Oct. 1892, S. 429—446 und *Ueber die Bahncurven eines in einem Raume von drei Dimensionen beweglichen Punktes, welche infinitesimale Transformationen zulassen*, diese Berichte, 31. Juli 1893. S. 511—522.

Für den allgemeinen Fall beachte man noch meine Note in den C. R. vom 17. Sept. 1894, sowie KNESER's Abhandlung: *Das Princip der kleinsten Action und die infinitesimale Transformation der dynamischen Probleme*, Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft, 17. Nov. 1894, Bd. X, S. 501—514.

2) Man vergleiche hierzu: G. DARBOUX, *Remarque sur une Communication de M. E. Goursat*, C. R. t. 108, 4. März 1889, S. 449—450, R. LIOUVILLE, *Sur un problème d'Analyse qui se rattache aux équations de la Dynamique*, C. R. t. 115, 12. Sept. 1892, S. 403—406 und P. PAINLEVÉ, *Mémoire sur les transformations des équations de la Dynamique*, Journal de Mathématiques, série 4, t. X. 1894. S. 24.

hat eine von h unabhängige infinitesimale Transformation zwar nicht die Eigenschaft, jede einzelne natürliche Familie invariant zu lassen, wohl aber diese Familien unter einander zu vertauschen? Dieses allgemeinere Problem hat PAINLEVÉ in einer Note vom 3. Januar 1893 behandelt[1]), also bereits *vor* der Veröffentlichung meiner Untersuchungen über das besondere Problem, Untersuchungen, deren Beginn übrigens in das Jahr 1886 fällt.

PAINLEVÉ, dessen Priorität ich gern anerkenne, war durch Betrachtungen ganz andrer Art auf jene Fragestellung geführt worden, nämlich durch seine ausgezeichneten Untersuchungen über die Transformation der Differentialgleichungen der Bahncurven dynamischer Probleme (C. R. 1892), und er hatte bereits in einer Note vom 16. Mai 1892[2]) auf die Frage hingewiesen, wann die ∞^{2n-1} Bahncurven eines dynamischen Problems eine continuirliche Gruppe von Transformationen gestatten. Bald darauf *skizzirte* PAINLEVÉ in der schon erwähnten Note vom 3. Januar 1893 eine allgemeine Theorie der infinitesimalen Transformationen dynamischer Bahncurven, auf die zurückzukommen im Folgenden Veranlassung sein wird. Angeregt durch meine Noten vom 8. Mai 1893 und 17. Sept. 1894 hat PAINLEVÉ dann die Ergebnisse seiner Untersuchungen über das Problem der Vertauschung der natürlichen Familien bei einer infinitesimalen Transformation in einer Note vom 15. October 1894 ausführlich dargestellt; die von ihm damals in Aussicht gestellte Veröffentlichung der Beweise für diese Sätze ist jedoch meines Wissens bis jetzt noch nicht erfolgt.

Unter diesen Umständen halte ich es nicht für überflüssig, wenn ich in dem *ersten Abschnitte* der folgenden Mittheilung zeige, dass die in meiner Note vom 8. Mai 1893 entwickelten Formeln für die infinitesimalen Transformationen dynamischer Bahncurven auch zur Erledigung des allgemeineren Problems der Vertauschung der natürlichen Familien bei einer infinitesimalen Transformation vollständig ausreichen, und hierin besteht die erste der angekündigten Verallgemeinerungen.

Aber die Kraft jener Formeln reicht noch weiter. Sie erlauben auch das Problem in Angriff zu nehmen, wann eine

---

1) *Sur les mouvements des systèmes dont des trajectoires admettent une transformation infinitésimale*, C. R. t. 116. S. 21—24.

2) *Sur les transformations en Mécanique*, C. R. t. 114. S. 1104—1107.

mehrgliedrige continuirliche Gruppe von Transformationen die Gesammtheit der ∞^1 natürlichen Familien invariant lässt, und das ist um so wichtiger, als nach PAINLEVÉ in der Ermittelung der dynamischen Probleme mit *mehrgliedrigen* Gruppen »die wahre Schwierigkeit« zu suchen ist. Jene Formeln, bei denen weder die Form der infinitesimalen Transformation noch die Form des Linienelementes ds specialisirt ist, besitzen also eine über den Fall *einer* infinitesimalen Transformation weit hinausgehende Bedeutung, *und gerade darin besteht ihr wesentlicher Werth.*

Für die besondere Annahme, dass die mehrgliedrige Gruppe jede einzelne der ∞^1 natürlichen Familien invariant lässt, habe ich bereits in einer Note vom 29. October 1894 [1]) einige Sätze veröffentlicht, deren Beweis den Anfang des *zweiten Abschnittes* dieser Mittheilung bildet. Darauf wende ich mich zu der Aufgabe, alle dynamischen Probleme zu bestimmen, bei denen *eine zweigliedrige Gruppe von Transformationen eine Vertauschung der ∞^1 natürlichen Familien bewirkt*, und es gelingt mir, auch diese Aufgabe vollständig zu lösen und die existirenden Typen von dynamischen Problemen auf vier verhältnissmässig einfache Normalformen zu reduciren.

Erster Abschnitt.

Ueber dynamische Probleme, bei denen die natürlichen Familien der Bahncurven durch eine eingliedrige Gruppe von Transformationen vertauscht werden.

1.

Soll durch ein und dieselbe infinitesimale Transformation

$$(6) \qquad Pf = \sum_{\nu}{}' \xi_\nu(p_1, p_2, \ldots, p_n) \frac{\partial f}{\partial p_\nu}$$

jede natürliche Familie (h) in eine natürliche Familie $(h + \eta(h)\delta\tau)$ übergeführt werden, so ist nothwendig und hinreichend, dass ein System von $\frac{1}{2}(n-1)n(n+2)$ Bedingungsgleichungen identisch erfüllt ist, das man vermöge des in meiner Note vom 8. Mai 1893 angegebenen Verfahrens folgendermaassen erhält.

---

1) *Sur des problèmes de Dynamique dont les équations différentielles admettent un groupe continue.* C. R. t. 119. S. 723—725.

Man bilde

$$U_\varkappa = \sum_\nu^n \frac{\partial U}{\partial p_\nu} a'_{\varkappa\nu}, \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda\mu \\ \varkappa \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ \varkappa \end{Bmatrix}_a - \tfrac{1}{2} a_{\lambda\mu} \frac{U_\varkappa}{U+h} \tag{8}$$

und

$$\Xi(\lambda, \mu; \varkappa)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &= \frac{\partial^2 \xi_\varkappa}{\partial p_\lambda \partial p_\mu} + \sum_\nu^n \left[\begin{pmatrix} \lambda\nu \\ \varkappa \end{pmatrix} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\mu} + \begin{pmatrix} \mu\nu \\ \varkappa \end{pmatrix} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\lambda} - \begin{pmatrix} \lambda\mu \\ \nu \end{pmatrix} \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial p_\nu} \right] \\ &\quad + \sum_\nu^n \frac{\partial}{\partial p_\nu} \begin{pmatrix} \lambda\mu \\ \varkappa \end{pmatrix} \cdot \xi_\nu + \frac{\partial}{\partial h} \begin{pmatrix} \lambda\mu \\ \varkappa \end{pmatrix} \cdot \eta(h). \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Alsdann lassen sich mit Benutzung des Zeichens

$$\varepsilon_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} 1 & \varkappa = \lambda \\ 0 & \lambda \neq \varkappa \end{cases} \tag{10}$$

jene Bedingungsgleichungen in der Form darstellen:

$$2\,\Xi(\lambda, \mu; \varkappa) = (\varepsilon_{\varkappa\lambda} + \varepsilon_{\varkappa\mu})\,\Xi(\mu, \mu; \mu), \tag{11}$$

und hierin dürfen $\varkappa$, λ, μ alle Werthe der Reihe $1, 2, \ldots, n$ durchlaufen.

Die Anzahl der wesentlich verschiedenen Gleichungen, die sich auf diese Art ergeben, ist

$$\tfrac{1}{2}(n-1)\,n(n+2) = \tfrac{1}{2}n^2(n+1) - n.$$

Zunächst ist nämlich identisch

$$\Xi(\lambda, \mu; \varkappa) = \Xi(\mu, \lambda; \varkappa).$$

Sind ferner λ und $\mu \neq \varkappa$, so erhält man aus (11):

$$\Xi(\lambda, \mu; \varkappa) = 0 \qquad (\lambda, \mu \neq \varkappa), \tag{A}$$

und es giebt augenscheinlich $\frac{1}{2}n^2(n-1)$ Gleichungen dieser Art. Ist aber einer der Indices λ und μ gleich $\varkappa$, so haben die $n-1$ Ausdrücke

$$\Xi(\varkappa, \mu; \varkappa) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \mu-1, \mu+1, \ldots, n$$

alle denselben Werth, nämlich den Werth

$$\tfrac{1}{2}\Xi(\mu, \mu; \mu).$$

Man erhält daher ausser der Gleichung (A) nur noch die $n(n-1)$ Gleichungen:

$$(B) \qquad \Xi(\varkappa, \mu;\ \varkappa) = \tfrac{1}{2}\Xi(\mu, \mu;\ \mu) \qquad (\mu \neq \varkappa),$$

sodass sich im Ganzen genau $\frac{1}{2}(n-1)n(n+2)$ Gleichungen ergeben.

Ist im Besonderen $n = 2$, so ergeben sich die vier Gleichungen:

$$(A') \qquad \Xi(1, 1;\ 2) = 0, \qquad \Xi(2, 2;\ 1) = 0;$$

$$(B') \quad \Xi(1, 2;\ 1) = \tfrac{1}{2}\Xi(2, 2;\ 2), \quad \Xi(1, 2;\ 2) = \tfrac{1}{2}\Xi(1, 1;\ 1);$$

ist $n = 3$, so steigt die Anzahl der Bedingungsgleichungen bereits auf 15.

2.

Handelt es sich bloss um *eine* infinitesimale Transformation Pf, so darf man zwar unbeschadet der Allgemeinheit voraussetzen, dass

$$Pf = \frac{\partial f}{\partial p_1}$$

ist, und erzielt dadurch eine erhebliche Vereinfachung der Ausdrücke $\Xi(\lambda, \mu;\ \varkappa)$. Absichtlich lege ich jedoch der folgenden Untersuchung zunächst ein beliebiges

$$Pf = \sum_{\nu} \xi_\nu \frac{\partial f}{\partial p_\nu}$$

zu Grunde, wie ich das auch in meiner Note vom 8. Mai 1893 gethan habe, denn es ergeben sich *erstens* die charakteristischen Eigenschaften der gesuchten dynamischen Probleme auf diesem Wege mit genau demselben Aufwande von Rechnung, als wenn man eine specialisirte Form von Pf benutzt, und *zweitens* man hat den Vortheil, den für die Betrachtung der Probleme mit *mehrgliedrigen* Gruppen unentbehrlichen Formelapparat schon jetzt bereit zu stellen. Erst wenn es sich darum handelt, *Normalformen* für die gefundenen dynamischen Probleme aufzustellen, erst dann ist es zweckmässig die specialisirte Form von Pf einzuführen[1]).

1) Erst nach langen und mühsamen Rechnungen ist es mir gelungen, die allgemeinen Bedingungsgleichungen auf die elegante Form (11) zu bringen, die, was hervorzuheben ich Veranlassung habe, mein ausschliessliches Eigenthum ist.

Die Gleichungen (A) lauten explicite:

$$0 = \frac{\partial^2 \xi_\varkappa}{\partial p_\lambda \partial p_\mu} + \sum_\nu \left[\begin{Bmatrix} \lambda\ \nu \\ \varkappa \end{Bmatrix}_a \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\mu} + \begin{Bmatrix} \mu\ \nu \\ \varkappa \end{Bmatrix}_a \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\lambda} - \begin{Bmatrix} \lambda\ \mu \\ \nu \end{Bmatrix}_a \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial p_\nu} + \frac{\partial}{\partial p_\nu} \begin{Bmatrix} \lambda\ \mu \\ \varkappa \end{Bmatrix}_a \cdot \xi_\nu \right]$$

$$- \tfrac{1}{2} \sum_\nu \left[a_{\lambda\nu} U_\varkappa \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\mu} + a_{\mu\nu} U_\varkappa \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\lambda} - a_{\lambda\mu} U_\nu \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial p_\nu} + \frac{\partial}{\partial p_\nu} (a_{\lambda\mu} U_\varkappa) \cdot \xi_\nu \right] (U+h)$$

$$+ \tfrac{1}{2} a_{\lambda\mu} U_\varkappa \left[\sum_\nu \xi_\nu \frac{\partial U}{\partial p_\nu} + \eta(h) \right] (U+h)^{-2}.$$

Nun können nicht alle n Ausdrücke $U_1, U_2, \ldots U_n$ identisch verschwinden, denn es ist

$$\sum_\mu U_\mu a_{\mu\varkappa} = \frac{\partial U}{\partial p_\varkappa},$$

und U sollte sich nicht auf eine Constante reduciren. Man kann daher den Index $\varkappa$ so wählen, dass $U_\varkappa \neq 0$ ist. Ferner giebt es stets Indices λ, μ, die von $\varkappa$ verschieden sind und für die $a_{\lambda\mu} \neq 0$ ausfällt, denn sonst wäre $a = 0$. Mithin lässt sich

$$\sum_\nu \xi_\nu \frac{\partial U}{\partial p_\nu} + \eta(h)$$

aus mindestens einer der Gleichungen (A) berechnen und wird gleich einer ganzen rationalen Function zweiten Grades von $U+h$. Da aber U und die Coefficienten $a_{\varkappa\lambda}$ ebenso wie $\xi_1, \ldots, \xi_n$ von h unabhängig sind, so folgt hieraus, dass nothwendig

$$\eta(h) = \alpha + 2\beta h + \gamma h^2 \tag{12}$$

ist, wo α, β, γ Constanten bedeuten.

Geht man von der infinitesimalen Transformation zu der eingliedrigen Gruppe über, so ergiebt sich sofort:

$$\bar{h} = \frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b} h}{\mathfrak{c} + \mathfrak{d} h}, \tag{13}$$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ Functionen von τ sind, d. h. *die Gruppe ist projectiv*. Im Allgemeinen giebt es daher zwei natürliche Familien, die bei der Transformation Pf in sich übergehen; es kann sich jedoch auch ereignen, dass die beiden Familien in eine zusammenfallen oder dass eine jede natürliche Familie erhalten bleibt.

Bei der genaueren Untersuchung der eingliedrigen projectiven Gruppe (13) hat man fünf wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden [1]):

I. $$\alpha = \beta = \gamma = 0\,; \quad \overline{h} = h\,.$$

Jede natürliche Familie bleibt erhalten, vermöge Pf vertauschen sich nur die Bahncurven innerhalb der einzelnen Familien.

II. $$\alpha \neq 0\,, \quad \beta = \gamma = 0\,; \quad h = h + \alpha\tau\,.$$

Alle Familien mit endlichem h vertauschen sich, erhalten bleibt nur die Familie der geodätischen Linien $h = \infty$.

III. $$\beta \neq 0\,, \quad \gamma = 0\,; \quad \overline{h} + \frac{\alpha}{2\beta} = e^{2\beta\tau}\left(h + \frac{\alpha}{2\beta}\right).$$

Die beiden Familien $h = -\frac{\alpha}{2\beta}$ und $h = \infty$ bleiben erhalten.

IV. $$\gamma \neq 0\,, \quad \beta^2 - \alpha\gamma = 0\,, \quad \overline{h} + \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} = \frac{h + \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}}{1 - \gamma\tau\left(h + \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\right)}\,.$$

Invariant ist jetzt nur die eine Familie $h = -\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$, während die geodätischen Linien in die Familie $h = \frac{1}{\gamma\tau} - \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ übergehen.

V. $$\gamma \neq 0\,, \quad \beta^2 - \alpha\gamma = \delta^2 \neq 0\,, \quad \frac{\overline{h} + \frac{\beta - \delta}{\gamma}}{\overline{h} + \frac{\beta + \delta}{\gamma}} : \frac{h + \frac{\beta - \delta}{\gamma}}{h + \frac{\beta + \delta}{\gamma}} = e^{2\delta\tau}.$$

Hier bleiben die beiden Familien $h = -\frac{\beta - \delta}{\gamma}$ und $h = -\frac{\beta + \delta}{\gamma}$ erhalten.

3.

Setzt man in (A):

$$\eta(h) = \alpha + 2\beta h + \gamma h^2$$

ein und ordnet nach Potenzen von $U + h$, so kommt:

---

1) Man vergleiche hierzu LIE, Göttinger Nachrichten, 1874, Nr. 22 und Math. Annalen, Bd. 16, S. 441—455, 460—464.

$$0 = \frac{\partial^2 \xi_\varkappa}{\partial p_\lambda \partial p_\mu} + \sum_\nu \left[\left\{ \begin{matrix} \lambda\nu \\ \varkappa \end{matrix} \right\}_a \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\mu} + \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \varkappa \end{matrix} \right\}_a \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\lambda} - \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ \nu \end{matrix} \right\}_a \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial p_\nu} + \frac{\partial}{\partial p_\nu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ \varkappa \end{matrix} \right\}_a \xi_\nu \right] + \tfrac{1}{2}\gamma a_{\lambda\mu}$$

$$- \tfrac{1}{2} \left\{ \sum_\nu V^{(\nu)}_{\varkappa\lambda\mu} \xi_\nu - 2(\beta - \gamma U) a_{\lambda\mu} U_\varkappa \right\} (U+h)^{-1}$$

$$+ \tfrac{1}{2} a_{\lambda\mu} U_\varkappa \left[\sum_\nu \xi_\nu \frac{\partial U}{\partial p_\nu} + \alpha - 2\beta U + \gamma U^2 \right] (U+h)^{-2},$$

$$V^{(\nu)}_{\varkappa\lambda\mu} = a_{\lambda\nu} U_\varkappa \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\mu} + a_{\mu\nu} U_\varkappa \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\lambda} - a_{\lambda\mu} U_\nu \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial p_\nu} + \frac{\partial (a_{\lambda\mu} U_\varkappa)}{\partial p_\nu} \xi_\nu,$$

und diese Gleichung kann nur bestehen, wenn die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $U + h$ sämmtlich verschwinden.

Der Coefficient von $(U + h)^{-2}$ liefert die Gleichungen:

$$a_{\lambda\mu} U_\varkappa \left[\sum_\nu \xi_\nu \frac{\partial U}{\partial p_\nu} + \alpha - 2\beta U + \gamma U^2 \right] = 0,$$

und hieraus folgt:

$$\sum_\nu \xi_\nu \frac{\partial U}{\partial p_\nu} + \alpha - 2\beta U + \gamma U^2 = 0 \tag{14}$$

oder auch mit Benutzung des Symboles Pf:

$$P(U) + \alpha - 2\beta U + \gamma U^2 = 0. \tag{14'}$$

Die Kräftefunction U erhält demnach bei Anwendung der infinitesimalen Transformation Pf den Zuwachs

$$-(\alpha - 2\beta U + \gamma U^2)\,\delta\tau,$$

mithin geht bei der durch Pf erzeugten eingliedrigen Gruppe von Transformationen U über in

$$\bar{U} = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} U}{\mathfrak{C} + \mathfrak{D} U}, \tag{15}$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ Functionen von τ sind. *Es erleidet also auch U eine projective Transformation*, die zu der projectiven Transformation von h in einer einfachen Beziehung steht: sie ist identisch mit der Transformation, die $-h$ in $-\bar{h}$ überführt. Es wäre daher vielleicht zweckmässig, in der Gleichung der lebendigen Kraft $U + h$ durch $U - h$ zu ersetzen.

4.

Die in den vorhergehenden Nummern für h und U gewonnenen, bemerkenswerth einfachen Sätze erkennt man erst in ihrer wahren Bedeutung, wenn man sie in Verbindung bringt mit einem schönen Theoreme, das von DARBOUX[1]) herrührt und das durch die Untersuchungen PAINLEVÉ's für die Dynamik besondere Wichtigkeit gewonnen hat.

Es ist klar, dass die Bahncurven eines dynamischen Problems ungeändert bleiben, wenn man in den Differentialgleichungen der Bewegung die Zeit t durch ct ersetzt, wo c eine Constante bedeutet. Hieraus folgt, dass die Probleme $[ds \mid U]$ und $[Ads \mid BU]$ dieselben ∞^{2n-1} Bahncurven besitzen oder kurz ausgedrückt *gleichbahnig* sind; A und B bedeuten wiederum von Null verschiedene Constanten. Man gelangt daher ebenfalls zu den natürlichen Familien von $[ds \mid U]$, wenn man statt der geodätischen Probleme $[\sqrt{U+h}\cdot ds]$ die geodätischen Probleme $[A\sqrt{BU+h}\cdot ds]$ betrachtet. Nun ist, wenn C eine neue willkürliche Constante bedeutet:

$$BU+h=(U+C)\left(B+\frac{h-BC}{U+C}\right),$$

folglich erhält man auch bei dem dynamischen Probleme

$$\left[A\sqrt{U+C}\,ds \mid \frac{h-BC}{U+C}\right]$$

die natürlichen Familien vermöge der geodätischen Probleme $[A\sqrt{BU+h}\cdot ds]$, d. h. dieses Problem ist gleichbahnig mit $[ds \mid U]$. Beachtet man endlich noch, dass die Kräftefunction nur bis auf eine additive Constante bestimmt ist, so erkennt man, dass *die dynamischen Probleme*

$$[ds \mid U] \quad \textit{und} \quad \left[\sqrt{\mathfrak{C}+\mathfrak{D}U}\,ds \mid \frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}U}{\mathfrak{C}+\mathfrak{D}U}\right]$$

gleichbahnig sind, und das ist jenes Theorem von DARBOUX.

Ja noch mehr, *jeder natürlichen Familie* (h) *des ersten Problems entspricht*, wie die Reduction auf die geodätischen Probleme zeigt, *eine natürliche Familie* (h_1) *des zweiten Problems*, und dabei ist

1) Vergl. die oben citirte Note vom 4. März 1889.

$$h_1 = \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}h}{\mathfrak{D}h - \mathfrak{C}},$$

d. h. die Transformation, die $-h$ in $-h_1$ überführt, ist cogredient zu der Transformation, die U in $U_1 = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}U}{\mathfrak{C} + \mathfrak{D}U}$ überführt.

Die Aehnlichkeit der *Transformation von* DARBOUX mit der in 3. betrachteten Transformation springt in die Augen. Man wird daraus schliessen, dass dynamische Probleme der verlangten Art erhalten werden, wenn man zu den bis jetzt gefundenen Bedingungen für h und U die Bedingung hinzufügt, dass bei der Transformation ds^2, bis auf einen constanten Factor, in $(\mathfrak{C} + \mathfrak{D}U)\,ds^2$ übergehen soll, *denn alsdann ist die Ausführung der infinitesimalen Transformation Pf gleichbedeutend mit einer Darboux'schen Transformation des dynamischen Problems in sich selbst.* Mit andern Worten:

Damit bei einer durch eine infinitesimale Transformation

$$Pf = \sum_{\nu} \xi_\nu \frac{\partial f}{\partial p_\nu}$$

erzeugten eingliedrigen Gruppe von Transformationen die natürlichen Familien eines dynamischen Problems mit einander vertauscht werden, ist es hinreichend, dass

I. Die Kräftefunction durch diese Transformation projectiv transformirt wird, d. h.

$$\bar{U} = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}U}{\mathfrak{C} + \mathfrak{D}U}$$

ist;

II. die Transformation für das Linienelement ds conform ist;

III. bei dieser conformen Transformation ds^2 in $(\mathfrak{C} + \mathfrak{D}U)\,ds^2$ übergeführt wird.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so geht die natürliche Familie (h) in die natürliche Familie $\left(\frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}h}{\mathfrak{D}h - \mathfrak{C}}\right)$ über.

Vermöge der Bedingungsgleichungen (A) und (B) lässt sich beweisen, dass die soeben angegebenen Bedingungen nicht nur hinreichend, sondern auch nothwendig sind. Dies soll in den nächsten Nummern geschehen. Hier möge nur noch folgende Bemerkung Platz finden. Nach dem Theorem von DARBOUX sind die dynamischen Probleme

$$[ds \mid U] \quad \text{und} \quad \left[\sqrt{\mathfrak{C} + \mathfrak{D}U}\,ds \mid \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}U}{\mathfrak{C} + \mathfrak{D}U}\right]$$

gleichbahnig. Sind umgekehrt zwei dynamische Probleme

$$[ds \mid U] \quad \text{und} \quad [ds_1 \mid U_1]$$

in denselben Veränderlichen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ vorgelegt, während die Zeit beziehungsweise t und t_1 sein möge, so kann man fragen, welche Beziehung zwischen ds und ds_1, U und U_1 stattfinden muss, damit die beiden Probleme gleichbahnig sind. Liesse sich zeigen, dass stets

$$ds_1 = \sqrt{\mathfrak{C} + \mathfrak{D}U} \cdot ds, \quad U_1 = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}U}{\mathfrak{C} + \mathfrak{D}U}$$

sein muss, wäre also die Umkehrung des Theorems von DARBOUX wahr, dann wäre damit bewiesen, dass die vorher angegebenen hinreichenden Bedingungen auch nothwendig sind. Nun hat PAINLEVÉ zwar gezeigt, dass diese Umkehrung bei *willkürlichem* ds^2 und U richtig ist[1]), aber er hat zugleich nachgewiesen, dass bei besonderer Wahl von ds^2 und U dynamische Probleme gleichbahnig sein können, ohne durch die Transformation von DARBOUX in einander überzugehen; ein einfaches Beispiel hierfür liefern die bekannten Sätze von BELTRAMI und DINI über die geodätische Abbildung krummer Oberflächen. Es bedarf daher eines besonderen Beweises, dass die vorher angegebenen Bedingungen auch nothwendig sind, und dieser Beweis soll jetzt gegeben werden.

5.

Setzt man in (A) den Coefficienten von $(U+h)^{-1}$ gleich Null, so ergiebt sich nach leichter Umformung die Gleichung:

$$U_\varkappa \cdot \sum_\nu \left(a_{\lambda\mu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\mu} + a_{\mu\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\lambda} + \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_\nu} \xi_\nu \right)$$
$$= a_{\lambda\mu} \cdot \left[\sum_\nu \left(U_\nu \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial p_\nu} - \frac{\partial U_\varkappa}{\partial p_\nu} \xi_\nu \right) + 2(\beta - \gamma U) U_\varkappa \right],$$

und wird der Index $\varkappa$ so gewählt, dass $U_\varkappa \neq 0$ ist, so folgt hieraus

$$\sum_\nu \left(a_{\lambda\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\mu} + a_{\mu\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\lambda} + \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_\nu} \xi_\nu \right) = \omega_\varkappa a_{\lambda\mu} \qquad (\lambda, \mu \neq \varkappa),$$

1) *Sur les transformations en Mécanique.* C. R. t. 114. 11. April 1892. S. 901—904.

wo

$$\omega_\varkappa = 2(\beta - \gamma U) + \sum_\nu \left(\frac{U_\nu}{U_\varkappa} \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial p_\nu} - \frac{\partial \log U_\varkappa}{\partial p_\nu} \xi_\nu \right)$$

nur von $\varkappa$, nicht von λ und μ abhängt.

Ist jetzt ausser $U_\varkappa$ auch $U_\iota \neq 0$, so ergiebt sich ebenso:

$$\sum_\nu \left(a_{\lambda\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\mu} + a_{\mu\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\varkappa} + \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_\nu} \xi_\nu \right) = \omega_\iota a_{\lambda\mu} \quad (\lambda, \mu \neq \iota),$$

und wählt man die Indices λ und μ so, dass sie beide von $\varkappa$ und ι verschieden sind, was für $n \geqq 3$ stets möglich ist, so muss

$$(\omega_\varkappa - \omega_\iota)\, a_{\lambda\mu} = 0\,,$$

also $\omega_\varkappa = \omega_\iota$ sein, sobald $a_{\lambda\mu} \neq 0$ ist. Mithin gilt unter diesen Voraussetzungen die Gleichung:

$$\sum_\nu \left(a_{\lambda\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\mu} + a_{\mu\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\varkappa} + \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_\nu} \xi_\nu \right) = \omega a_{\lambda\mu} \tag{16}$$

für alle Paare λ, μ ausser $\lambda = \iota$, $\mu = \varkappa$. Dass sie aber auch für dieses Paar besteht, erkennt man sofort, wenn man die Gleichungen (B) für $\mu = \iota$ zu Hülfe nimmt. Nun ist aber

$$\frac{\delta ds^2}{\delta \tau} = \sum_{\varkappa\lambda} \sum_\nu \left(a_{\lambda\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\mu} + a_{\mu\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\varkappa} + \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_\nu} \xi_\nu \right) dp_\lambda\, dp_\mu\,,$$

folglich fordern die Gleichungen (16), dass

$$\frac{\delta ds^2}{\delta \tau} = \omega\, ds^2$$

sein soll oder dass *die infinitesimale Transformation Pf für das Linienelement ds conform ist.*

Die Gleichungen (16) bleiben auch dann noch richtig, wenn jene Voraussetzungen nicht erfüllt sind, d. h. wenn alle Ausdrücke $U_1, U_2, \ldots, U_n$ bis auf einen verschwinden oder wenn $n = 2$ ist oder wenn alle $a_{\lambda\mu}$ für $\lambda, \mu \neq \iota, \varkappa$ verschwinden, ohne dass jedoch a verschwindet; in allen diesen Fällen hat man nur ausser den Gleichungen (A) noch die Gleichungen (B) heranzuziehen; die Ausführung der bezüglichen Rechnungen ist hier nicht am Platze.

6.

Es bleibt übrig, die Bedeutung der Gleichungen zu ermitteln, die entstehen, wenn in (A) und (B) die absoluten Glieder

gleich Null gesetzt werden. Das geschieht am einfachsten auf folgende Art.

Nach DARBOUX sind alle dynamischen Probleme

$$[ds_1 \mid U_1] \equiv \left[V\overline{\mathfrak{C} + \mathfrak{D}U}\, ds \;\middle|\; \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}U}{\mathfrak{C} + \mathfrak{D}U}\right]$$

gleichbahnig, sie können daher einander bei den gegenwärtigen Betrachtungen ersetzen. Behält man sich also die nachträgliche Ausführung einer Transformation von DARBOUX vor, so ist es erlaubt, der Rechnung irgend ein Problem dieser *Klasse von gleichbahnigen Problemen* zu Grunde zu legen. Nun war

$$h_1 = \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}h}{\mathfrak{D}h - \mathfrak{C}}.$$

Ferner giebt es bei dem Problem $[ds \mid U]$ stets mindestens *eine* natürliche Familie (h_0), die bei der Vertauschung der Familien an ihrer Stelle bleibt. Bestimmt man also $\mathfrak{C}$ aus der Gleichung:

$$\mathfrak{D}h_0 - \mathfrak{C} = 0,$$

so bleibt bei dem Probleme $[ds_1 \mid U_1]$ die Familie $h_1 = \infty$ in Ruhe, d. h. *unter den Problemen der Klasse giebt es stets solche, bei denen die geodätischen Linien gegenüber der Transformation invariant sind.* Bei diesen Problemen ist aber nach Nummer 2:

$$\gamma = 0,$$

und das hat zur Folge, dass die $\frac{1}{2}(n-1)\,n(n+2)$ Gleichungen, die entstehen, wenn in (A) und (B) die absoluten Glieder gleich Null gesetzt werden, gerade die Bedingungsgleichungen dafür werden, dass die geodätischen Linien von ds_1 gegenüber der Transformation invariant sind. Demnach muss das Linienelement ds_1 so beschaffen sein, dass seine geodätischen Linien die conforme infinitesimale Transformation Pf gestatten. Dafür ist jedoch nach SOPHUS LIE nothwendig und hinreichend, dass

17) $$\omega = \text{const.}$$

ist, und diese eine Gleichung ersetzt alle jene $\frac{1}{2}(n-1)\,n(n+2)$ Gleichungen.

Hiermit ist folgendes Theorem bewiesen:

Alle dynamischen Probleme $[ds \mid U]$, bei denen die natürlichen Familien der Bahncurven durch eine eingliedrige Gruppe von Transformationen mit einander vertauscht werden, ergeben sich,

wenn man die dynamischen Probleme $[ds_1 \mid U_1]$ *ermittelt, bei denen vermöge der eingliedrigen Gruppe*

I. die Kräftefunction U_1 *projectiv transformirt wird;*

II. das Linienelement ds_1 *conform transformirt wird;*

III. die geodätischen Linien invariant bleiben oder, was dasselbe ist, bei der conformen Transformation alle Bogenlängen in constantem Verhältnisse geändert werden,

und alsdann auf $[ds_1 \mid U_1]$ *die allgemeinste Transformation von Darboux anwendet.*

Hiermit ist bewiesen, dass die in Nummer 4 aufgestellten Bedingungen in der That nothwendig und hinreichend sind, denn dass jetzt ds^2 durch die eingliedrige Gruppe in $(\mathfrak{E} + \mathfrak{D}U)\,ds^2$ übergeführt wird, das zeigt eine einfache Rechnung.

7.

Ist irgend ein dynamisches Problem $[ds \mid U]$ vorgelegt, und, will man wissen, ob es dem hier betrachteten Reiche von dynamischen Problemen angehört, so ist zu untersuchen, ob es Constanten α, β, γ und Functionen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ giebt, vermöge deren alle $\frac{3}{2}(n-1)n(n+2)$ Bedingungsgleichungen identisch erfüllt sind, die sich aus (A) und (B) durch Trennung der Potenzen von $U+h$ ergeben haben, und ob dann U der Gleichung (14) genügt.

Man kann jedoch auch anders verfahren. Da die Wahl der Coordinaten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ noch frei steht, kann man versuchen für die betrachteten Probleme möglichst einfache *Normalformen* $[ds \mid U]$ aufzustellen. Ist dann ein Problem

$$\left[\sqrt{\sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n)\, d\mathfrak{p}_\lambda\, d\mathfrak{p}_\mu} \mid \mathfrak{U}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n)\right]$$

vorgelegt, so hat man zu untersuchen, ob *erstens* die quadratische Differentialform

$$d\mathfrak{s}^2 = \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\, d\mathfrak{p}_\lambda\, d\mathfrak{p}_\mu$$

der quadratischen Differentialform

$$ds^2 = \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\, dp_\lambda\, dp_\mu$$

äquivalent ist, und dafür hat CHRISTOFFEL die Kriterien aufgestellt, und ob *zweitens* bei der Transformation

$$\mathfrak{p}_\varkappa = \varphi_\varkappa(p_1, p_2, \ldots, p_n) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n),$$

die $d\mathfrak{s}^2$ in ds^2 überführt, auch $\mathfrak{U}$ in U übergeht [1]).

Solche Normalformen ergeben sich, wenn man für die infinitesimale Transformation Pf die kanonische Form:

$$Pf = \frac{\partial f}{\partial p_1}$$

wählt. Die Kräftefunction U muss dann der Differentialgleichung

$$\frac{\partial U}{\partial p_1} + \alpha - 2\beta U + \gamma U^2 = 0 \tag{14''}$$

genügen, und man erhält für die fünf in Nummer 2 unterschiedenen Fälle:

I. $\alpha = \beta = \gamma = 0$: $U = \Phi(p_2, p_3, \ldots, p_n)$.

II. $\alpha \neq 0$, $\beta = \gamma = 0$: $U = -\alpha p_1 + \Phi(p_2, p_3, \ldots, p_n)$.

III. $\beta \neq 0$, $\gamma = 0$: $U = -\frac{\alpha}{2\beta} + e^{2\beta p_1} \cdot \Phi(p_2, p_3, \ldots, p_n)$.

IV. $\gamma \neq 0$, $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$: $U = -\frac{\beta}{\gamma} + \frac{1}{\gamma p_1 + \Phi(p_2, \ldots, p_n)}$.

V. $\gamma \neq 0$, $\beta^2 - \alpha\gamma = \delta^2 \neq 0$: $U = \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{e^{2\delta p_1} + \Phi(p_2, \ldots, p_n)}{e^{2\delta p_1} - \Phi(p_2, \ldots, p_n)}$.

Was ds^2 betrifft, so muss die Transformation Pf in allen Fällen conform sein. Für

$$Pf = \frac{\partial f}{\partial p_1}$$

ergeben aber die Gleichungen (16):

$$\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_1} = \omega a_{\lambda\mu}, \tag{16'}$$

1) Könnte man nicht umgekehrt Kriterien für die Aequivalenz von zwei quadratischen Differentialformen von dem Gedanken aus erhalten, dass diese beiden Methoden dasselbe Ergebnis liefern müssen? Vergl. auch W. DE TANNENBERG, *Sur la théorie des formes quadratiques différentielles*, C. R. t. 119. 30. Juli 1894, S. 321—324.

und diese Gleichungen sind in der allgemeinsten Weise erfüllt, wenn man

$$a_{\lambda\mu} = e^{\theta(p_1, \cdots, p_n)} \cdot b_{\lambda\mu}(p_2, p_3, \ldots, p_n) \tag{18}$$

setzt.

Nun war

$$\begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ \varkappa \end{Bmatrix}_a = \sum_\nu \begin{bmatrix} \lambda\mu \\ \nu \end{bmatrix}_a a'_{\varkappa\nu}$$

mit

$$\begin{bmatrix} \lambda\mu \\ \nu \end{bmatrix}_a = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\lambda\nu}}{\partial p_\mu} + \frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_\nu}\right).$$

Folglich wird

$$\begin{bmatrix} \lambda\mu \\ \nu \end{bmatrix}_a = e^\theta \begin{bmatrix} \lambda\mu \\ \nu \end{bmatrix}_b + \tfrac{1}{2} e^\theta \left(\frac{\partial\theta}{\partial p_\mu} b_{\lambda\nu} + \frac{\partial\theta}{\partial p_\lambda} b_{\mu\nu} - \frac{\partial\theta}{\partial p_\nu} b_{\lambda\mu}\right),$$

und wenn dem Systeme der $b_{\lambda\mu}$, dessen Determinante

$$b = e^{-n\theta} \cdot a \neq 0$$

ist, das reciproke System:

$$b'_{\lambda\mu} = e^\theta \cdot a'_{\lambda\mu}$$

zugeordnet wird:

$$\begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ \varkappa \end{Bmatrix}_a = \begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ \varkappa \end{Bmatrix}_b + \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_{\varkappa\lambda}\frac{\partial\theta}{\partial p_\mu} + \varepsilon_{\varkappa\mu}\frac{\partial\theta}{\partial p_\lambda} - b_{\lambda\mu}\sum_\nu \frac{\partial\theta}{\partial p_\nu} b'_{\varkappa\nu}\right).$$

Setzt man jetzt in den Gleichungen (A) die absoluten Glieder gleich Null, so kommt nach leichter Umformung:

$$b_{\lambda\mu} \cdot \sum_\nu \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial p_1 \partial p_\nu} - \gamma \frac{\partial U}{\partial p_\nu}\right) b'_{\varkappa\nu} = 0 \qquad (\lambda, \mu \neq \varkappa),$$

folglich ist

$$\sum_\nu \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial p_1 \partial p_\nu} - \gamma \frac{\partial U}{\partial p_\nu}\right) b'_{\varkappa\nu} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n),$$

und das erfordert, dass für alle Werthe von ν:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial p_1 \partial p_\nu} - \gamma \frac{\partial U}{\partial p_\nu} = 0$$

wird. Mithin ist

$$\frac{\partial \theta}{\partial p_1} = m + \gamma U, \tag{19}$$

wo m eine Constante bedeutet, und aus (18) und (19) folgt jetzt:

$$\omega = m + \gamma U.$$

Ist $\gamma = 0$, und das tritt bei den Fällen I, II und III ein, so wird daher $\omega = m$, wie es nach dem Satze von LIE zu erwarten war, und man darf unbeschadet der Allgemeinheit

$$\theta = \omega p_1$$

setzen, sodass schliesslich

$$ds^2 = e^{\omega p_1} \sum_{\lambda,\mu} b_{\lambda\mu}(p_2, p_3, \ldots, p_n)\, dp_\lambda\, dp_\mu \tag{5}$$

herauskommt.

Im Falle IV war

$$U = -\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} + \frac{1}{\gamma p_1 + \Phi(p_2, \ldots, p_n)},$$

mithin wird:

$$\theta = (m + \sqrt{\alpha\gamma})\, p_1 + \log(\gamma p_1 + \Phi)$$

und, wenn ω wieder eine Constante bedeutet:

$$ds^2 = e^{\omega p_1}(\gamma p_1 + \Phi) \sum_{\lambda,\mu} b_{\lambda\mu}(p_2, p_3, \ldots, p_n)\, dp_\lambda\, dp_\mu. \tag{20}$$

Im Falle V war:

$$U = \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{e^{2\delta p_1} + \Phi(p_2, \ldots, p_n)}{e^{2\delta p_1} - \Phi(p_2, \ldots, p_n)},$$

mithin wird:

$$\theta = (m + \beta - \delta)\, p_1 + \log(e^{2\delta p_1} - \Phi)$$

und

$$ds^2 = e^{\omega p_1}(e^{2\delta p_1} - \Phi) \sum_{\lambda,\mu} b_{\lambda\mu}(p_2, p_3, \ldots, p_n)\, dp_\lambda\, dp_\mu. \tag{21}$$

Hiermit ist die Discussion vollständig durchgeführt. Ihre Ergebnisse lassen sich mit etwas veränderter Bezeichnung in tabellarischer Form folgendermassen darstellen.

Fall I.

$$\bar{p}_1 = p_1 + \tau, \quad \bar{h} = h;$$
$$U = \Phi(p_2, \ldots, p_n), \quad ds^2 = e^{\omega p_1} \cdot \sum_{\lambda,\mu}^{n} b_{\lambda\mu}(p_2, \ldots, p_n)\, dp_\lambda\, dp_\mu.$$

Fall II.

$$\bar{p}_1 = p_1 + \tau, \quad \bar{h} = h + \alpha\tau;$$
$$U = -\alpha p_1 + \Phi(p_2, \ldots, p_n), \quad ds^2 = e^{\omega p_1} \cdot \sum_{\lambda,\mu}^{n} b_{\lambda\mu}(p_2, \ldots, p_n)\, dp_\lambda\, dp_\mu.$$

Fall III.

$$\bar{p}_1 = p_1 + \tau, \quad \bar{h} - \alpha = e^{2\beta\tau}(h - \alpha);$$
$$U = -\alpha + e^{2\beta p_1}\Phi(p_2, \ldots, p_n), \quad ds^2 = e^{\omega p_1} \cdot \sum_{\lambda,\mu}^{n} b_{\lambda\mu}(p_2, \ldots, p_n)\, dp_\lambda\, dp_\mu.$$

Fall IV.

$$\bar{p}_1 = p_1 + \tau, \quad \bar{h} - \alpha = \frac{h - \alpha}{1 - \gamma\tau(h - \alpha)};$$
$$U = -\alpha + \frac{1}{\gamma p_1 + \Phi(p_2, \ldots, p_n)},$$
$$ds^2 = e^{\omega p_1}(\gamma p_1 + \Phi) \cdot \sum_{\lambda,\mu}^{n} b_{\lambda\mu}(p_2, \ldots, p_n)\, dp_\lambda\, dp_\mu.$$

Fall V.

$$\bar{p}_1 = p_1 + \tau, \quad \frac{\bar{h} - \beta}{\bar{h} - \gamma} : \frac{h - \beta}{h - \gamma} = e^{\omega\tau};$$
$$U = \frac{\beta e^{\omega p_1} - \gamma\Phi(p_2, \ldots, p_n)}{e^{\omega p_1} - \Phi(p_2, \ldots, p_n)},$$
$$ds^2 = e^{\omega p_1}(e^{\alpha p_1} - \Phi) \cdot \sum_{\lambda,\mu}^{n} b_{\lambda\mu}(p_2, \ldots, p_n)\, dp_\lambda\, dp_\mu.$$

8.

Behält man sich die nachträgliche Ausführung einer Transformation von DARBOUX vor, so genügt es, wie schon PAINLEVÉ bemerkt hat, zwei Fälle zu unterscheiden.

Ersetzt man nämlich bei IV:

$$[ds \mid U] \text{ durch } \left[\sqrt{U+\alpha}\, ds \;\middle|\; \frac{1}{U+\alpha}\right] = [ds_1 \mid U_1],$$

so wird

$$ds_1^2 = e^{\omega p_1} \cdot \sum_{\lambda,\mu}{}' b_{\lambda\mu}\, dp_\lambda\, dp_\mu,$$

$$U_1 = \gamma p_1 + \Phi,$$

man gelangt also zu dem Falle II.

Ersetzt man ebenso bei V:

$$[ds \mid U] \text{ durch } \left[\sqrt{U-\gamma}\, ds \;\middle|\; \frac{1}{U-\gamma}\right] = [ds_1 \mid U_1],$$

so wird

$$ds_1^2 = (\beta-\gamma)\, e^{(\omega+\alpha)p_1} \cdot \sum_{\lambda,\mu}{}' b_{\lambda\mu}\, dp_\lambda\, dp_\mu,$$

$$U_1 = \frac{1}{\beta-\gamma} - e^{\alpha p_1} \cdot \frac{\Phi}{\beta-\gamma},$$

man gelangt also zu dem Falle III.

Es ist klar, dass die hier angewandte Transformation von DARBOUX gerade die in Nummer 6 benutzte ist, bei der eine invariante natürliche Familie in eine Familie geodätischer Linien übergeführt wird. Das in Nummer 6 ausgesprochene Theorem lässt sich daher auch durch das folgende Theorem ersetzen, das die Ergebnisse der Untersuchungen dieses Abschnittes in condensirter Form enthält:

Alle dynamischen Probleme $[ds \mid U]$, *bei denen die natürlichen Familien der Bahncurven durch eine eingliedrige Gruppe von Transformationen mit einander vertauscht werden, ergeben sich, wenn man auf die beiden dynamischen Probleme:*

(A)
$$ds^2 = e^{\omega p_1} \cdot \sum_{\lambda,\mu}{}' b_{\lambda\mu}(p_2, \ldots, p_n)\, dp_\lambda\, dp_\mu,$$
$$U = -\alpha p_1 + \Phi(p_2, \ldots, p_n)$$

und

(B)
$$ds^2 = e^{\omega p_1} \cdot \sum_{\lambda,\mu}{}' b_{\lambda\mu}(p_2, \ldots, p_n)\, dp_\lambda\, dp_\mu,$$
$$U = e^{\alpha\beta p_1} \cdot \Phi(p_2, \ldots, p_n)$$

die allgemeinste Transformation von Darboux anwendet.

Hierzu ist zu bemerken, dass in (A) die Constante α, in (B) die Constante β auch den Werth Null haben darf; setzt man α bez. β gleich Null, so wird man auf den Fall I geführt, der mithin als Grenzfall von II oder III angesehen werden kann.

Zweiter Abschnitt.

Ueber dynamische Probleme, bei denen die natürlichen Familien der Bahncurven durch eine mehrgliedrige Gruppe von Transformationen vertauscht werden.

1.

Für die Untersuchung der dynamischen Probleme, bei denen die natürlichen Familien der Bahncurven durch eine *continuirliche Gruppe von Transformationen* vertauscht werden, ist es von entscheidender Bedeutung, dass die grösste continuirliche Gruppe dieser Beschaffenheit endlich und zwar höchstens $n(n+2)$-gliedrig ist; auf den Beweis dieses Satzes kann hier nicht eingegangen werden [1]). Bekanntlich besitzt jede *r-gliedrige Gruppe* ($r \geqq 3$) *zwei*gliedrige Untergruppen, und es wird daher vor allem darauf ankommen zu ermitteln, bei welchen dynamischen Problemen die natürlichen Familien durch eine zweigliedrige Gruppe vertauscht werden. Nun lassen sich durch Einführung geeigneter Coordinaten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die infinitesimalen Transformationen jeder zweigliedrigen Gruppe in beliebig vielen Veränderlichen auf einen der vier Typen zurückführen:

1) $$\boxed{\frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_2}}$$

2) $$\boxed{\frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2}}$$

3) $$\boxed{\frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1}}$$

4) $$\boxed{\frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad p_2 \frac{\partial f}{\partial p_1}}$$

---

1) Man vergleiche hierzu: PAINLEVÉ, C. R. t. 116. 3. Jan. 1893, S. 22; STÄCKEL, C. R. t. 119. 29. Oct. 1894. S. 723; F. ENGEL, *Ueber die Endlichkeit*

und man hat daher zu untersuchen, wie ds^2 und U beschaffen sein müssen, damit die $3(n-1)n(n+2)$ Bedingungsgleichungen, auf die jedes dieser vier Paare von infinitesimalen Transformationen führt, identisch erfüllt sind.

Aus Nummer 5 des ersten Abschnittes folgt, dass ds durch jede dieser infinitesimalen Transformationen conform transformirt wird, und da in jedem der vier Typen die Transformation

$$P_1 f = \frac{\partial f}{\partial p_1}$$

vorkommt, so ist nach Nummer 7, Gl. 18:

$$ds^2 = e^{\theta(p_1, \cdots, p_n)} \cdot \sum_{\lambda,\mu}^{n} b_{\lambda\mu}(p_2, \ldots, p_n)\, dp_\lambda\, dp_\mu .$$

Man wird daher ermitteln müssen, wann dieses ds^2 auch durch die zweite infinitesimale Transformation jedes der vier Typen 1) bis 4) conform transformirt wird.

2.

Ist *erstens*

$$P_2 f = \frac{\partial f}{\partial p_2},$$

so geht die Gleichung

$$(16) \qquad \sum_{\nu}^{n} \left(a_{\lambda\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\mu} + a_{\mu\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\kappa} + \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_\nu} \xi_\nu \right) = \omega_{\lambda\mu}$$

über in

$$(16') \qquad \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_2} = \omega\, a_{\lambda\mu}$$

oder, indem man für $a_{\lambda\mu}$ seinen Werth einsetzt, in

$$\frac{\partial \log b_{\lambda\mu}}{\partial p_2} = \omega - \frac{\partial \theta}{\partial p_2},$$

und hieraus folgt sofort, dass man in diesem Falle in allgemeinster Weise

$$(22) \qquad ds^2 = e^{\theta(p_1, \cdots, p_n)} \cdot \sum_{\nu}^{n} c_{\lambda\mu}(p_3, p_4, \ldots, p_n)\, dp_\lambda\, dp_\mu$$

setzen darf; ω wird dann gleich $\frac{\partial \theta}{\partial p_2}$.

---

der grössten continuirlichen Gruppen, bei denen gewisse Systeme von Differentialgleichungen invariant bleiben, diese Berichte, 3. Dec. 1894, S. 297—306 und SOPHUS LIE, *Zur Theorie der Transformationsgruppen*, diese Berichte, 3. Dec. 1894, S. 322—324.

Ist *zweitens*

$$P_2 f = p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2},$$

so geht (16) über in

$$(16'') \quad \begin{cases} \omega a_{\lambda\mu} = \varepsilon_{\mu 1} a_{\lambda 1} + \varepsilon_{\lambda 1} a_{\mu 1} + p_1 \dfrac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_1} \\ \qquad + \varepsilon_{\mu 2} a_{\lambda 2} + \varepsilon_{\lambda 2} a_{\mu 2} + p_2 \dfrac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_2}. \end{cases}$$

Ist in diesen Gleichungen zunächst $\lambda, \mu \neq 1, 2$, so gehen sie über in

$$\frac{\partial \log b_{\lambda\mu}}{\partial p_2} = p_2^{-1}\left(\omega - p_1 \frac{\partial \theta}{\partial p_1} - p_2 \frac{\partial \theta}{\partial p_2}\right),$$

und man darf daher von vornherein

$$a_{\lambda\mu} = e^{\theta(p_1, \ldots, p_n)} \cdot c_{\lambda\mu}(p_3, p_4, \ldots, p_n) \qquad (\lambda, \mu \neq 1, 2)$$

setzen. Dann aber wird

$$\omega = p_1 \frac{\partial \theta}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial \theta}{\partial p_2},$$

und die Gleichungen (16'') reduciren sich auf:

$$\varepsilon_{\mu 1} b_{\lambda 1} + \varepsilon_{\mu 2} b_{\lambda 2} + \varepsilon_{\lambda 1} b_{\mu 1} + \varepsilon_{\lambda 2} b_{\mu 1} + p_2 \frac{\partial b_{\lambda\mu}}{\partial p_2} = 0,$$

und daraus folgt, wenn man erst $\lambda = 1$ und dann $\lambda = 2$ setzt, während $\mu \neq 1, 2$ bleibt:

$$b_{\mu 1} = p_2^{-1} \cdot c_{\mu 1}(p_3, p_4, \ldots, p_n),$$
$$b_{\mu 2} = p_2^{-1} \cdot c_{\mu 2}(p_3, p_4, \ldots, p_n).$$

Setzt man endlich auch $\mu = 1, 2$, so wird

$$b_{\varrho\sigma} = p_2^{-2} \cdot c_{\varrho\sigma}(p_3, p_4, \ldots, p_n) \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2).$$

Demnach darf man in allgemeinster Weise

$$(23) \qquad ds^2 = e^{\theta(p_1, \ldots, p_n)} \cdot \sum_{\lambda, \mu}{}' p_2^{-(\varepsilon_{\lambda 1} + \varepsilon_{\lambda 2} + \varepsilon_{\mu 1} + \varepsilon_{\mu 2})} \cdot c_{\lambda\mu}(p_3, p_4, \ldots, p_n)\, dp_\lambda\, dp_\mu$$

setzen.

Ist *drittens*

$$P_2 f = p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1},$$

so geht (16) über in

$$16''') \qquad \varepsilon_{\mu_1} a_{\lambda_1} + \varepsilon_{\lambda_1} a_{\mu_1} + p_1 \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_1} = \omega a_{\lambda\mu},$$

und es ist für $\lambda, \mu \neq 1$:

$$b_{\lambda\mu}\left(\omega - p_1 \frac{\partial \theta}{\partial p_1}\right) = 0,$$

folglich

$$\omega = p_1 \frac{\partial \theta}{\partial p_1}.$$

Dann aber ist nach (16'''):

$$\varepsilon_{\mu_1} a_{\lambda_1} + \varepsilon_{\lambda_1} a_{\mu_1} = 0,$$

also müssten $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ gleich Null sein, während doch a nicht verschwinden darf. Demnach kann der Typus 3) bei der conformen Transformation von ds gar nicht auftreten.

Ist *viertens*

$$P_2 f = p_2 \frac{\partial f}{\partial p_1},$$

so geht (16) über in

$$16^{IV}) \qquad \varepsilon_{\mu_2} a_{\lambda_1} + \varepsilon_{\lambda_2} a_{\mu_1} + p_2 \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_1} = \omega a_{\lambda\mu}$$

und hieraus folgt wieder, dass

$$\omega = p_2 \frac{\partial \theta}{\partial p_1}$$

sein muss. Mithin müsste

$$\varepsilon_{\mu_2} a_{\lambda_1} + \varepsilon_{\lambda_2} a_{\mu_1} = 0$$

sein, und a würde verschwinden. Demnach kann auch der Typus 4) bei der conformen Transformation ds gar nicht auftreten.

Bei den folgenden Untersuchungen muss also ds^2 entweder die Form (22) oder die Form (23) haben.

3.

Behält man sich die nachträgliche Ausführung einer Transformation von DARBOUX vor, so darf man annehmen, dass entweder

$$A) \qquad ds^2 = e^{\omega p_1} \cdot \sum_{\lambda,\mu}^{n} b_{\lambda\mu}(p_2, \ldots, p_n)\, dp_\lambda\, dp_\mu,$$
$$U = -\alpha p_1 + \Phi(p_2, \ldots, p_n)$$

oder

$$(\mathfrak{B}) \qquad ds^2 = e^{\omega p_1} \cdot \sum_{\lambda,\mu} b_{\lambda\mu}(p_2, \ldots, p_n)\, dp_\lambda\, dp_\mu\,,$$
$$U = e^{2\beta p_1} \cdot \Phi(p_2, \ldots, p_n)$$

ist. Soll nun das dynamische Problem eine zweite infinitesimale Transformation $P_2 f$ gestatten, so muss U auch der partiellen Differentialgleichung:

$$14'') \qquad P_2(U) + \alpha' - 2\beta' U + \gamma' U^2 = 0$$

genügen.

Hat man zunächst den *Typus* 1), ist also $P_2 f = \frac{\partial f}{\partial p_2}$, so muss im Falle $(\mathfrak{A})$:

$$\alpha\gamma' = 0\,, \quad \alpha\beta' = 0$$

sein. Entweder ist also $\beta' = 0$, $\gamma' = 0$ und mithin

$$(24) \qquad U = -\alpha p_1 - \alpha' p_2 + \Psi(p_3, p_4, \ldots, p_n)\,,$$

oder es ist $\alpha = 0$. Dann ist man aber im Falle I des vorhergehenden Abschnittes und darf die Transformation von DARBOUX zur Vereinfachung von (14'') benutzen. Hierdurch erreicht man, dass $\alpha' = \gamma' = 0$ wird und erhält:

$$U = e^{2\beta' p_2} \cdot \Psi(p_3, p_4, \ldots, p_n)\,.$$

Im Falle $(\mathfrak{B})$ kommen die Bedingungsgleichungen:

$$\alpha' = 0\,, \quad \gamma' = 0\,,$$

und es wird

$$(25) \qquad U = e^{2\beta p_1 + 2\beta' p_2} \cdot \Psi(p_3, p_4, \ldots, p_n)\,;$$

hierin ist die zweite Gleichung für U im Falle $(\mathfrak{A})$ enthalten.

Für den Typus 2), also für $P_2 f = p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2}$, ergiebt sich entsprechend im Falle $(\mathfrak{A})$:

$$\alpha\gamma' = 0\,, \quad \alpha(2\beta' - 1) = 0\,.$$

Entweder ist also $2\beta' = 1$, $\gamma' = 0$ und mithin

$$(26) \qquad U = \alpha' - \alpha p_1 + p_2 \cdot \Psi(p_3, p_4, \ldots, p_n)$$

oder $\alpha = 0$, und da alsdann $\alpha' = \gamma' = 0$ angenommen werden darf:

$$(27) \qquad U = p_2^{2\beta''} \cdot \Psi(p_3, p_4, \ldots, p_n)\,.$$

Im Falle (𝔅) findet man:

$$\beta = 0 ,$$

und ist daher abermals im Falle I, wo $\alpha' = \gamma' = 0$ gesetzt werden darf; U hat daher wieder die Form (27).

Bei der Ausübung der zweigliedrigen Gruppe auf die Bahncurven des dynamischen Problems werden U und h projectiv transformirt. Aus dem Vorhergehenden ist unmittelbar ersichtlich, dass die Transformationen von h, die den Formen (24) bis (27) von U entsprechen, beziehungsweise durch die Gleichungen gegeben werden:

24*) $\bar{h} = h + \alpha\tau + \alpha'\tau'$ (zweigliedrig),

25*) $\bar{h} = e^{\beta\tau + \beta'\tau'} \cdot h$ (zweigliedrig),

26*) $\bar{h} = e^{\tau'}(h + \alpha\tau)$ (zweigliedrig),

27*) $\bar{h} = e^{\beta'\tau'} \cdot h$ (eingliedrig).

Die Transformationen von U sind denen von h invers.

4.

Nachdem die möglichen Formen der Kräftefunction U ermittelt worden sind, bleibt noch übrig, auch die zugehörigen Linienelemente ds zu bestimmen. Das ist sehr leicht im Falle des Typus 1). Für diesen Typus war:

22) $$ds^2 = e^{\theta(p_1, \cdots, p_n)} \cdot \sum_{\lambda, \mu} c_{\lambda\mu}(p_3, p_4, \cdots, p_n)\, dp_\lambda\, dp_\mu .$$

Sollen jetzt bei dieser conformen Transformation die geodätischen Linien invariant sein, so ist nach LIE:

$$\frac{\partial\theta}{\partial p_1} = \omega_1 , \qquad \frac{\partial\theta}{\partial p_2} = \omega_2 ,$$

wo ω_1 und ω_2 Constanten bedeuten, und es wird daher:

28) $$ds^2 = e^{\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2} \cdot \sum_{\lambda, \mu} c_{\lambda\mu}(p_3, p_4, \cdots, p_n)\, dp_\lambda\, dp_\mu .$$

Ganz anders verhält es sich mit dem Typus 2). Hier erfordert die Bestimmung von ds umfangreiche Rechnungen, die freilich zu einem verhältnissmässig einfachen Ergebnisse führen.

Für den Typus 2) war:

$$(23) \qquad ds^2 = e^{\theta(p_1,\ldots,p_n)} \cdot \sum_{\lambda,\mu}{}' p_2^{-(\varepsilon_{\lambda 1}+\varepsilon_{\lambda 2}+\varepsilon_{\mu 1}+\varepsilon_{\mu 2})} \cdot c_{\lambda\mu}(p_3, p_4, \ldots, p_n)\, dp_\lambda dp_\mu$$

Da die infinitesimale Transformation

$$P_1 f = \frac{\partial f}{\partial p_1}$$

die geodätischen Curven dieses Linienelementes invariant lassen soll, so ist

$$\frac{\partial \theta}{\partial p_1} = \omega_1 ,$$

wo ω_1 eine Constante bedeutet, und daher

$$(29) \qquad ds^2 = e^{\omega_1 p_1} \cdot \sum_{\lambda,\mu}{}' b_{\lambda\mu}\, dp_\lambda\, dp_\mu ,$$

wo

$$(30) \quad b_{\lambda\mu} = e^{\vartheta(p_2,\ldots,p_n)} \cdot p_2^{-(\varepsilon_{\lambda 1}+\varepsilon_{\lambda 2}+\varepsilon_{\mu 1}+\varepsilon_{\mu 2})} \cdot c_{\lambda\mu}(p_3, \ldots, p_n$$

zu setzen ist.

Jetzt hat man zu bewirken, dass auch die infinitesimale Transformation

$$P_2 f = p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2}$$

die geodätischen Curven von ds invariant lässt. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür ergeben sich, wenn man in den Gleichungen (A) und (B) des ersten Abschnittes die absoluten Glieder gleich Null setzt. Bildet man daher die Ausdrücke:

$$\Xi\{\lambda, \mu; \varkappa\}$$
$$= \frac{\partial^2 \xi_\varkappa}{\partial p_\lambda \partial p_\mu} + \sum_\nu \left[\begin{Bmatrix} \lambda\, \nu \\ \varkappa \end{Bmatrix}_a \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\mu} + \begin{Bmatrix} \mu\, \nu \\ \varkappa \end{Bmatrix}_a \frac{\partial \xi_\nu}{\partial p_\lambda} - \begin{Bmatrix} \lambda\, \mu \\ \nu \end{Bmatrix}_a \frac{\partial \xi_\varkappa}{\partial p_\nu} \right] + \sum_\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \begin{Bmatrix} \lambda\, \mu \\ \varkappa \end{Bmatrix}_a \xi_\nu$$

so lauten die gesuchten $\frac{1}{2}(n-1)n(n+2)$ Bedingungsgleichungen:

$$(G) \qquad 2\,\Xi\{\lambda, \mu; \varkappa\} = (\varepsilon_{\varkappa\lambda} + \varepsilon_{\varkappa\mu})\, \Xi\{\mu, \mu; \mu\} .$$

Ist im Besonderen

$$\xi_1 = p_1 , \quad \xi_2 = p_2 , \quad \xi_3 = 0 , \ \ldots , \ \xi_n = 0 ,$$

so kommt:

$$\Xi\{\lambda,\mu;\varkappa\} = \varepsilon_{\mu 1}\left\{\begin{matrix}\lambda & 1\\ \varkappa\end{matrix}\right\}_a + \varepsilon_{\lambda 1}\left\{\begin{matrix}\mu & 1\\ \varkappa\end{matrix}\right\}_a - \varepsilon_{\varkappa 1}\left\{\begin{matrix}\lambda & \mu\\ 1\end{matrix}\right\}_a + p_1\frac{\partial}{\partial p_1}\left\{\begin{matrix}\lambda & \mu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}_a$$
$$+ \varepsilon_{\mu 2}\left\{\begin{matrix}\lambda & 2\\ \varkappa\end{matrix}\right\}_a + \varepsilon_{\lambda 2}\left\{\begin{matrix}\mu & 2\\ \varkappa\end{matrix}\right\}_a - \varepsilon_{\varkappa 2}\left\{\begin{matrix}\lambda & \mu\\ 2\end{matrix}\right\}_a + p_2\frac{\partial}{\partial p_2}\left\{\begin{matrix}\lambda & \mu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}_a.$$

Nun wurde früher aus

$$a_{\lambda\mu} = e^{\theta}\cdot b_{\lambda\mu}(p_2, \ldots, p_n)$$

die Gleichung hergeleitet:

$$\left\{\begin{matrix}\lambda & \mu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}_a = \left\{\begin{matrix}\lambda & \mu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}_b + \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_{\varkappa\lambda}\frac{\partial\theta}{\partial p_\mu} + \varepsilon_{\varkappa\mu}\frac{\partial\theta}{\partial p_\lambda} - b_{\lambda\mu}\sum_\nu \frac{\partial\theta}{\partial p_\nu}b'_{\varkappa\nu}\right).$$

Hier ist aber $\theta = \omega_1 p_1$, folglich wird

$$\left\{\begin{matrix}\lambda & \mu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}_a = \left\{\begin{matrix}\lambda & \mu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}_b + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{\varkappa\lambda}\varepsilon_{\mu 1} + \varepsilon_{\varkappa\mu}\varepsilon_{\lambda 1} - \omega_1 b_{\lambda\mu}b'_{\varkappa 1})$$

oder

$$\left\{\begin{matrix}\lambda & \mu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}_a = \left\{\begin{matrix}\lambda & \mu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}_b - \tfrac{1}{2}\omega_1 b_{\lambda\mu}b'_{\varkappa 1}$$

mit der einzigen Ausnahme:

$$\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1\end{matrix}\right\}_a = \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1\end{matrix}\right\}_b - \tfrac{1}{2}\omega_1 b_{11}b'_{11} + 1.$$

Zu bemerken ist noch die wichtige Relation:

$$\frac{\partial}{\partial p_1}\left\{\begin{matrix}\lambda & \mu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}_a = 0.$$

Bildet man jetzt die Gleichungen (G), und zwar zunächst noch mit den Symbolen $\left\{\begin{matrix}\lambda & \mu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}_a$, so lassen sie sich, geeignet combinirt, nach p_2 integriren und durch folgendes System von Gleichungen ersetzen. Es sei

$$\left\{\begin{matrix}\lambda & \mu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}_{(a)} = \left\{\begin{matrix}\lambda & \mu\\ \varkappa\end{matrix}\right\}_a \tag{31}$$

mit den beiden Ausnahmen, dass

$$\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1\end{matrix}\right\}_{(a)} = \tfrac{1}{2}p_2\cdot\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1\end{matrix}\right\}_a, \qquad \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1\end{matrix}\right\}_{(a)} = p_2\cdot\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1\end{matrix}\right\}_a \tag{31'}$$

sein soll. Ferner setze man

$$\varepsilon_{\lambda 1} + \varepsilon_{\lambda 2} + \varepsilon_{\mu 1} + \varepsilon_{\mu 2} - \varepsilon_{\varkappa 1} - \varepsilon_{\varkappa 2} = \varepsilon_{\lambda\mu\varkappa}.$$

Dann kommt:

$$(G') \quad p_2^{\varepsilon_{\lambda\mu\varkappa}} \left\{ \begin{matrix} \lambda\ \mu \\ \varkappa \end{matrix} \right\}_a = \varphi_{\lambda\mu\varkappa}(p_3, p_4, \ldots, p_n) + \varepsilon_{\varkappa\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}_{(a)} + \varepsilon_{\varkappa\lambda} \left\{ \begin{matrix} \mu\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}_{(a)};$$

damit diese Gleichungen für *alle* $\frac{1}{2}n^2(n+1)$ Werthsysteme $\lambda, \mu, \varkappa$ gelten, muss noch festgesetzt werden, dass

$$(32) \qquad \varphi_{\lambda 11} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

sein soll.

Jetzt ziehe man die $\frac{1}{2}n^2(n+1)$ Identitäten heran:

$$(33) \qquad \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_\varkappa} = \sum_\nu \left\{ \begin{matrix} \varkappa\ \lambda \\ \nu \end{matrix} \right\}_a a_{\mu\nu} + \sum_\nu \left\{ \begin{matrix} \varkappa\ \mu \\ \nu \end{matrix} \right\}_a a_{\mu\nu}\ ^{1}),$$

die geradezu als die Definitionsgleichungen der $\frac{1}{2}n^2(n+1)$ CHRISTOFFEL'schen Symbole $\left\{ \begin{matrix} \lambda\ \mu \\ \varkappa \end{matrix} \right\}_a$ angesehen werden können. In ihnen ersetze man die $\left\{ \begin{matrix} \lambda\ \mu \\ \varkappa \end{matrix} \right\}_a$ durch die aus (G') resultirenden Werthe, wobei nur $\left\{ \begin{matrix} 1\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}_a, \left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}_a, \ldots, \left\{ \begin{matrix} 1\ n \\ 1 \end{matrix} \right\}_a$ unbestimmt bleiben. Ferner substituire man für $a_{\lambda\mu}$ den Werth

$$a_{\lambda\mu} = e^{\omega_1 p_1 + \vartheta(p_2, \ldots, p_n)}\, p_2^{-(\varepsilon_{\lambda 1} + \varepsilon_{\lambda 2} + \varepsilon_{\mu 1} + \varepsilon_{\mu 2})} \cdot c_{\lambda\mu}(p_3, \ldots, p_n).$$

Auf diese Weise entstehen die Relationen:

$$(34) \quad \left\{ \begin{matrix} \left[p_2^{\varepsilon_{\mu 1} + \varepsilon_{\mu 2}} \cdot \dfrac{\partial(\omega_1 p_1 + \vartheta)}{\partial p_\mu} - \varepsilon_{\mu 2}(\varepsilon_{\varkappa 1} + \varepsilon_{\varkappa 2} + \varepsilon_{\lambda 1} + \varepsilon_{\lambda 2}) \right] c_{\varkappa\lambda} \\ + (1 - \varepsilon_{\mu 1})(1 - \varepsilon_{\mu 2}) \dfrac{\partial c_{\varkappa\lambda}}{\partial p_\mu} \end{matrix} \right.$$

$$= 2 \left\{ \begin{matrix} 1\ \mu \\ 1 \end{matrix} \right\}_{(a)} c_{\varkappa\lambda} + \left\{ \begin{matrix} 1\ \varkappa \\ 1 \end{matrix} \right\}_{(a)} c_{\lambda\mu} + \left\{ \begin{matrix} 1\ \lambda \\ 1 \end{matrix} \right\}_{(a)} c_{\varkappa\mu} + \sum_\nu \varphi_{\varkappa\mu\nu} c_{\lambda\nu} + \sum_\nu \varphi_{\lambda\mu\nu} c_{\varkappa\nu}.$$

Besonders wichtig sind unter diesen Gleichungen diejenigen, bei denen $\mu \neq 1, 2$ ist, denn sie sind linear und homogen in den $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{nn}$. Man erschliesst aus ihnen zunächst, dass

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}_{(a)} = \psi_{\lambda 11}(p_3, p_4, \ldots, p_n)$$

ist, sodass nach (G') ausnahmslos

---

1) Vergl. meine Abhandlung: *Ueber die Differentialgleichungen der Dynamik und über den Begriff der analytischen Aequivalenz dynamischer Probleme*, Journal für Mathematik, Bd. 107, 1891, S. 333, Formel (A*).

(G'') $$\begin{Bmatrix} \lambda\,\mu \\ \varkappa \end{Bmatrix}_a = p_2^{-\varepsilon_{\lambda\mu\varkappa}} \cdot \psi_{\lambda\mu\varkappa}(p_3, p_4, \cdots, p_n)$$

wird. Ferner ergiebt sich aus (34), dass nothwendig

(35) $$\omega_1 = 0$$

und

(36) $$\vartheta(p_2, \cdots, p_n) = \omega \log p_2$$

ist, wo ω eine Constante bedeutet. Mithin wird schliesslich:

(37) $$a_{\lambda\mu} = p_2^{\omega - (\varepsilon_{\lambda 1} + \varepsilon_{\lambda 2} + \varepsilon_{\mu 1} + \varepsilon_{\mu 2})} \cdot c_{\lambda\mu}(p_3, p_4, \cdots, p_n),$$

und nun ergiebt sich ohne Schwierigkeit, dass bei dieser Form von $a_{\lambda\mu}$ die $\frac{1}{2}(n-1)n(n+2)$ Bedingungsgleichungen (G) identisch erfüllt sind.

Damit ist das Linienelement ds bestimmt, man hat:

(38) $$ds^2 = \sum_{\lambda,\mu} p_2^{\omega - (\varepsilon_{\lambda 1} + \varepsilon_{\lambda 2} + \varepsilon_{\mu 1} + \varepsilon_{\mu 2})} \cdot c_{\lambda\mu}(p_3, p_4, \cdots, p_n)\, dp_\lambda\, dp_\mu.$$

5.

Zum Schluss sollen die Ergebnisse der vorhergehenden Rechnungen kurz zusammengestellt werden. Wir haben gefunden:

Sollen die ∞^1 natürlichen Familien der Bahncurven eines dynamischen Problems durch eine zweigliedrige Gruppe von Transformationen mit einander vertauscht werden, so lassen sich die erzeugenden infinitesimalen Transformationen entweder auf die Form

1) $$\boxed{\frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_2}}$$

oder auf die Form

2) $$\boxed{\frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2}}$$

bringen.

Behält man sich die nachträgliche Ausführung einer beliebigen Transformation von DARBOUX vor, so wird bei dem ersten Typus das Linienelement ds durch die Gleichung:

$$ds^2 = e^{\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2} \cdot \sum_{\lambda,\mu} c_{\lambda\mu}(p_3, p_4, \cdots, p_n)\, dp_\lambda\, dp_\mu,$$

bei dem zweiten Typus durch die Gleichung:

$$ds^2 = \sum_{\lambda,\mu}{}' p_2^{\omega-\varepsilon_{\lambda 1}-\varepsilon_{\lambda 2}-\varepsilon_{\mu 1}-\varepsilon_{\mu 2}} \cdot c_{\lambda\mu}(p_3, p_4, \ldots, p_n)\, dp_\lambda\, dp_\mu$$

gegeben; ω, ω_1, ω_2 bedeuten Constanten.

Die Kräftefunction hat bei dem ersten Typus entweder die Form

$$U = -\alpha p_1 - \alpha' p_2 + \Psi(p_3, p_4, \ldots, p_n)$$

oder die Form

$$U = e^{\alpha\beta p_1 + \alpha\beta' p_2} \cdot \Psi(p_3, p_4, \ldots, p_n),$$

und bei der zweigliedrigen Transformation:

$$\bar{p}_1 = p_1 + \tau, \quad \bar{p}_2 = p_2 + \tau', \quad \bar{p}_3 = p_3, \ldots, \bar{p}_n = p_n$$

wird die Familie (h) beziehungsweise in die Familie

$$h + \alpha\tau + \alpha'\tau'$$

oder in die Familie

$$e^{\alpha\beta\tau + \alpha\beta'\tau'} \cdot h$$

übergeführt.

Bei dem zweiten Typus ist entweder

$$U = \alpha' - \alpha p_1 + p_2 \cdot \Psi(p_3, p_4, \ldots, p_n)$$

oder

$$U = p_2^{\alpha\beta'} \cdot (\Psi(p_3, p_4, \ldots, p_n),$$

und bei der zweigliedrigen Transformation

$$\bar{p}_1 = e^{\tau'} \cdot (p_1 + \tau), \quad \bar{p}_2 = e^{\tau'} \cdot p_2, \quad \bar{p}_3 = p_3, \ldots, \bar{p}_n = p_n$$

wird die Familie (h) beziehungsweise in die Familie

$$e^{\tau'} \cdot (h + \alpha\tau)$$

oder in die Familie

$$e^{\alpha\beta'\tau'} \cdot h$$

übergeführt; bemerkenswerth ist, dass in diesem letzten Falle die Vertauschungen der Familien nur eine eingliedrige Gruppe bilden.

Die Grössen α, β, α', β' sind Constanten, die auch den Werth Null haben können; tritt dies ein, so können sich die Gruppen von h und U auf eingliedrige Gruppen oder auf die Identität reduciren, und es entstehen Ausartungen der allgemeinen Fälle, auf die einzugehen hier nicht erforderlich ist.

Kiel, den 2. Juli 1897.

E. Study in Greifswald, *Ueber die Invarianten der projectiven Gruppe einer quadratischen Mannigfaltigkeit von nicht verschwindender Discriminante.*

1.

Da meine Untersuchungen über Bewegungsinvarianten zufolge wiederholter Unterbrechungen nicht den gewünschten Fortgang genommen haben, so erlaube ich mir, im Folgenden einige Sätze darzulegen, die ursprünglich in einer auf den genannten Gegenstand bezüglichen Artikelreihe Platz finden sollten.

Bekannt ist der Zusammenhang, durch den erstens die Nicht-Euclidische Geometrie im Raume von $n - 1$ Dimensionen, zweitens die Geometrie der Inversionen im Raume von $n - 2$ Dimensionen, drittens die Geometrie der LIE'schen Kugeltransformationen im Raume von $n - 3$ Dimensionen, endlich auch im Falle $n = 6$ die Liniengeometrie im gewöhnlichen Raume mit der Theorie einer quadratischen Form von n Veränderlichen verbunden werden. Die Entwickelung einer Theorie der ganzen Invarianten der Gruppe von linearen Transformationen, die eine solche Form in ein Vielfaches ihrer selbst überführen, ist daher ein wichtiges Problem der der analytischen Geometrie zu Grunde liegenden Algebra. Die folgenden Sätze, bei deren Formulirung ich mich der in meinen »Methoden zur Theorie der ternären Formen« (Leipzig 1889) angewendeten Terminologie bediene, enthalten die Grundlage einer solchen Invariantentheorie.

I. *In dem System einer unbeschränkten Zahl von linearen Formen* (UX), (UY), ... (UX_k), ... *eines Gebietes* n^{ter} *Stufe giebt es, sobald* $n \geqq 3$ *ist, zwei Typen irreducibeler ganzer Invarianten der projectiven continuirlichen Gruppe* G *einer quadratischen Mannigfaltigkeit* M *von nicht verschwindender Discriminante* J, *nämlich eine symmetrische Invariante* (XY) *von je zwei Formen* (UX), (UY), *und eine alternirende Invariante* $(X_1 X_2 \ldots X_n)$ *von je* n *For-*

men. Jede ganze Invariante der gegebenen linearen Formen lässt sich durch Invarianten dieser beiden Typen rational und ganz ausdrücken.

Im Falle $n = 2$ giebt es einfachere, nämlich lineare Invarianten von je *einer* linearen Form; der Satz behält aber auch in diesem Falle seine Gültigkeit, wenn man geeignete Beschränkungen einführt (Methoden, I), wenn man nämlich das Punktepaar M oder die zugehörige quadratische Form als irreducibel voraussetzt und nur solche Grössen betrachtet, in deren Bereich die quadratische Form *nicht* in ein Product zweier linearer Formen zerlegt werden kann. Der folgende Satz erstreckt sich auch auf den Fall $n = 2$, in dem übrigens die eingeführte Bezeichnung zweideutig wird und daher durch eine andere zu ersetzen ist.

II. *Zwischen den Invarianten der beiden Typen* (XY), $(X_1 X_2 \dots X_n)$ *bestehen irreducibele Relationen, die wiederum zwei verschiedenen Typen angehören. Die des ersten Typus verbinden Invarianten von je* $n + 2$ *Formen in folgender Weise:*

$$(A)\quad \begin{aligned}&(X_1 X_2 \dots X_{n-1} X_n)(X_0 Y) + (-1)^n (X_2 X_3 \dots X_n X_0)(X_1 Y) + \\ &+ (X_3 X_4 \dots X_0 X_1)(X_2 Y) + \dots + (-1)^n (X_0 X_1 \dots X_{n-1})(X_n Y) = 0.\end{aligned}$$

Die Relationen des zweiten Typus verbinden Invarianten von je $2n$ *Formen; sie haben die Gestalt*

$$(B)\qquad \varrho \cdot (X_1 \dots X_n)(Y_1 \dots Y_n) - |(X_i Y_k)| = 0\,.$$

ϱ *bedeutet dabei einen Zahlenfactor, dessen Werth von der noch in gewissem Grade willkürlichen Bezeichnung* (XY), $(X_1 \dots X_n)$ *der beiden Invarianten abhängt (s. Nr. 25), und dessen Vorzeichen bei Beschränkung auf reelle Formen im Falle eines geraden Werthes von n mit dem Vorzeichen der Discriminante J übereinstimmt.*

Die linke Seite $G\{(XY), (X_1 \dots X_n)\}$ *einer jeden ganzen Function der beiden Invariantentypen, die als Function der Coefficienten der eintretenden Formen identisch verschwindet, kann durch identische (triviale) Umformungen*[1] *in Theile zerlegt werden, deren jeder einen Ausdruck vom Typus* (A) *oder* (B) *als Factor hat.*

Grössen des Typus (XY) existiren auch in dem trivialen Falle $n = 1$. In dem folgenden Satz unterliegt daher der Werth von n gar keiner Einschränkung.

1) Wegen dieses Begriffs s. »Methoden« II, § 6.

III. *Zwischen den Invarianten des Typus* (XY) *bestehen Relationen, die, reducibel im Bereiche der Grössen* (XY), $(X_1 \dots X_n)$, *irreducibel sind im Bereiche der Grössen* (XY) *allein.*

Sie gehören sämmtlich dem einen Typus

$$(C) \qquad |(X_i Y_k)| = 0 \qquad (i, k = 0, 1, \dots n)$$

an, verbinden also Invarianten von je $2n + 2$ *Formen.*

Der Fall $n = 3$ (der erste, der wirkliches Interesse hat) führt auf die Invariantentheorie der projectiven Gruppe eines Kegelschnittes in der Ebene. Der Satz I geht in diesem Falle durch das Hesse'sche Uebertragungsprincip ohne Weiteres aus einem Satze hervor, der sich schon in Clebsch's »Binären Formen« findet, und aussagt, dass in dem System einer unbegrenzten Zahl von binären quadratischen Formen nur Invarianten der beiden Typen $(ab)^2$ und $(ab)(ac)(bc)$ vorkommen. Der Satz II ergiebt sich dann für denselben Fall durch ein vom Verfasser angegebenes Verfahren[1]; auch kann er für den Fall $n = 2$ leicht unmittelbar begründet werden. — Der Verfasser hat bereits vor 1887 auf Grund dieser Bemerkungen verschiedene (bis jetzt nicht veröffentlichte) Untersuchungen angestellt[2]. Er bemerkte zur selben Zeit, dass sich der Satz I durch ein ähnliches Verfahren auch im Falle $n = 4$ begründen lässt. Später (1896) hat er sodann den Satz I als auch im Falle $n = 6$ richtig erkannt[3], und hat über gewisse Anwendungen dieses Satzes im Falle $n = 4$ auf der Naturforscherversammlung zu Frankfurt am Main einen Vortrag gehalten. Bald darauf ergab sich dem Verfasser jedoch die Richtigkeit der Sätze I, II, III für einen unbestimmten Werth von n; er hat demgemäss in einer im December 1896 an die Redaction der Math. Annalen abgeschickten Arbeit auf diese Erweiterung hingewiesen. Die auf die besonderen Fälle $n = 3, 4, 6$, sowie auch $n = 5$ bezüglichen Betrachtungen haben ein selbstständiges Interesse, und sollen bei späterer Gelegenheit veröffentlicht werden. Hier wollen wir zeigen, dass die Sätze I, II, III für den Werth $n = m + 1$ gültig sind, wenn sie für den Werth $n = m$ Geltung haben. Dabei darf als kleinster Werth

---

1) Math. Ann. Bd. 39 (1887) S. 120 oder »Methoden« II, § 6.

2) Hierauf bezieht sich die Anmerkung bei Gordan und Kerschensteiner (Binäre Formen, Leipzig 1887) S. 155.

3) Sächs. Ber. 13. Jan. 1896, S. 221.

von m bei dem Satze I, wie gesagt, der Werth $m = 3$ angenommen werden. Bei dem Satze II kann man auch schon $m = 2$ setzen. Der Satz III endlich kann unter der Voraussetzung begründet werden, dass er für den Werth $m = 1$ richtig ist. In diesem Falle ist er nämlich trivial, und bedarf keines besonderen Beweises.

Um die Darstellung zu erleichtern, werden wir zunächst voraussetzen, dass die gegebene quadratische Mannigfaltigkeit M durch eine gleich Null gesetzte Summe von $n = m + 1$ Quadraten

$$(1) \qquad X^{(0)}X^{(0)} + X^{(1)}X^{(1)} + \cdots + X^{(m)}X^{(m)}$$

dargestellt sei. Wir werden diese für den Beweisgang selbst übrigens *nicht* nöthige Beschränkung nachträglich wieder aufheben. Die zu untersuchende Gruppe G ist unter dieser Voraussetzung die Gruppe der eigentlichen orthogonalen Substitutionen der n Veränderlichen $X^{(0)} \ldots X^{(m)}$, denen die Coefficienten $X_k^{(i)}$ der zu betrachtenden linearen Formen (UX_k) zu unterwerfen sind. Dass wir der Determinante der auszuführenden Substitutionen den bestimmten Werth Eins beilegen, ist keine wesentliche Beschränkung, da nur allseitig-homogene Functionen der Grössen $X_k^{(i)}$ in Betracht kommen.

2.

Man sieht ohne Weiteres, dass die aus den Coefficienten linearer Formen $\Sigma U^{(i)}X^{(i)}$, $\Sigma U^{(i)}Y^{(i)}$, $\Sigma U^{(i)}X_k^{(i)}$ gebildeten Ausdrücke

$$(2) \qquad (XY) = X^{(0)}Y^{(0)} + X^{(1)}Y^{(1)} + \cdots + X^{(m)}Y^{(m)},$$

$$(3) \qquad (X_0X_1 \ldots X_m) = |X_i^{(k)}| \qquad (i, k = 0, 1, \ldots m)$$

thatsächlich Invarianten der Gruppe G sind, und zwar solche, die bei einer beliebigen Substitution der Gruppe den Factor $+1$ annehmen. Wir betrachten nun die Untergruppe von G, die entsteht, wenn man einen der Mannigfaltigkeit $(XX) = 0$ *nicht* angehörenden Punkt festhält [1]). Identificiren wir diesen Punkt

[1]) Wir bedienen uns der Kürze halber der Ausdrucksweise der Geometrie, indem wir die Grössen $X^{(i)}$ als homogene Coordinaten eines »Punktes« X ansehen.

vorläufig mit dem Punkt, der die Coordinaten (1, 0, ... 0) hat, so entsteht auf diese Weise eine continuirliche Gruppe g, die dargestellt wird durch die Gleichung $X^{(0)\prime} = X^{(0)}$ in Verbindung mit einer eigentlichen orthogonalen Substitution der $n - 1$ Veränderlichen $X^{(1)} \dots X^{(m)}$, und ausserdem entsteht eine zweite continuirliche Schaar von Substitutionen, die für das Folgende nicht in Betracht kommt. Jede Invariante von G ist selbstverständlich auch eine Invariante von g; die Invarianten von g aber lassen sich angeben. Zunächst sind die Grössen $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$, .,. solche; und da diese alle von einander unabhängig sind, so muss, bei Entwickelung irgend einer Invariante der Gruppe g nach Potenzen und Producten dieser Grössen, der Coefficient eines jeden einzelnen Gliedes ebenfalls eine Invariante von g sein. Diese Coefficienten sind dann nothwendig Invarianten der »verkürzten« Gruppe, die entsteht, wenn man unter den Gleichungen von g die erste $X^{(0)\prime} = X^{(0)}$ weglässt. Nach Voraussetzung (§ 1) sind alle diese Invarianten ganze Functionen der bilinearen Ausdrücke

4. $$[XY] = X^{(1)}Y^{(1)} + \cdots + X^{(m)}Y^{(m)}$$

und der Determinanten

5. $$[X_1 \dots X_m] = |X_i^{(k)}| \qquad (i, k = 1 \dots m);$$

jede ganze Invariante von g selbst ist also eine ganze Function von Invarianten der *drei* Typen $X^{(0)}$, $[YZ] = (YZ) - Y^{(0)}Z^{(0)}$, $[X_1 \dots X_m]$. Ersetzen wir jetzt den Punkt (1, 0 ... 0) durch einen beliebigen Punkt O (origo), für den $(OO) \neq 0$ ist, so geht g über in eine mit g gleichberechtigte Untergruppe g_0, und wir erhalten statt der angegebenen Ausdrücke die folgenden

6. $$\frac{(OX)}{\sqrt{(OO)}}, \quad (YZ) - \frac{(OY)(OZ)}{(OO)}, \quad \frac{(OX_1 \dots X_m)}{\sqrt{(OO)}} \quad \text{(vgl. Nr. 2, 3)}$$

als Invarianten von g_0. Die numerische Irrationalität $\sqrt{(OO)}$ kann hier auch weggelassen werden; es ist aber für das Folgende bequemer, sie beizubehalten.

Sei nun $\mathfrak{Z}$ eine Invariante von G, und folglich auch von g_0, so kann diese als ganze rationale Function der Ausdrücke (6) dargestellt werden; und da der willkürliche Punkt O in $\mathfrak{Z}$ nicht vorkommt, und $\sqrt{(OO)}$ sich nicht rational darstellen

wobei A'' einen Ausdruck der Form

$$-(OO)\cdot\{(X_0X_1\dots X_m)(OY)+(-1)^{m+1}(X_1\dots X_mO)(X_0Y)+$$
$$+(X_2\dots OX_0)(X_1Y)+\cdots\}+$$
$$+(OY)\cdot\{(X_0X_1\dots X_m)(OO)+(-1)^{m+1}(X_1\dots X_mO)(X_0O)+$$
$$+(X_2\dots OX_0)(X_1O)+\cdots\},$$

B'' aber einen Ausdruck der Form:

$$(OO)^{m-1}(OX_1\dots X_m)(OY_1\dots Y_m)-|(OO)(X_iY_k)-(OX_i)(OY_k)|=$$
$$=(OO)^{m-1}\{(OX_1\dots X_m)(OY_1\dots Y_m)-|(OO)(X_1Y_1)\dots(X_mY_m)|\}$$

vorstellt; und die rechte Seite von (11) ist durch eine triviale Umformung der linken entstanden, durch eine solche Umformung also, bei der die zugefügten und weggenommenen Glieder einander gegenseitig zerstören. Nun ist aber B'' ein Vielfaches eines (speciellen) Ausdrucks B, und A'' ebenso ein Aggregat zweier Ausdrücke A.

Wir können also die beiden Summanden rechts in (11) zusammenfassen und kürzer schreiben:

$$(12)\qquad (OO)^l\cdot\mathfrak{Z}=\mathfrak{G}'(A,B).$$

Diese Formel stellt einen Specialfall des Satzes II dar. Sie würde sich auf diesen selbst reduciren, wenn nicht links und rechts der Hülfspunkt O vorhanden wäre. Um diesen zu beseitigen, operiren wir wieder auf beiden Seiten von (12) mit Ψ. Dadurch geht aus der trivialen Gleichung (12) selbstverständlich wieder eine triviale Gleichung hervor; es bleibt aber noch nachzuweisen, dass $\Psi\mathfrak{G}'$ wiederum ein Aggregat von Ausdrücken A, B ist. Dazu ist zu zeigen, erstens, dass Ψ auf einen Ausdruck A oder B angewendet, der O zweimal enthält, ein solches Aggregat hervorbringt, zweitens, dass dasselbe der Fall ist, wenn man Ψ auf ein Product $\mathfrak{Z}'\cdot A$ oder $\mathfrak{Z}'\cdot B$ anwendet, wo A, B und $\mathfrak{Z}'$ den Punkt O je einmal enthalten. Im ersten Falle erhält man identisch Null; es bleibt also nur noch der zweite zu untersuchen. Producte $\mathfrak{Z}'\cdot A$ giebt es vier verschiedene Arten, da $\mathfrak{Z}'=(OZ)$ oder $=(OZ_1\dots Z_m)$ sein kann, und O auf zwei verschiedene Weisen in A eintreten kann. In allen vier Fällen erhält man ohne Weiteres Aggregate von Ausdrücken A, B. Ebenso im Falle $(OZ)\,B$. Es bleibt also nur noch

$$\Psi(OZ_1Z_2 \dots Z_m) \cdot \{(OX_1 \dots X_m)(Y_0Y_1 \dots Y_m) - \left|\begin{matrix}(O\,Y_0)(O\,Y_1) \dots (O\,Y_m)\\(X_1Y_0)(X_1Y_1) \dots (X_1Y_m)\\ \cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot\\(X_mY_0)(X_mY_1) \dots (X_mY_m)\end{matrix}\right| \} =$$

(13)

$$= (Y_0Y_1 \dots Y_m) \cdot |(X_iZ_k)| - \left|\begin{matrix}(Y_0Z_1 \dots Z_m) \dots (Y_mZ_1 \dots Z_m)\\(Y_0X_1) \quad \dots \quad (Y_mX_1)\\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\(Y_0X_m) \quad \dots \quad (Y_mX_m)\end{matrix}\right|$$

zu untersuchen. Die identisch verschwindende Grösse rechts ist aber ein Aggregat von Ausdrücken A. Addirt man nämlich zu ihr geeignete Vielfache der folgenden Ausdrücke A:

$$-(Y_0 \dots Y_m)(Z_kX_1) + (Z_kY_1 \dots Y_m)(Y_0X_1) +$$
$$+ (Y_0Z_k \dots Y_m)(Y_1X_1) + \cdots,$$

so entsteht eine Summe von Vielfachen der in X_1 linearen Formen $(Y_0X_1) \dots (Y_mX_1)$. Da diese Formen linear-unabhängig sind, so muss in dem erhaltenen Ausdruck der Coefficient von (Y_kX_1) für sich genommen identisch verschwinden $(k = 0 \dots m)$. Es bleibt also zu zeigen, dass alle diese Coefficienten, z. B. der von Y_0X_1:

(14)

$$\left|\begin{matrix}(Z_1Y_1 \dots Y_m) \dots (Z_mY_1 \dots Y_m)\\(X_2Z_1) \quad \dots \quad (X_2Z_m)\\ \cdot \quad \dots \quad \cdot\\(X_mZ_1) \quad \dots \quad (X_mZ_m)\end{matrix}\right| +$$
$$+ \left|\begin{matrix}(Y_1Z_1 \dots Z_m) \dots (Y_mZ_1 \dots Z_m)\\(X_2Y_1) \quad \dots \quad (X_2Y_m)\\ \cdot \quad \dots \quad \cdot\\(X_mY_1) \quad \dots \quad (X_mY_m)\end{matrix}\right|$$

Aggregate von Ausdrücken A sind.

Entwickelt man nun in (14) die erste Determinante links nach den zweireihigen, den beiden ersten Reihen zu entnehmenden Unterdeterminanten, und fügt man wieder geeignete Vielfache von A hinzu, so entsteht eine Summe von Vielfachen der

Formen $(Y_1 X_2) \ldots (Y_m X_2)$. Hier muss wiederum jeder einzelne Coefficient identisch Null sein. Es bleibt also noch zu zeigen, dass z. B. der Coefficient von $(Y_1 X_2)$ ein Aggregat von Ausdrücken A ist. Der genannte Coefficient ist nun gleich dem Coefficienten von $(Y_1 X_2)$ in der zweiten Determinante unter (14), vermehrt um eine Summe, deren Glieder aus der ersten Determinante dadurch hervorgehen, dass man in der gewählten Entwickelung an Stelle von

$$\begin{vmatrix} (Z_\alpha Y_1 \ldots Y_m) & (Z_\beta Y_1 \ldots Y_m) \\ (X_2 Z_\alpha) & (X_2 Z_\beta) \end{vmatrix}$$

die Grösse $(Z_\alpha Z_\beta Y_2 \ldots Y_m)$ setzt. Nunmehr bediene man sich von Neuem der gleichen Schlussweise, indem man, vermöge (A), alle Summen

$$(Z_\beta Z_\gamma Y_2 \ldots Y_m)(Z_\alpha X_2) + (Z_\gamma Z_\alpha Y_2 \ldots Y_m)(Z_\beta X_2) + \\ + (Z_\alpha Z_\beta Y_2 \ldots Y_m)(Z_\gamma X_2)$$

umgestaltet. Offenbar kann man in dieser Weise fortfahren. Bei jedem Schritt aber vermindert sich die Zahl der linearen Formen, die in die einzelnen zu betrachtenden Ausdrücke eintreten, um zwei. Man kommt schliesslich, nach $(m-1)$-maliger Wiederholung des Verfahrens, auf lauter Ausdrücke (A). Damit ist dann die ganze Reihe der Ausdrücke (13), (14), ... als je eine Summe von Vielfachen von (A) dargestellt.

Hiermit ist der Satz II bewiesen. Ganz ähnlich, aber einfacher, gestaltet sich der Beweis des Satzes III; wir glauben daher auf dessen Wiedergabe verzichten zu dürfen.

4.

Wir bringen nunmehr die aufgestellten Sätze noch in eine andere Form, die deren Tragweite deutlicher erkennen lässt. Wir heben sodann die Beschränkung auf, die darin liegt, dass wir die quadratische Mannigfaltigkeit M durch eine gleich Null gesetzte Summe von Quadraten dargestellt hatten. Endlich ziehen wir, statt der bisher allein untersuchten continuirlichen Gruppe G die (im Falle eines geraden Werthes von n umfassendere sogenannte gemischte) Gruppe in Betracht, die *alle* collinearen Transformationen der Mannigfaltigkeit M enthält.

Zunächst ist eine unmittelbare Folge des Satzes I der folgende allgemeinere Satz:

Alle ganzen Invarianten beliebiger algebraischer Formen gegenüber der zur quadratischen Form (1) *gehörigen Gruppe G entstehen aus diesen Formen, nachdem man sie in verschiedenen Veränderlichen geschrieben hat, durch wiederholte Anwendung der beiden Processe*

$$\Psi = \frac{\partial^2}{\partial X^{(1)} \partial Y^{(1)}} + \frac{\partial^2}{\partial X^{(2)} \partial Y^{(2)}} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial X^{(n)} \partial Y^{(n)}},$$

$$\Omega = \left| \frac{\partial}{\partial X_i^{(k)}} \right| \qquad (i, k = 0 \ldots n);$$

oder, in einer, wie wir sehen werden, allgemeineren, und auch für die geometrischen Anwendungen zweckmässigeren Fassung:

I*. *Alle ganzen Invarianten beliebiger algebraischer Formen gegenüber der Gruppe G lassen sich darstellen als symbolische Producte mit Factoren der beiden Typen* (PQ), $(P_1 P_2 \ldots P_n)$.

Hierzu gehört als Ergänzung:

II*. *Alle identischen Relationen zwischen solchen Invarianten lassen sich ermitteln durch sogenannte symbolische Rechnung mit Hülfe der beiden Identitäten* (A), (B).

Handelt es sich nur um die Invarianten einer einzigen Grundform mit einer Veränderlichen, also um Invarianten einer Form $(AX)^m$ oder $(UP)^m$, so fällt der Ω-Process weg; es bleiben nur Factoren des ersten Typus, und an Stelle der Identitäten (A) und (B) tritt oder kann wenigstens treten (»Satz III*«) die Identität (C).

Nachdem hiermit die Tragweite der Sätze I bis III bezeichnet ist, beschränken wir uns weiterhin der Einfachheit halber wieder auf lineare Formen.

Wir nehmen an, es sei im Gebiet n^{ter} Stufe eine quadratische Form

$$(15) \qquad \{LX\}^2 = \{L_1 X\}^2 = \cdots = \Sigma a_{ik} X^{(i)} X^{(k)}$$

vorgelegt, mit der (zur allgemeinen projectiven Gruppe gehörigen) Covariante

$$(16) \qquad \{UA\}^2 = \frac{1}{(n-1)!} \{L_1 L_2 \ldots L_{n-1} X\}^2,$$

und es werde angenommen, dass die Invariante

$$J = \frac{1}{n}\{LA\}^2 = |a_{ik}| \tag{17}$$

von Null verschieden ist[1]).

Eine lineare Transformation $X^{(k)'} = \sum_i c_{ik} X^{(i)}$, oder besser

$$\{S_1 X\}\{U\Sigma_1\} = \{S_2 X\}\{U\Sigma_2\} = \Sigma c_{ik} X^{(i)} U^{(k)} = 0 \tag{18}$$

mit der Determinante

$$A = \frac{1}{n!}\{S_1 \dots S_n\}\{\Sigma_1 \dots \Sigma_n\} = |c_{ik}| \tag{19}$$

führt die Form $\{LX\}^2$ in ein Vielfaches ihrer selbst über unter einer der beiden mit einander äquivalenten Bedingungen:

$$\begin{aligned} &J \,.\, \{L\Sigma_1\}\{L\Sigma_2\}\{S_1 X\}\{S_2 X\} \quad - \Pi \cdot \{LX\}^2 = 0\,, \\ &J \,.\, \{S_1 A\}\{S_2 A\}\{U\Sigma_1\}\{U\Sigma_2\} - \Pi \cdot \{UA\}^2 = 0\,, \end{aligned} \tag{20}$$

wobei die Bedeutung von Π durch

$$n \,.\, \Pi = \{S_1 A\}\{S_2 A\}\{L\Sigma_1\}\{L\Sigma_2\} \tag{21}$$

gegeben ist.

Wir erklären nun die Zeichen (XY) *und* $(X_1 \dots X_n)$ *in einer allgemeineren Weise als bisher* (§ 2, Nr. 2, 3), nämlich, unter Annahme zweier beliebiger von Null verschiedener Grössen η, ϑ, wie folgt:

$$(XY) = \eta \cdot \{LX\}\{LY\} \tag{22}$$

$$(X_1 \dots X_n) = \vartheta \cdot \{X_1 \dots X_n\}\,. \tag{23}$$

Unterwerfen wir nun diese Ausdrücke der den Gleichungen (20) genügenden Transformation (18), so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} (X'Y') &= J^{-1} \cdot \Pi \cdot (XY)\,, \\ (X'_1 \dots X'_n) &= A \cdot (X_1 \dots X_n)\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Diese Ausdrücke sind also *Invarianten* der zu der quadratischen Mannigfaltigkeit $\{LX\}^2 = 0$ gehörigen Gruppe G; und da sie, bei geeigneter Coordinatenwahl, in die in § 2 und § 3 näher

---

1) Zum Unterschiede von der für die Invarianten der Gruppe G zu verwendenden Bezeichnung bedienen wir uns hier, soweit es sich um gewöhnliche projective Invarianten handelt, geschweifter Klammern. Im Uebrigen sind die Bezeichnungen die bekannten, also $\{UX\} = \Sigma U^{(i)} X^{(i)}$, $\{X_1 X_2 \dots X_n\} = |X_k^{(i)}|$, u.s.w. X, A, Σ, ... werden bei einer Aenderung des Coordinatensystems cogredient, U, L, S, ... zu diesen contragredient transformirt.

untersuchten speciellen Ausdrücke übergehen, so bilden sie das *vollständige* Invariantensystem der Formen (UX), (UY), (UX_k), $\ldots$. Sie erfüllen ferner identisch die Gleichungen (A), (B), (C), sofern man die Grösse ϱ aus der Gleichung bestimmt:

(25) $$\varrho \cdot \mathfrak{Y}^2 = J \cdot \eta^n .$$

Es ergiebt sich hieraus, dass, wie behauptet, im Falle einer reellen Form $\{LX\}^2$ und eines geraden n das Vorzeichen von ϱ mit dem der Discriminante J der quadratischen Form übereinstimmen muss.

Da die Gleichung (B) eine Identität ist, so muss sie auch richtig bleiben, wenn man in ihr an Stelle von (XY) u. s. w. die Werthe $(X'Y')$ der transformirten Invarianten substituirt. Hieraus ergiebt sich eine identische Relation zwischen den Grössen Δ, J, Π

(26) $$\Delta^2 \cdot J^n = \Pi^n .$$

Wir müssen nun weiterhin zwei Fälle unterscheiden, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Sei n zunächst *gerade*, so giebt es zwei continuirliche Schaaren von automorphen linearen Transformationen der Mannigfaltigkeit $\{LX\}^2 = 0$. Die einen, die die Gruppe G der »*eigentlichen*« linearen Transformationen dieser Mannigfaltigkeit bilden, sind gekennzeichnet durch das Bestehen der Gleichung

(26 a) $$\Delta \cdot J^{\frac{n}{2}} = \Pi^{\frac{n}{2}} ,$$

die anderen, die Schaar H der »*uneigentlichen*« automorphen Transformationen von $\{LX\}^2 = 0$, durch das Bestehen der Gleichung

(26 b) $$-\Delta \cdot J^{\frac{n}{2}} = \Pi^{\frac{n}{2}} .$$

Im ersten Falle können wir die $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{te}}$ Wurzel D_e aus Δ rational erklären durch

(26 aa) $$D_e \cdot J = \Pi ,$$

im zweiten die $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{te}}$ Wurzel D_u aus $-\Delta$ durch

(26 bb) $$D_u \cdot J = \Pi .$$

Wir nennen die so definirte Grösse in jedem Falle die »*Discriminante*« der bilinearen Form $\{SX\}\{U\Sigma\}$, oder auch,

wiewohl nicht ganz genau, der Transformation $\{SX\}\{U\Sigma\} = 0$. Diese Grösse ist immer von Null verschieden, wenn die Determinante Δ von Null verschieden ist; auch überzeugt man sich sofort davon, dass bei Ausführung mehrerer Transformationen hinter einander zugleich mit $\{SX\}\{S'\Sigma\}\{U\Sigma'\} = \{S''X\}\{U\Sigma''\}$ jedesmal die entsprechende von den Gleichungen besteht:

(27 a, b) $D_e D'_e = D''_e$, $D_e D'_u = D''_u$, $D_u D'_e = D''_u$, $D_u D'_u = D''_e$.

Nunmehr können wir die Gleichungen (24) durch die folgenden ersetzen:

(24 a)
$$(X'Y') = D_e \cdot (XY)$$
$$(X'_1 \dots X'_n) = D_e^{\frac{n}{2}} \cdot (X_1 \dots X_n),$$

(24 b)
$$(X'Y') = D_u \cdot (XY)$$
$$(X'_1 \dots X'_n) = -D_u^{\frac{n}{2}} \cdot (X_1 \dots X_n).$$

Berücksichtigen wir noch, dass man zufolge der Identität (B) die Annahme machen darf, dass in dem Ausdruck einer Invariante der Gruppe (G, H) keine zwei Factoren des Typus $(X_1 \dots X_n)$ mit einander multiplicirt auftreten, so ergiebt sich:

IV a, b. *Ist n eine gerade Zahl, so hat die Gruppe (G, H), die zu der quadratischen Mannigfaltigkeit M gehört, zwei verschiedene Arten von Invarianten, die man als Invarianten »geraden« und »ungeraden« Charakters unterscheiden kann.*

Die Invarianten der ersten Art sind ganze Functionen der Typen (XY) allein, die der anderen Art enthalten ausserdem in jedem Glied einen Factor des Typus $(X_1 \dots X_n)$ (Nr. 22, 23). *Bei Ausführung einer automorphen linearen Transformation der Mannigfaltigkeit M werden beide Arten von Invarianten mit einer Potenz der Transformationsdiscriminante reproducirt, und die Invarianten ungeraden Charakters wechseln ausserdem das Vorzeichen, wenn die Transformation uneigentlich ist.*

Die der continuirlichen Gruppe G der eigentlichen Transformationen von M eigenthümlichen Invarianten sind Summen $J_+ + J_-$ *von je einer Invariante geraden und einer Invariante ungeraden Charakters von (G, H). Sie sind paarweise »conjugirt«:* $J_+ + J_-$, $J_+ - J_-$. *Je zwei solche conjugirte Invarianten werden durch die uneigentlichen Transformationen von M mit einander vertauscht. Ihre Summe und ihr Product ist je eine Invariante geraden Charakters von (G, H).*

Sei zweitens n eine *ungerade* Zahl, so ist die Gruppe der automorphen Transformationen der Mannigfaltigkeit M continuirlich; die bei den orthogonalen Substitutionen noch mögliche Unterscheidung in »eigentliche« und »uneigentliche« Transformationen kommt in Wegfall. Man kann jetzt eine Grösse D als »*Substitutionsdiscriminante*« rational erklären durch die Gleichungen:

$$D^2 J = \Pi, \quad D^n = \Delta. \tag{26c}$$

Es wird dann, wie oben, wenn man zwei Transformationen hinter einander ausführt,

$$D D' = D''. \tag{27c}$$

Die Gleichungen (24) nehmen die Form an:

$$\begin{aligned} (X'Y') &= D^2 \cdot (XY) \\ (X_1' \dots X_n') &= D^n \cdot (X_1 \dots X_n). \end{aligned} \tag{24c}$$

IVc. *Ist n eine ungerade Zahl, so sind die Invarianten der Gruppe G, die der quadratischen Mannigfaltigkeit M zugehört, theils »geraden«, theils »ungeraden« Charakters. Die Invarianten der ersten Art sind Functionen der Typen (XY) allein; die der zweiten enthalten ausserdem in jedem Glied einen Factor des Typus* $(X_1 \dots X_n)$. *Die einen nehmen bei einer Transformation der Gruppe G eine gerade, die anderen eine ungerade Potenz der Transformationsdiscriminante als Factor an.*

Hiermit ist die in Aussicht genommene allgemeine Gestalt der Sätze I, II, III hergestellt. Was die durch die Zahlenfactoren ϑ, τ_i eingeführte Willkür anlangt, so ist es natürlich am bequemsten, diese Grössen gleich Eins zu setzen; ebenso wird man in vielen Fällen der Invariante J, die hier ebenfalls die Rolle einer numerischen Grösse spielt, ohne Schaden den Werth $+1$ oder -1 beilegen können. Es ist indessen bei gewissen Anwendungen zweckmässig, die Bezeichnungen in anderer Weise zu specialisiren. Aus diesem Grunde haben wir die Grössen τ_i, ϑ und J unbestimmt gelassen.

5.

Es ist nicht unsere Absicht, die begonnene Untersuchung jetzt weiter zu führen. Doch sollen noch einige allgemeine Bemerkungen hier Platz finden.

Betrachten wir zunächst kurz die Beziehung der Invariantentheorie unserer Gruppe G zu der gewöhnlichen Invariantentheorie der allgemeinen projectiven Gruppe Γ.

Aus dem Gesagten geht ohne Weiteres hervor, dass die Invarianten irgend welcher Formen mit Veränderlichen eines Gebietes n^{ter} Stufe rationale Functionen von gewissen simultanen Invarianten der Gruppe Γ sind: Man kann, um alle Invarianten der gegebenen Formen in Bezug auf G zu erhalten, so verfahren, dass man dem gegebenen System zunächst die quadratische Form $\{LX\}^2$ hinzufügt, und in dem erweiterten System die Invarianten in Bezug auf Γ bildet. Behandelt man dann die Invariante J als eine reine Zahl — so dass also auch J^{-1} im Ausdruck einer »ganzen« Invariante zugelassen wird — und entfernt man demgemäss in dem gefundenen System alle Invarianten, deren Product mit irgend einer Potenz von J durch andere Invarianten ausdrückbar wird, verbindet man schliesslich die übrig bleibenden Invarianten nach Vorschrift des Satzes IV, so erhält man alle Invarianten der vorgelegten Formen gegenüber der Gruppe G.

Verbindet man diese einfache Bemerkung mit dem von Herrn Hilbert bewiesenen Satz von der Endlichkeit der Invariantensysteme der Gruppe Γ, so ergiebt sich derselbe Satz auch für die Gruppe G (oder G, H)[1]. Allerdings wird es nicht zweckmässig sein, im concreten Falle die vorhandenen irreducibelen Invarianten gerade auf diese Weise ermitteln zu wollen. Vielmehr führen, in einfachen Fällen, die Sätze I, II, III selbst und aus ihnen sich ergebende Folgesätze viel schneller zum Ziel. Die grössere Einfachheit der Invariantentheorie der Gruppe G im Vergleich zu der der Gruppe Γ ist hauptsächlich darin begründet, dass bei der ersten die Unterscheidung von sogenannten contragredienten Veränderlichen in Wegfall kommt oder doch ihre eigentliche Bedeutung verliert. Man sieht das sofort, wenn man die quadratische Form $\{LX\}^2$ als Summe von Quadraten schreibt; die damit ermöglichte Reduction selbst aber ist,

1) Dieses Resultat ist neuerdings durch eine von der unsrigen verschiedene (nämlich transcendente) Methode von Herrn Hurwitz abgeleitet worden (Gött. Nachr. 1897, S. 1). In den Fällen $n = 3, 4, 6$ ist der Satz übrigens eine unmittelbare Folge des Satzes von der Endlichkeit der Formensysteme binärer, doppelt-binärer und quaternärer Formen.

wie unschwer zu erkennen, von dieser besonderen Voraussetzung unabhängig, und kann in allen Fällen geleistet werden. Sie hat zur Folge eine einfachere Fassung des Begriffs der Covariante. So braucht man im Falle $n = 3$ als »Covarianten« (im engeren Sinne) nur die simultanen Invarianten der vorgelegten Formen mit *einer* veränderlichen linearen Form zu erklären, während in der Theorie der Gruppe Γ bekanntlich deren zwei, durch contragrediente Substitutionen zu transformirende in Betracht gezogen werden müssen. Beispielsweise besteht das »vollständige Formensystem« einer ternären quadratischen Form $(AX)^2 = (BX)^2 = \cdots$ in der Theorie der zu der quadratischen Form $\{LX\}^2$ gehörigen Gruppe G nur aus den folgenden sieben Formen:

$$(XX),\ (AX)^2,\ (AA),\ (HX)^2 = (AB)(AX)(BX),$$
$$(AB)^2,\ (AHX)(AX)(HX),\ (AB)(AC)(BC),$$

während in der Theorie der Gruppe Γ das entsprechende Formensystem zweier ternärer quadratischer Formen $\{LX\}^2$, $\{AX\}^2$, das von Gordan aufgestellt worden ist, zwanzig Formen umfasst. Hiermit hängt zusammen das Auftreten gewisser der Gruppe G eigenthümlicher Reihenentwickelungen[1]). Im Falle $n = 3$ kann man daher das Problem, ein vollständiges Formensystem gegebener Grundformen zu ermitteln, auf ein einfacheres zurückführen, in dem nur Grundformen $(A_iX)^{m_i}$ auftreten, die *eine* Veränderliche X (nach der gewöhnlichen Ausdrucksweise ein Veränderlichensystem $X^{(1)} : X^{(2)} : X^{(3)}$) enthalten, und überdies durch das identische Verschwinden der Covariante $(A_iA_i)(A_iX)^{m_i-2}$ ausgezeichnet sind. Eine ähnliche, aber verwickeltere Reduction ist auch in höheren Fällen möglich. Uebrigens bieten die Sätze I—IV auch ohne weitere Entwickelungen abstracter Natur schon die Mittel zur erschöpfenden Behandlung gewisser algebraisch-geometrischer Aufgaben. Als Beispiel mag die Bestimmung aller Liniencomplexe im Raume erwähnt werden, die von einem quadratischen Liniencomplex auf rationale Weise abhängen, und mit ihm invariant verknüpft sind. Dieses Problem erfordert die Bestimmung aller simultanen Invarianten im System eines quadratischen und eines linearen Complexes.

---

1) Die wichtigste von diesen hat der Verfasser bereits untersucht: Sächs. Ber. 1890, S. 172.

Es giebt zwölf solcher Invarianten, die durch eine einzige Relation verknüpft sind. Mit ihrer Hülfe kann man die Gleichungen der fraglichen Complexe ohne Weiteres hinschreiben. Ebenso leicht kann man, bei einer unbestimmten Zahl von Veränderlichen, alle covarianten Kugelcomplexe eines quadratischen Kugelcomplexes ermitteln. Als eine Anwendung von ganz anderer Art sei die Theorie des Apollonischen Berührungsproblems erwähnt [1]).

Betrachtet man nur solche lineare Transformationen der quadratischen Mannigfaltigkeit M, die einen Punkt O allgemeiner Lage in Ruhe lassen, so entsteht, mag n nun gerade oder ungerade sein, eine aus zwei continuirlichen Schaaren von Transformationen bestehende Gruppe (g_0, h_0). Die grundlegenden Sätze der Invariantentheorie der Gruppe g_0 und (g_0, h_0) sind im Vorhergehenden schon implicite enthalten, und sollen daher hier nicht weiter entwickelt werden. Das beschriebene Verfahren lässt sich aber auch noch auf andere Gruppen anwenden, so auf die Gruppe der *Euclidischen Bewegungen* in einer beliebigen Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen. Auf die Bewegungen im dreifach ausgedehnten Euclidischen oder Nicht-Euclidischen Raume und deren algebraische Untergruppen denkt der Verfasser noch näher einzugehen. —

Herr S. Lie hat kürzlich den Wunsch ausgedrückt, ich möchte die Stellung meiner auf einige besondere algebraische Gruppen bezüglichen Untersuchungen zu seiner allgemeinen Theorie der Transformationsgruppen näher bezeichnen. Ich kann mich zunächst nur Dem anschliessen, was Herr Lie selbst sagt, dass nämlich seine Theorie »alle Fragen nach Invarianten, Differentialinvarianten, Differentialparametern, sowie nach den *analytischen* Kriterien der Aequivalenz innerhalb einer Gruppe« beantwortet« (soweit sich nämlich solche Fragen allgemein beantworten lassen). Hieraus folgt indessen noch nicht (was, wie ich höre, von Einigen aus den angeführten Worten herausgelesen worden ist), dass die Lie'sche Theorie die *algebraische* Invariantentheorie der allgemeinen projectiven Gruppe oder ihrer algebraischen Untergruppen umfasst oder der Anlage nach umfasst. Es ist wohl zu beachten, dass diese übrigens grossentheils noch in den Anfängen stehenden Theorien den ganzen Raum

1) Math. Annalen. Bd. 49 (1897) Heft III.

umspannen, während die allgemeine Theorie der Transformationsgruppen mit ihrem »analytischen« Invariantenbegriff und den zugehörigen Aequivalenzkriterien sich immer nur auf die Umgebung einer gewissen Stelle bezieht, und eben um ihrer Allgemeinheit willen mehr auch gar nicht leisten kann. Man könnte nun bei der Behandlung einer bestimmten algebraischen Gruppe allerdings versuchen, zunächst die allgemeine Theorie der Transformationsgruppen auf diese Gruppe anzuwenden, und dann nachträglich auch noch den Forderungen der Algebra gerecht zu werden. Indessen ist dieser Weg kaum gangbar, und thatsächlich ist noch bei keiner speciellen Gruppe eine algebraische mit *ganzen* Functionen arbeitende Invariantentheorie auf solche Weise zu Stande gekommen. Selbst die Ermittelung der »analytischen« Invarianten z. B. der oben erwähnten Figur, die aus einem quadratischen und einem linearen Kugelcomplex eines höheren Raumes besteht, würde nach dem Lie'schen Verfahren zum Mindesten eine höchst mühevolle Arbeit sein. Aber selbst wenn es gelingen sollte, die hier (wenn man von trivialen Gruppen absieht) sich bietenden grossen Schwierigkeiten zu überwinden, so würde immer noch der Einwand bleiben, dass algebraische Sätze auf nicht-algebraischem Wege begründet wären. — Hiermit ist durchaus nicht gesagt, dass die Lie'schen Theorien nicht auch für solche, wie wir anerkennen, *specielle* Probleme von der grössten Bedeutung wären. Eben der Umstand, dass sie, angewendet auf besondere und namentlich auf algebraische Gruppen, eine Menge von Fragen offen lassen, enthält ja den grössten Reiz zu weiterer Forschung. Sie werden sicherlich fortfahren, in immer steigendem Maasse befruchtend auf die Entwickelung der Algebra und der zugehörigen Geometrie einzuwirken.

SITZUNG VOM 2. AUGUST 1897.

Vorträge hielten:

1. Herr **J. Wislicenus**, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung des Herrn R. Boehm, o. M., Das südamerikanische Pfeilgift Curare in chemischer und pharmakologischer Beziehung. II. Theil (Schluss), für die »Abhandlungen.«
2. Herr **M. v. Frey**, ao. M.: Beiträge zur Sinnesphysiologie der Haut.

Max von Frey, *Beiträge zur Sinnesphysiologie der Haut.* Vierte Mittheilung.

In früheren Mittheilungen habe ich Verfahrungsweisen angegeben, um die für mechanische Einwirkungen empfindlichsten Punkte der Haut (die sog. Druckpunkte) aufzufinden und habe erwähnt, dass ihre Vertheilung auffallend übereinstimmt mit dem Vorkommen eigenthümlicher Nervenendigungen in der Haut. Dieser Befund entbehrt nicht eines gewissen anatomischen Interesses, weil er die Anwesenheit dieser Nervenendigungen in der Haut vorher bestimmen lässt; physiologisch lässt sich aber wenig damit anfangen, solange nicht gezeigt werden kann, dass die Leistungen der Haut als Tastorgan durch die Anwesenheit und Eigenschaften dieser Punkte bedingt sind.

Unter Tastleistungen ist hier die Summe derjenigen Erregungen gemeint, welche durch nicht schmerzhafte, mechanische Einwirkungen auf die Haut entstehen. Die Erregungen in Folge thermischer Einwirkungen, welche gewöhnlich auch zu den Leistungen des Tastsinnes gerechnet werden, bleiben gegenwärtig ausser Betracht.

Wie ich bei einer anderen Gelegenheit ausgeführt habe, wirken mechanische Reize nur dann erregend, wenn sie zu einer Deformation der Haut führen. Solcher Deformationen giebt es eine unendliche Mannigfaltigkeit; im Wesentlichen kommt es jedoch immer darauf heraus, dass der natürliche

Gewebsdruck entweder gesteigert oder vermindert wird. Man kann den ersteren Fall kurzweg als *Druck*, den letzteren als *Zug* bezeichnen.

Bei den meisten durch äussere Reize hervorgebrachten Deformationen, namentlich aber bei den spontanen Gestaltsveränderungen des Körpers, treten in der Haut Druck- und Zugwirkungen gleichzeitig auf. Es werden stets gewisse Hautbezirke gespannt, andere entspannt. Da nun die Hautoberfläche nirgends eben, sondern nach aussen oder innen gewölbt ist, so wird die Anspannung einer nach aussen gewölbten (nach aussen convexen) Hautfläche oder ihre stärkere Krümmung als Druck, ihre Abflachung oder Spannungsverminderung als Zug wirken. Gerade umgekehrt verhält es sich mit den analogen Veränderungen nach innen gewölbter Flächen. An der Hand, dem Fusse, den Lippen lassen sich durch spontane Bewegungen Aenderungen des Gewebsdruckes und die begleitenden Empfindungen leicht hervorrufen. Dass diese Druckänderungen nicht unbeträchtlich sind, geht schon daraus hervor, dass sie häufig zum Erblassen vorher gerötheter Stellen, d. h. zur Compression der Capillaren Veranlassung geben.

Dass die auf der Haut ermittelten sog. Druckpunkte zur Erregung durch Druckreize besonders geeignet sind, habe ich in früheren Mittheilungen gezeigt. Es entsteht nun die Frage: Werden durch Zugreize dieselben Punkte oder andere bisher nicht bekannte sensible Organe der Haut erregt? Dieser Frage, welche ich schon früher gestreift habe, bin ich in den letzten beiden Monaten näher getreten, wobei ich mich der eifrigen Mitarbeiterschaft des Herrn Professor Gaylord P. Clark aus Syracuse, Staat New York, zu erfreuen hatte. Bei einigen Vorversuchen haben mir auch die Herren DDr. Kirsow und Hofmann ihre freundliche Hilfe gewährt. Ueber die Ergebnisse soll hier nur in Kürze berichtet werden. Eine ausführliche Darstellung dieser und weiterer Versuche soll an einem anderen Orte erfolgen.

Zur Reizung der Haut dienten Strohhalme und Korke, deren Querschnitt zwischen 0,3 und 50 mm^2 schwankte. Von diesen cylindrischen Körpern wurde die eine Endfläche auf der Haut (mit Fischleim oder Collodium) festgeklebt, die andere mit einem doppelarmigen äquilibrirten Holzhebel verbunden, wie ich ihn schon früher zu Dauerbelastungen gebraucht habe. (Man vergl. Fig. 1 auf S. 178 meiner Abhandlung.) Durch Belastung des

Hebels auf der einen oder anderen Seite der Axe konnte eine Druck- oder Zugwirkung auf die gewählte Hautstelle ausgeübt werden.

Mit diesem einfachen Verfahren und unter Anwendung der kleinsten Reizflächen liess sich zunächst nachweisen, dass die für Druck empfindlichsten Punkte der Haut es auch für Zug sind. D. h. bei Befestigung der Pelotte zwischen den Druckpunkten bedurfte es in dem einen wie in dem anderen Falle stets stärkerer Reize um eine Empfindung auszulösen, als bei Befestigung auf den Punkten. Es zeigten sich ferner für eine gegebene Hautstelle die Schwellen für Druck und Zug ungefähr gleich hoch, gewisse Abweichungen von dieser Regel werden unten noch besprochen werden. Endlich wurde in Versuchen, bei welchen die von mir früher beschriebene Schwellenwage durch geeignete Modification zur Ausübung von Zugwirkungen befähigt war, festgestellt, dass der Werth der Zugschwelle von der Geschwindigkeit der Deformation und von der Grösse der deformirten Fläche in genau gleicher Weise abhängt, wie ich das für Druckschwellen früher gefunden habe. Aus diesen Erfahrungen ergiebt sich die Folgerung, *dass es bei Druck- wie Zugreizen dieselben Organe sind, welche in Thätigkeit gerathen.* Wollte man durch den Namen die Art der Einwirkung bezeichnen auf welche sie reagiren, so könnte man sie ebensogut Zug- wie Druckpunkte heissen. Vielleicht ist es besser, einen nichts präjudicirenden Namen zu wählen und sie einfach *Tastpunkte* zu nennen, sowie man auch von Tasthaaren, Tastwärzchen u. s. w. spricht.

Die Versuche mit den kleinsten Flächen an Hautstellen, wo sich die isolirte Reizung einzelner oder einiger weniger Punkte ausführen lässt, ergaben aber weiter das unerwartete Resultat, dass *Druck und Zug überhaupt nicht unterschieden werden konnten.* Es gilt dies nicht etwa nur für schwellenmässige oder schwach überschwellige Reize, sondern für alle mit der Voraussetzung möglichster Localisation noch verträglichen Reizstärken, sicher noch für solche, welche die Schmerzgrenze erreichen.

Vergleicht man diese Unfähigkeit zur Unterscheidung mit der relativen Sicherheit, mit welcher bei grossflächigen Reizen Druck und Zug erkannt werden, so kommt man zu dem Schluss, dass *für den einzelnen Tastpunkt die Erregung durch gleich starke Druck- und Zugreize identisch ist*, und dass nur aus der Aus-

breitung der Erregung über eine Anzahl von Sinnespunkten die Richtung der Deformation erkannt werden kann.

Der anscheinend paradoxe Satz, dass der einzelne Tastpunkt durch die entgegengesetzten Deformationen in gleicher Weise erregt wird, lässt sich auch noch auf einem anderen Wege beweisen: Führt man mittelst einer sehr kleinen Fläche einem einzelnen Tastpunkte gleichstarke, schwach überschwellige Momentanreize zu (die Erzeugung solcher wird unten angegeben werden), so lässt sich durch genügende Zeitintervalle zwischen den einzelnen Reizen jede Ermüdung vermeiden und eine stets gleiche Erregung des Tastpunktes erzielen. Wird nun der regelmässige Rhythmus dieser Momentanreize für etwa 2 Minuten unterbrochen durch einen starken, der Schmerzgrenze nahekommenden, auf dieselbe Fläche wirkenden Dauerreiz, so werden die hinterher wieder im ursprünglichen Rhythmus einfallenden Momentanreize anfangs gar nicht, später mit wachsender Deutlichkeit wieder gefühlt; es vergehen aber Minuten, bis die Empfindung die ursprüngliche Stärke gewinnt. Lässt man nun den Dauerreiz stets als Druckreiz wirken, verwendet aber als Momentanreize bald Druck- bald Zugreize, so tritt durch den Dauerreiz die Ermüdung für die beiden entgegengesetzten Momentanreize in ganz gleicher Weise ein.

Es war nun zu untersuchen, ob bei den grossflächigen Reizen die Unterscheidung von Druck und Zug unter allen Umständen zu treffen war, unabhängig von der Dauer und Stärke der Reize.

Zur Erzeugung von kurzdauernden oder Momentanreizen wurde der mit der Haut verbundene Hebel nicht durch Gewichte beschwert, sondern durch eine Art Fallhammer erschüttert, welcher auf der einen oder anderen Seite der Axe auf den Hebel auffiel und demnach Druck- oder Zugwirkungen ausüben konnte. Das Drehungsmoment der Schwere an diesem Fallhammer sowie seine Fallhöhe konnten innerhalb weiter Grenzen verändert werden. Die Versuche wurden mit Flächen von 10 und 50 mm^2 auf dem Daumenballen ausgeführt und ergaben, dass derartige *Momentan- oder Schlagreize*, obwohl sie eine starke Empfindung wachriefen, in Bezug *auf ihre Richtung nicht erkannt werden konnten.*

Ein etwas umständlicheres Verfahren war bei Anwendung der Dauerreize erforderlich, um die Reizstärke constant und für

Druck wie Zug gleich zu machen. Dass die Deformationsrichtung stärkerer Dauerreize sicher erkannt wird, ist bereits oben erwähnt worden. Sehr schwache, der Schwelle nahe Reize werden sich andererseits der Beurtheilung entziehen, weil sie nur zu einer ganz flüchtigen Erregung, der sog. Berührungsempfindung führen und daher als Momentanreize zu betrachten sind. Es war daher nöthig, eine überschwellige Reizstärke einzustellen, welche zwar eine länger dauernde Empfindung wachrief nach ihrer Deformationsrichtung aber nicht erkannt werden konnte. Dies gelang bei der ausserordentlichen Empfindlichkeit der Tastpunkte für die Geschwindigkeit der Deformation erst, als die Gewichtsbelastung des Hebels nicht mit der Hand, sondern maschinell ausgeführt wurde. Das durch einen Kautschukfaden mit dem Hebel verknüpfte Gewicht ruhte anfänglich auf einem Vorsprung der horizontal umgelegten Kymographiontrommel. Wurde dieselbe in Gang gebracht, so setzte die Belastung mit einer Steilheit ein, welche von der Dehnbarkeit des Fadens und von der Umdrehungsgeschwindigkeit der Trommel abhing. Je nach der Seite des Hebels, an welcher das Gewicht befestigt war, trat Druck- oder Zugreizung auf. Auf diesem Wege liessen sich mit Sicherheit für beide Deformationsrichtungen gleich wirksame Reize von solcher Stärke erzielen, dass sie zwar längere Zeit gefühlt aber nicht unterschieden werden konnten. *Die Erkennbarkeit der Deformationsrichtung grossflächiger Reize ist daher nicht nur von ihrer Dauer, sondern auch von ihrer Stärke abhängig.* Sämmtliche Versuche zeigen übereinstimmend, dass die Tastempfindung an sich keine Bestimmung über die Richtung der erregenden Deformation enthält, dass eine Aussage darüber erst durch Verarbeitung und Vergleich der Empfindungselemente gewonnen werden kann. Die Wahrnehmung einer Deformation schlechtweg ist ein einfacherer psychologischer Process als das Erkennen ihrer Art oder Richtung; es ist verständlich, dass es zu letzterem einer stärkeren und länger dauernden Erregung bedarf.

Für die Art und Weise, wie schliesslich die Unterscheidung von Druck und Zug zu Stande kommt, scheinen mir folgende Beobachtungen und Ueberlegungen in Betracht zu kommen. Steigert man den grossflächigen Reiz von ebenmerklichen zu grösseren Stärken, so tritt die Fähigkeit zur Unterscheidung der Deformationsrichtung nicht mit einem Schlage auf, sondern es

zeigt sich ein Zwischengebiet, in welchem der Reagent mit grösserer oder geringerer Sicherheit angiebt, dass die Reize verschieden sind, aber noch nicht Druck und Zug als solche erkennt. Eine Verschiedenheit bei gleichem Druckwerth und gleicher Deformationsgeschwindigkeit kann nun dadurch gegeben sein, dass die Deformation nicht genau normal zur getroffenen Hautfläche geschieht. Weiter kommt in Betracht, dass die volle Berührung der Korkpelotte mit der Haut bei Druckreizen viel leichter zu erreichen ist als bei Zugreizen. Es ist schwer, einen Fremdkörper auf der Haut so festzukleben, dass er beim Ziehen nicht mit dem einen oder anderen Bruchtheil seiner Fläche sich ablöst. Ein solches theilweises Abheben lässt sich bei den grösseren Flächen sehr häufig direct beobachten. Daraus versteht sich auch, dass es nicht gerade leicht ist, die beiden Reize entgegengesetzter Richtung wirklich genau gleich zu machen. Die theilweise Abhebung wirkt wie eine Verkleinerung der Reizfläche. Liegen in dem noch haftenden Antheil der Fläche die empfindlicheren Tastpunkte, so werden diese stärker deformirt als beim Drücken, und der Zugreiz gewinnt die Oberhand. Umgekehrt verhält es sich, wenn die empfindlicheren Tastpunkte sich im abgelösten Flächentheil befinden. Diese Fehlerquelle ist wohl zu beachten und möglichst zu eliminiren.

Die erwähnten Umstände können nun zwar zu einer Verschiedenheit der Reize, nicht aber zu einer eindeutigen Bestimmung ihrer Richtung führen. Diese ist erst gegeben durch die ungleiche Ausbreitung der sonst gleichwerthigen Reize über die Fläche. Eine solche muss aber bei der unregelmässigen Gestalt und inhomogenen Beschaffenheit der Haut stets eintreten, wenn auch an verschiedenen Hautstellen in verschiedenem Maasse. Klebt man ein Stäbchen mit Collodium auf der Mitte der Fingerbeere fest, so fühlt man unmittelbar, dass bei Druck mehr die Mitte, bei Zug mehr die Ränder des Fingers in Erregung versetzt werden. Die Unterscheidung von Druck und Zug erscheint somit als eine Leistung des räumlichen Unterscheidungsvermögens der Haut und wird wie dieses an den einzelnen Körperregionen verschieden sein. Rückwärts lässt sich aber aus den hier beschriebenen Versuchen erwarten, dass das räumliche Unterscheidungsvermögen, oder, um mit E. H. Weber zu sprechen, die Feinheit des Ortssinnes der Haut in ganz ähnlicher Weise von der Stärke und Dauer der Reize abhängig sein

wird, wie es sich für eine specielle Aeusserung desselben hier erwiesen hat. Ueber Versuche in dieser Richtung werde ich ein anderes Mal berichten.

Das Ergebniss der vorliegenden Untersuchung lässt sich in folgenden Sätzen zusammenfassen:

1. Sämmtliche, die Haut treffenden Deformationen lassen sich als Druck- oder Zugwirkungen auf dieselbe auffassen.

2. Zur Wahrnehmung dieser Wirkungen sind die den sog. Druckpunkten, besser Tastpunkten, entsprechenden Nervenendigungen der Haut nothwendig, aber auch ausreichend.

3. Wirken auf dieselbe Hautstelle abwechselnd Druck- und Zugreize ein, so ist eine Unterscheidung nur möglich, wenn die Reize eine gewisse Ausdehnung, Dauer und Stärke besitzen. Unterhalb dieser Grenzen wird nur das Vorhandensein einer Deformation, nicht ihre Richtung wahrgenommen.

INHALT.

Seite

Sophus Lie, Ueber Integralinvarianten und ihre Verwerthung für die Theorie der Differentialgleichungen 369

Paul Stäckel, Anwendungen von Lie's Theorie der Transformationsgruppen auf die Differentialgleichungen der Dynamik 411

E. Study, Ueber die Invarianten der projectiven Gruppe einer quadratischen Mannigfaltigkeit von nicht verschwindender Discriminante. 443

Max von Frey, Beiträge zur Sinnesphysiologie der Haut. Vierte Mittheilung 462

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Title page

BERICHTE

ÜBER DIE

14

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1897.

V. VI.

MIT ZWEI TAFELN.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER.

1898.

Einzelpreis 3 Mark.

14

SITZUNG VOM 25. OCTOBER 1897.

Vorträge hielten:

1. Herr **W. Wundt**, o. M.: Ueber die geometrisch-optischen Täuschungen (s. Abhandlungen XXIV Nr. 2).
2. Herr **J. Wislicenus**, o. M.: Ueber Bildung carbocyklischer Verbindungen aus 1.5- und 1.6-Diketonen durch Ueberführung in ihre Pinakone.
3. Herr **H. Bruns**, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von Bruno Peter, Ueber Beobachtungen am sechszölligen Repsold'schen Heliometer. II. (s. Abhandlungen XXIV Nr. 3).
4. Herr **P. Flechsig**, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von S. Meyer: Ueber die Functionen der Protoplasmafortsätze der Nervenzellen.

Johannes Wislicenus, *Ueber Bildung carbocyklischer Verbindungen aus 1.5- und 1.6-Diketonen durch Ueberführung in ihre Pinakone.*

Aus theoretischen Gründen[1]) lässt sich vermuthen, dass alle Diketone, deren beide Carbonylgruppen einander räumlich besonders nahe treten können — vor Allem also 1.5-Diketone und ungesättigte 1.6-Diketone — durch Reduction in cyklische Verbindungen verwandelbar sein müssen. Beim Arbeiten in alkalischen oder stark sauren Lösungen treten leicht Condensationen in der Weise der Mesityloxydbildung ein, wenn die Carbonylgruppen zu Methan- oder Methylgruppen in passender Lage stehen. So können, wie zuerst Hagemann in meinem Laboratorium fand und wie Knövenagel an zahlreichen weiteren Fällen nachwies, Doppelketone der Formel $-CO.CH_2.CH_2.CH_2.CO.CH_3$ unter Wasseraustritt in Hexacarbonringe $-\overset{|}{C}=CH-\overset{|}{CO}$ $\overset{|}{CH_2}.CH_2.\overset{|}{CH_2}$ übergehen. Sehr häufig aber wiederholen sich bei offen bleibenden Ketten solche Condensationen mehrmals — oft zwischen einer

1) Siehe »Abhandlungen« der Gesellschaft Bd. XIV, S. 71.

grösseren Zahl von Molekülen, so dass hochmolekulare harzartige Körper entstehen können, aus denen einzelne Verbindungen nicht mehr isolirbar sind. Glatte Processe lassen sich daher meist nur dann durchführen, wenn die constitutionellen Ursachen der Verharzung oder der Bildung der erwähnten Hexacarbonringbildung vermieden werden.

Als ein wahrscheinlich gangbarer Weg des Zusammenschlusses der Carbonylgruppen zu Ringgebilden stellte sich zunächst die Reduction von 1.5-Diketonen zu *Pinakonen* dar:

$$CH_2\begin{<}CH_2.CO.R\\CH_2.CO.R\end{>} + 2H = CH_2\begin{<}CH_2.C(OH).R\\CH_2.C(OH).R\end{>}$$

die, selbst schon cyklische Körper, sich mit Hülfe von Jodwasserstoff zu

$$CH_2\begin{<}CH_2.CH.R\\CH_2.CH.R\end{>}$$

müssen weiter reduciren lassen.

Diese Voraussetzungen haben sich in einer Reihe von Versuchen, welche ich durch meine Schüler habe anstellen lassen, vollkommen bestätigt. Gewählt wurden vorläufig Diketone der allgemeinen Formel $C_6H_5.CO.\underset{..}{C}.\underset{..}{C}.\underset{..}{C}.CO.C_6H_5$. Die Reduction wurde in wasserhaltiger alkoholischer Lösung mit Natriumamalgam unter steter Neutralisirung — am besten unter Einleitung von Kohlensäure — oder in ätherischer, auf Wasser geschichteter Lösung durch Natrium vorgenommen. Bei fast keinem der bisher verarbeiteten Diketone wurde die Bildung doppelt secundärer Alkohole, sondern immer nur cyklischer Pinakone wahrgenommen.

Unter einer grossen Zahl begonnener Versuche sind mehrere bereits abgeschlossen.

Schon publicirt[1]) ist eine Arbeit von AUG. PUSCH über die Reduction der *Diphenacylessigsäure*. Dieselbe liefert mit nascirendem Wasserstoff zwei isomere, ohne Zweifel durch Cis- und Transstellung der mit dem Fünferringe verbundenen Radicale bedingte Pinakone

1) Berichte der deutschen chem. Ges. **28**, 2102.

$$\begin{matrix} C_6H_5.CO.CH_2 \\ C_6H_5.CO.CH_2 \end{matrix}\!\!>\!CH.CO.OH + 2H = \begin{matrix} C_6H_5.C(OH).CH_2 \\ | \\ C_6H_5.C(OH).CH_2 \end{matrix}\!\!>\!CH.CO.OH$$

von sehr ungleicher Löslichkeit in Benzol und 200°, resp. 162° bis 164° Schmelzpunkt, aus denen durch Erhitzen mit Jodwasserstoff zwei isomere 1.2-Diphenyl-Pentamethan-4-Carbonsäuren

$$\begin{matrix} C_6H_5.CH.CH_2 \\ | \\ C_6H_5.CH.CH_2 \end{matrix}\!\!>\!CH.CO.OH$$ von 152° und 187° Schmelzpunkt

erhalten wurden.

Herr Chr. Carl Kuhn hat dann aus dem Condensationsproduct von Natriumbenzoylessigester mit Methendijodür, oder von Benzoylessigester mit Formaldehyd bei Gegenwart von Diäthylamin, den *α.α'-Dibenzoylglutarsäureester*,

$$\begin{matrix} C_6H_5.CO.CH.CO.O.C_6H_5 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ C_6H_5.CO.CH.CO.O.C_6H_5 \end{matrix}$$

bei der Verseifung durch Alkali neben der bei 127,5° schmelzenden

γ-Benzoylbuttersäure $$\begin{matrix} C_6H_5.CO.CH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2.CO.OH \end{matrix}$$

das *1.3-Dibenzoylpropan* $$\begin{matrix} C_6H_5.CO.CH_2 \\ C_6H_5.CO.CH_2 \end{matrix}\!\!>\!CH_2$$ in Form glänzender Nädelchen von 67,5° Schmelzp. gewonnen, dieses 1.5-Diketon durch Behandeln der ätherischen, auf Wasser geschichteten Lösung mit Natrium in das zäh-ölförmige Pinakon

$$\begin{matrix} C_6H_5.C(OH).CH_2 \\ | \\ C_6H_5.C(OH).CH_2 \end{matrix}\!\!>\!CH_2$$

übergeführt und letzteres durch Jodwasserstoff vollständig zu

1.2-Diphenylpentamethan $$\begin{matrix} C_6H_5.CH.CH_2 \\ | \\ C_6H_5.CH.CH_2 \end{matrix}\!\!>\!CH_2$$

reducirt. Dieser Kohlenwasserstoff $C_{17}H_{18}$ ist leicht löslich in Aether, aber fast unlöslich in kaltem Alkohol, so dass er durch letzteren aus der concentrirten ätherischen Lösung ausgefällt werden kann. Er schmilzt bei 108°.

Die unverseifte Diketonsäure wird durch Natriumamalgam unter Alkaliwirkung zunächst zu einer Lactonsäure, durch Eisessig und Zink aber zu dem Pinakonester

$$\begin{array}{l} C_6H_5 . C(OH) . CH . CO . O . C_6H_5 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad | \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad CH_2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad | \\ C_6H_5 . C(OH) . CH . CO . O . C_6H_5 \end{array} .$$

Herr H. CARPENTER stellte zunächst durch Condensation von Desoxybenzoin (Benzyl-Phenyl-Keton) mit Methylaldehyd bei Gegenwart von etwas alkoholischer Kalilösung das *Dibenzoyl-Diphenyl-Propan* $\begin{array}{l} C_6H_5 . CO . CH . C_6H_5 \\ \quad\quad\quad\quad\quad | \\ \quad\quad\quad\quad\quad CH_2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad | \\ C_6H_5 . CO . CH . C_6H_5 \end{array}$ dar, welches in schönen sechsseitigen Tafeln von 146° Schmelzp. krystallisirt und aus dessen alkoholisch-wässeriger Lösung mit Natriumamalgam und Kohlensäure das cyklische Pinakon $\begin{array}{l} C_6H_5 . C(OH) . CH . C_6H_5 \\ \quad\quad\quad\quad | \quad\quad\quad | \\ \quad\quad\quad\quad CH_2 \\ \quad\quad\quad\quad | \\ C_6H_5 . C(OH) . CH . C_6H_5 \end{array}$ entsteht. Dasselbe existirt in zwei Isomeren, von denen das in Alkohol ziemlich leicht lösliche in bei 138° schmelzenden Nadeln krystallisirt, das fast unlösliche dagegen erst bei 239°—240° verflüssigt wird.

Das alkohollösliche Pinakon geht beim Erhitzen mit Jodwasserstoff und Phosphor in ein bei 81° schmelzendes

Tetraphenyl-Pentamethan $\begin{array}{l} C_6H_5 . CH . CH . C_6H_5 \\ \quad\quad\quad\quad | \quad\quad | \\ \quad\quad\quad\quad CH_2 \\ \quad\quad\quad\quad | \\ C_6H_5 . CH . CH . C_6H_5 \end{array}$ über.

Herr F. NEWMAN hat aus *Benzoldiacetophenon* (Schmelzp. 85°) durch Eisessig und Zink das bei 142° schmelzende Pinakon

$$\begin{array}{l} C_6H_5 . C(OH) . CH_2 \\ \quad\quad\quad\

$C_{30}H_{24}O$, Schmelzp. 194°—195°, unlöslich in Aether,
$C_{30}H_{26}O$, » 110°—111°, leicht löslich in Aether,

und geht beim Erhitzen mit Phosphoroxychlorid bis zu 40° in den Kohlenwasserstoff $C_{30}H_{22}$ über.

Letzterer krystallisirt aus Benzol in farblosen, in Alkohol und Aether ausserordentlich schwer löslichen Nadeln von 278° Schmelzp. und ist ohne Zweifel das *1.2.4.5-Tetraphenylbenzol*

$$C_6H_2(C_6H_5)_4 = \begin{matrix} C_6H_5 . C = CH - C . C_6H_5 \\ | \qquad\qquad \| \\ C_6H_5 . C = CH - C . C_6H_5 \end{matrix} .$$

Andere hierher gehörende Versuche sind in grösserer Zahl begonnen und werden fortgesetzt.

Dr. **Semi Meyer**, *Ueber die Function der Protoplasmafortsätze der Nervenzellen.* Vorgelegt von Herrn P. Flechsig, o. M. (Hierzu zwei Tafeln.)

Seitdem Golgi einen weit durchgreifenderen functionellen Unterschied zwischen protoplasmatischen und nervösen Fortsätzen der Nervenzellen angenommen hat, als in den früheren Anschauungen über den allgemeinen Bauplan des Nervensystems zum Ausdruck kam, ist die Frage der Function der Dendriten eingehend erörtert worden, ohne dass eine Einigung erzielt worden wäre. Golgi selbst hält noch heute ohne jede Einschränkung an seiner ersten Auffassung fest, welche die Protoplasmafortsätze von jeder nervösen Function ausschliesst und in ihnen nur Ernährungsorgane sieht, und ihm haben sich in jüngster Zeit mehrere Forscher angeschlossen, welche zum Theil durch experimentelle Untersuchungen die rein nutritive Function der Dendriten nachgewiesen zu haben glauben. Von den Hauptrepräsentanten der modernen Nervenhistologie theilt jedoch keiner jenen extremen Standpunkt Golgi's; zum Theil vertreten sie sogar eine gerade entgegengesetzte Ansicht mit gleicher Bestimmtheit. An ihrer Spitze steht Ramon y Cajal und ihm ist besonders van Gehuchten gefolgt; beide sind überzeugt, dass die Form und Ausbreitungsweise der Protoplasmafortsätze allein dem Zwecke der Aufnahme von Reizen und dem Aufsuchen von Verbindungswegen angepasst und dass ein Verständniss für ihre Gestaltung nur von diesem Gesichtspunkte aus zu gewinnen sei; Andere wie v. Lenhossek vertreten eine ähnliche, aber nicht ganz so exclusive Ansicht mit grosser Bestimmtheit. Doch wird man angesichts des vorliegenden Beweismaterials nur eine Darstellung der bisherigen Sachlage ganz objectiv nennen dürfen, nämlich die von v. Kölliker[1]) in der neuesten Auflage seines

1) v. Kölliker, Handbuch der Gewebelehre des Menschen, VI. Auflage, II. Band, Seite 111 u. 683.

Handbuchs gegebene, aus welcher deutlich hervorleuchtet, dass mit dem vorliegenden Beobachtungsmaterial die Frage noch nicht zu entscheiden ist.

Unter diesen Umständen glaube ich auch nicht eingehender die Literatur berücksichtigen zu müssen, besonders da meine Untersuchungen zwar den Kern der Frage zu Gunsten der Ramon'schen Theorie beantworten, dabei aber doch die Function der Dendriten in einem ganz neuen Lichte erscheinen lassen.

Die auf den beigegebenen Tafeln dargestellten Resultate sind mit meiner Methode der *subcutanen Methylenblau-Injection* erzielt worden. Ueber die Technik der Methode habe ich dem in den früheren Veröffentlichungen [1]) Gesagten nicht viel hinzuzufügen. — Wohl hauptsächlich die Erfindung einer Fixationsmethode durch Bethe [2]) und dann meine Bestrebungen haben die Anregung dazu gegeben, dass in jüngster Zeit das Methylenblau zur Erforschung auch der Centralorgane eine reichere Anwendung gefunden hat. Während nun meine Art des Vorgehens mir in mündlichen und brieflichen Mittheilungen vielfach als recht zweckmässig bezeichnet wurde, haben einige Forscher anderen Methoden den Vorzug gegeben. So veröffentlichte Dogiel einen Aufsatz [3]), in dem er hervorhebt, dass er das, was ich mit der subcutanen Injection erreicht, bereits früher bei seiner Methode der postvitalen Färbung dünner Scheibchen gesehen habe, und auch Ramon hat ein ähnliches Verfahren vorgezogen. Die betreffende Mittheilung Ramon's war mir wie alle neuen Arbeiten des Autors nur im Referat zugänglich; ich entnehme demselben so viel, dass derselbe die bei meinem Vorgehen erreichten Bilder für zu schwach gefärbt erklärt. Dies beweist indess nur, dass es ihm nicht gelungen ist, so gute Bilder zu erhalten, als es bei grosser Sorgfalt möglich ist. Bei meinen ersten Injectionen erzielte auch ich nur schwache Färbungen und auch jetzt erreiche ich oft genug nichts Besseres; die Bedingungen des Gelingens der Reaction sind bisher noch ganz dunkel, und man muss es deshalb an möglichst vielen Thieren versuchen. Man kommt dabei immer noch schneller zu guten Präparaten als mit der

1) Archiv für mikroskopische Anatomie, Bd. 46, 1895, Seite 282, und Bd. 47, 1896, Seite 734.

2) Arch. f. mikroskop. Anatomie, Bd. 46, 1895.

3) Arch. f. mikroskop. Anatomie, Bd. 46, 1896.

Golgi'schen Methode, die auch dem Erfahrensten oft genug gar nichts leistet. Bei dem Vorgehen von Dogiel und Ramon ist der Erfolg weit unsicherer als bei dem meinigen. Man erzielt hierbei stets etwas und kann überdies Serienreihen von grösseren Stücken und ganzen Gehirnen herstellen. Vor allem aber kann man bei postvitaler Färbung gar nicht mehr unterscheiden, wie viel vitale Reaction und was einfache Färbung ist, so dass ich im Gegensatz zu Ramon zum mindesten Bilder, die durch Färbung dünner Scheiben gewonnen sind, nicht für beweiskräftiger erklären würde, als die durch rein vitale Reaction gefärbten, wie es Ramon gegenüber der Frage, ob die Dornen der Dendriten Kunstproducte sind, thut.

Auch an der Fixirungstechnik habe ich nicht für nöthig gehalten etwas zu ändern; Ramon empfiehlt die Nachbehandlung der Objecte mit Platinchlorid, um die fixirte Farbe noch alkoholunlöslicher zu machen und um die Objecte zu härten. Ersteres halte ich für überflüssig, letzteres wäre für meine Zwecke ein grosser Nachtheil, denn nur dadurch, dass die Gehirne bei der Bethe'schen Fixationsmethode thatsächlich ganz weich bleiben, bin ich im Stande, Schnitte von solcher Dicke herzustellen, wie sie besonders für die vorliegenden Studien unumgänglich nöthig waren. An Schnitten unter 50 μ wird man nur an den bestgelungenen Präparaten von den Verbindungsverhältnissen etwas sehen, und auch die Formen sind durch das viele Unterbrechen nur mangelhaft zu studiren. Dagegen eignen sich dünne Schnitte, wie ich zur Richtigstellung früherer Angaben betonen muss, zum Studium der Structur, was ich lange Zeit, da ich nur dicke Schnitte herstellte, übersehen habe [1]).

Meine Untersuchungen erstrecken sich auf das *ganze* Centralnervensystem, sind aber in den einzelnen Theilen desselben von sehr verschiedenem Erfolge begleitet gewesen, wie es nach der launenhaften Wirkungsweise der Methode gar nicht anders zu erwarten ist. Als ein besonders undankbares Forschungsgebiet erwies sich das Rückenmark, von dem ich deshalb in der folgenden Darstellung ganz absehen muss, während die wichtigeren Theile des Gehirns fast alle positive Resultate ergeben haben. Freilich haben die Befunde nicht überall die-

1) Die Tafeln zeigen eine Zellstructur, die der Wirklichkeit durchaus nicht entspricht, und lediglich aus technischen Gründen bei der Lithographie entstanden ist.

selbe Deutlichkeit und Schärfe! Ich beginne mit der Beschreibung derjenigen, die durch ihre überzeugende Klarheit meine Aufmerksamkeit zuerst gefesselt haben. Wohl nur rein zufällig sind meine besten Belege sämmtlich dem directen und indirecten Ausbreitungsgebiet des Acusticus angehörig, wozu sich noch die Hirnrinde gesellt; die klarsten und unzweideutigsten Befunde entnehme ich dem Kern des hinteren Vierhügels.

Die Figuren 1 und 2 stellen Zellbilder aus diesem Kern dar; in Fig. 1 sind von einem neugeborenen Meerschweinchen, in Fig. 2 von einem ausgewachsenen Kaninchen eine grössere Anzahl von günstigen Stellen vereinigt, um dasjenige, was die Durchsicht einer ganzen Schnittserie ergiebt, zusammenzufassen. Jedoch ist keines der einzelnen Bilder nach dem Vorgang vieler Forscher, die sich der Golgi'schen Methode bedienen, aus mehreren Schnitten combinirt, vielmehr ist jede Zelle mit ihren Ausläufern, soweit sie in einem Schnitte sichtbar sind, von mir selbst mit einem dem Methylenblau sehr ähnlichen Preussischblau copirt; die Präparate haben denselben starken Farbenton, in dem ich sie zeichne und den die Tafeln wiedergeben; der Vorwurf Ramon's, meine Bilder seien zu farbenschwach, ist somit durchaus nicht gerechtfertigt.

Die Form der Zellen des hinteren Vierhügels hat nichts Charakteristisches, in den beiden Figuren sieht man die allerverschiedenste Gestaltung ihres Körpers sowohl wie ihrer Fortsätze. Die wechselnde Stärke der Färbung giebt dabei dasjenige bunte Bild, das in meinen Präparaten auch im einzelnen Schnitt thatsächlich vorliegt. Dagegen zeigen alle gezeichneten Zellbilder bis auf einzelne das Gemeinsame, dass sie von einem stark hervortretenden schmalen, dunkelblauen Saum eingefasst sind, der bei einem Theile sich auf den Rand beschränkt, bei dem anderen mit feinen Ausläufern die ganze Zelloberfläche überspinnt. Das feine Gewebe, das im wirklichen mikroskopischen Bilde deutlich vom Rande her über und unter den Zellleib zu verfolgen ist, konnte in den Zeichnungen verhältnissmässig nur sehr grob wiedergegeben werden; thatsächlich sieht es oft so aus, als läge die Zelle in einem sehr feinen und ganz dichten Gitterwerk. Das Geflecht auf und unter der Zelle ist jedoch nur bei ganz starken Färbungen zu sehen, an den meisten Zellen bemerkt man zunächst nur eine ziemlich grobe dunkle Linie am Rande, von der sich bei genauerem Zusehen noch manchmal ganz feine

Fortsätze über den Zellleib hinweg erstrecken. Oefter sind auch neben oder ohne das Gitterwerk mehrere stärkere Linien auf dem Zellkörper sichtbar und scheinen ihn in mehrere Theile zu zerlegen, wofür sich die Deutung nach der Betrachtung anderer Objecte leicht ergeben wird.

Dass das Gebilde ein Faserkorb ist, kann beim Anblick der Präparate keinem Zweifel unterliegen, wenn auch das Bild von dem gewöhnlich von Faserkörben gegebenen ganz erheblich abweicht. So feine Körbe, wie sie hier vorliegen, sind aber auch noch nie beschrieben worden: wie ein ganz dünner, aber ausserordentlich dichter Schleier liegt das Geflecht auf und unter dem Zellkörper, und wo nicht eine sehr starke Färbung vorhanden, ist der Fasermantel zu durchsichtig, um in der Flächenausbreitung auf der Zelle erkennbar zu sein, und es erscheint nur der dunkle Saum um den Zellrand herum, wo das Licht durch mehrere Lagen des Gewebes hindurchgehen muss. Oft ist aber auch bei starker Färbung die Unsichtbarkeit des dem Zellleib aufliegenden Theiles des Korbes dadurch veranlasst, dass der Farbenunterschied zwischen Zellkörper und Umspinnung zu gering ist.

Hiermit gebe ich freilich keine blosse Beschreibung mehr; aber ich wüsste kaum, wie jemand auf eine andere Deutung verfallen sollte, nur lassen ähnliche Bilder von anderen Stellen des Gehirns, die nach meiner Ansicht denselben Ursprung haben, die Verhältnisse weniger unzweideutig erkennen.

Genauere Aufschlüsse über den Aufbau der Körbe geben meine Präparate nicht, nur so viel erscheint mir wahrscheinlich, dass, da für diese und alle im Weiteren zu beschreibenden ähnlichen Gebilde eine Zusammensetzung aus feinsten Fäserchen nachweisbar ist, keine sogenannten Becher vorliegen, das heisst dass keine zusammenhängenden Membranen die Zellen einschliessen. Doch wäre es wenigstens nicht undenkbar, dass sich in einer Membran feine Verdichtungen abheben, die als Fäserchen imponiren. Vorausgesetzt nun, dass die Körbe wirklich aus feinen Fasern bestehen, erhebt sich die Frage, ob ein unterbrochenes Maschenwerk vorliegt, dessen Fasern mit einander verschmolzen sind, oder ein Geflecht, in welchem jede Faser ihre Selbständigkeit behält. Ich kann diese Frage histologisch nicht entscheiden und kann auch theoretisch von beiden Möglichkeiten keiner den Vorzug geben, denn ich kann mir die Aufsplitterung eines Axencylinders ebenso gut so vorstellen,

dass er sich in eine Anzahl Fäserchen theilt, deren jede für sich weiter wächst, wie dass sich der Neurit immer nur streckenweise theilt, so dass ein Gitterwerk entstände, dessen Fasern sich immer wieder vereinigen.

Was nun das Verhalten der Dendriten zu den centralen Nervenendigungen betrifft, so darf ich auf das Studium der Abbildungen verweisen. Dieselben lehren vor allem, dass zwischen Zellleib und Dendriten überhaupt gar kein Unterschied besteht. Es drängt sich hierbei der Gedanke auf, wie dasjenige, was meine Präparate in nicht misszuverstehender Deutlichkeit zeigen, weit abweicht von der gangbaren Vorstellung, die man sich von der Functionsweise der Dendriten gebildet hat, auch wenn man ihnen eine nervöse Function zuertheilte. Denn nach Ramon y Cajal und van Gehuchten sind die Dendriten die eigentlichen Aufnahmeapparate für die Erregungen, indem sie mit ihren Spitzen und den Dornen ihrer Oberfläche mit Neuriten in Contact treten und die Ströme gewissermassen absaugen und der Zelle zuführen. Meine Bilder bringen keinen Beweis für eine so selbständige Function der Dendriten, vielmehr zeigen sie dieselben in genau demselben Verhältniss zu den Axencylinder-Endausbreitungen stehend, wie den Zellleib selbst. Die Umspinnung der Dendriten unterscheidet sich in nichts von der des Zellkörpers.

Es sei sogleich hervorgehoben, dass ich dasselbe Verhalten der Dendriten an folgenden Stellen des Gehirns gesehen habe: Im Kern der lateralen Schleife meist in denselben Serien wie im hinteren Vierhügel, ferner am allerdeutlichsten und schönsten in der oberen Olive, dann im grosszelligen Acusticusendkern sowie im Tuberculum acusticum, ferner in den Kernen der Corpora geniculata, an einzelnen grossen Zellen des vorderen Vierhügels sowie der Substantia reticulata und der Brückenkerne, schliesslich je an einer Serie von Zellen des Oculomotorius-, Trochlearis-, des Facialis- und des Vaguskernes, vor allem aber wiederum häufiger in der ganzen Grosshirnrinde, während mir an verschiedenen anderen Stellen, wo ich die Endigungen an den Zellen oft gesehen habe, wie im Nucleus tegmenti, in der unteren Olive, im Hypoglossus- und cerebralen Trigeminuskern der Nachweis von Fortsetzungen der Körbe auf die Dendriten bisher nicht gelungen ist. Der Trapezkern und der ventrale Acusticuskern, ebenso wie die Kleinhirnrinde und der Bulbus olfactorius bieten besondere Verhältnisse dar; an allen übrigen

Stellen habe ich ebenso wie im Rückenmark überhaupt Endigungen nicht darstellen können. Dass dies aber bei weiteren Bemühungen noch gelingen wird, kann ich nach meinen Erfahrungen mit der launenhaften Methode sicher erwarten. Jedoch glaube ich schon aus meinen bisherigen Befunden ganz allgemein folgern zu dürfen, dass Zellleib und Dendriten für die Function gleichwerthig sind.

In der Literatur finde ich nur wenig Vergleichbares, zunächst eine von Dogiel [1]) herrührende Beobachtung einer Zellenart in der Retina, deren Dendriten in ein feines Nervenflechtwerk eingehüllt sind, während hier freilich der Zellkörper selbst davon frei ist. Ausserdem könnte man die sogenannten Kletterfasern des Kleinhirns anführen, bei denen man aus der Form geschlossen hat, dass sie sich an die Dendriten der Purkinje'schen Zellen anlegen. Gerade hier ist mir leider die Darstellung von Dendritenumspinnungen nicht geglückt, aber Held hat in seiner neuesten Arbeit [2]) ebenfalls feine Nervenfibrillen beschrieben, die er an die Dendriten der Purkinje'schen Zellen sich anlegen und nach seiner im Weiteren zu besprechenden Auffassung mit ihnen verschmelzen sieht. Andere vergleichbare Beobachtungen kenne ich nicht.

Die Präparate vom Kern des hinteren Vierhügels geben auch sehr deutliche Aufschlüsse darüber, an welcher Stelle die Nervenfasern den Zellkörper zuerst treffen, um sich dann über die ganze Oberfläche des protoplasmatischen Teiles desselben auszubreiten. Auch hier gilt der Satz, dass Zellleib und Protoplasmafortsätze nicht unterschieden sind, wenn es auch eine bevorzugte Stelle zu geben scheint, an der die Faser den Zellleib am häufigsten erreicht, nämlich die Spitze *eines* Dendriten. Die meisten Zellbilder der Figur 1 zeigen ein solches Verhalten. Freilich war es anfangs zweifelhaft, ob die Auffassung, unter der ich hier die Bilder beschreibe, zutreffend ist. Der erste Gedanke war der, dass die Fasern, die sich an der Spitze eines Dendriten aus dem Flechtwerk loslösen, nicht endende, sondern entspringende Axencylinder seien, die in diesem Falle von einem Dendriten entsprängen, und in dieser Auffassung wurde ich noch bestärkt durch den Vergleich mit denjenigen Zellbildern, die ohne den Endkorb gefärbt sind; denn der Ursprung des Axen-

1) Dogiel, Anatomischer Anzeiger 1895.
2) Held, Arch. f. Anat. u. Physiol., Anat. Abth. 1897, S. 204.

cylinders vom Zellkörper giebt hier ein ähnliches Bild. Im Allgemeinen ist zwar in meinen Präparaten die Unterscheidung von neuritischen und protoplasmatischen Fortsätzen ganz leicht: die ersteren sehen aus wie mit Tinte gezogene Linien, während die letzteren mit Bleistift auf rauhem Papier gezeichnet sein könnten. An seinem Ursprung vom Zellkörper aber zeigt der Neurit noch nicht dasselbe Aussehen, wie in seinem weiteren Verlauf, vielmehr wird er erst allmählich zu einer so scharfen Linie, dass die Bestimmung seiner neuritischen Natur keine Schwierigkeiten mehr macht. Ich dachte mir nun, dass der Anfang des Neuriten, wo derselbe gewissermassen noch zum Theil protoplasmatischen Charakter hat, in die Umspinnung mit hineinbezogen sei, wie es ja auch von den Körben um die Purkinje-schen Zellen bekannt ist, dass ihre Fasern sich eine kurze Strecke weit auf den Neuriten fortsetzen.

Allein eine solche Auffassung der Bilder ist unhaltbar, das lehrten mich zunächst Beobachtungen von Körben, die ganz isolirt gefärbt sind, ohne dass von der umsponnenen Zelle etwas sichtbar ist. Hier ergiebt sich ohne Weiteres als einzige Deutung, dass eine Nervenfaser mit ihrem ganzen Endapparat gefärbt ist, während das Neuron, zu dem diese Endigung in Beziehung tritt, ganz ungefärbt geblieben ist; denn dass von einem Neuron nur der Neurit und noch dazu so stark sich färben sollte, kann ich nach meinen reichen Erfahrungen mit der Methode nicht glauben. Ein sicherer Beweis aber für die Auffassung jener Neuriten als endende musste in Zellbildern sich finden lassen, wo der entspringende Neurit neben dem endenden sichtbar ist. Die Fig. 1 zeigt mehrere Zellen, an denen dies der Fall ist. Die Unterscheidung beider Neuriten ist meist leicht, man sieht an dem endenden deutlich die Stelle, wo er sich aufzusplittern beginnt und einen Dendriten umklammert. Doch kann der Beginn der Aufsplitterung so dicht sein, dass das Bild einen allmählichen Uebergang vortäuscht.

Man könnte erwarten, dass ein weiterer Weg, endende und entspringende Axencylinder zu unterscheiden, in der weiteren Verfolgung ihres Verlaufes gegeben sein müsste, für die meine Methode durch die Auswahl, die sie trifft, und dadurch, dass die Färbung nicht mit dem Beginn der Markscheide abschneidet, sehr geeignete Bilder liefert. Aber die Verfolgung der Fasern, wo immer sie auf weitere Entfernung möglich ist, lehrt nur, dass

man auf die Richtung, die die Fasern im Anfange einschlagen, wie vielfach von Golgi-Forschern geschieht, gar nichts geben darf. In den Kernen haben die Nerven, bevor sie enden oder den Kern verlassen, meist einen verwunderlich unregelmässigen Verlauf, sie machen nicht nur die grössten Umwege, sondern gehen oft genug den Weg, den sie zurückgelegt haben, zum Teil wieder zurück. Hierzu kommt noch, dass, was die Golgi-Bilder gewöhnlich zeigen, noch gar keine Anschauung giebt von der ausserordentlich reichen Verzweigung der Axencylinder, die an vielen Stellen die Verfolgung ganz illusorisch macht. Denn ich sehe es viel seltener, dass eigentliche Collateraläste abgegeben werden, als dass sich die Neuriten in gleiche Theile, und zwar nicht immer nur in zwei teilen, sondern in eine ganze Anzahl auf einmal.

Sind nun zwar die Spitzen der Dendriten die bevorzugte Stelle für den Beginn der Aufsplitterungen, so zeigen doch andere Bilder, dass ihnen nicht etwa die besondere Function zukommt, allein dem Neuron Verbindungswege zu eröffnen. Die Zelle unten links in der Figur zeigt, wie sich ein Neurit an einen Dendriten mitten in seinem Verlaufe anlegen kann, und dasselbe beweist die Figur oben rechts, wo die Zelle abgeschnitten ist. In beiden Bildern sieht man am Beginn der Aufsplitterung einen stark gefärbten Kreis, den man sich, wie andere Präparate deutlicher erkennen lassen, dadurch zu Stande gekommen denken muss, dass ein Ast oder der ganze Dendrit senkrecht zur Schnittrichtung weiter verläuft, so dass das Licht durch eine grössere Breite des Korbes gehen muss. Nicht so bestimmt zu deuten ist an diesen Bildern, dass scheinbar zwei Axencylinder herantreten, was auch an den Spitzen der Dendriten öfter zu beobachten ist. Es wäre denkbar, dass der Neurit, wo er sich aufsplittert, öfter eine Collaterale entsendet, ebenso wie aus dem Korb selbst öfter Collateralen hervorgehen, wofür mir der Trapezkern ganz sichere Beweise geliefert hat. Im Vierhügel freilich kann man Neuriten, die neben der am Dendriten beginnenden Aufsplitterung an den Zellkörper selbst herantreten, ebenso gut als vom Korb ausgehende wie zu ihm herantretende Fasern auffassen, denn bei der Feinheit des ganzen Gebildes ist nicht zu erkennen, ob beide Neuriten verschmelzen, und dass in einen Korb mehrere Fasern eingehen können, zeigen ebenfalls andere Stellen deutlich. Die ganze Aufsplitterung kann aber auch am Zellleib selbst beginnen, so dass also

alle Theile des Protoplasmas in dieser Beziehung gleichwerthig wären.

Nun muss ich jedoch hervorheben, dass an der grossen Mehrzahl der gefärbten Körbe die Stelle, wo die Aufsplitterung beginnt, überhaupt nicht festzustellen ist; es ist möglicher Weise nur Zufall, dass ich stets nur an *einem* Dendriten einen Korbansatz gefunden habe, es könnten ebenso gut an der Bildung jedes Korbes sich mehrere Neuriten betheiligen. Allerdings ist die Serie, der die Bilder der Fig. 1 entnommen sind, schon ein sehr günstiger Fundort für jene Anfangsstellen der Körbe. Bei ausgewachsenen Thieren scheinen alle Dendriten so viel länger geworden, dass es nur sehr selten gelingt, ein ähnliches Bild aufzufinden, selbst wenn die Färbung so schön gelungen ist, wie an vielen Zellen des Objectes, dem die Bilder der Fig. 2 entnommen sind. Im Uebrigen aber zeigt diese Figur in Betreff der Dendriten wie der Zellkörper dasselbe wie die erste.

Ganz übereinstimmende Bilder finde ich im Kern der lateralen Schleife, der bei Nagern ausgezeichnet entwickelt und ziemlich scharf abgegrenzt ist. Er beginnt dicht über den oberen Oliven und nimmt zunächst deren Platz ein, um sich cerebralwärts allmählich nach der dorsalen Richtung zu verbreitern und unter den Vierhügeln als längliche Platte zu enden. Die meist länglichen Zellen im dorsalen Theil des Kernes sind vorwiegend in der Richtung von medial- nach lateralwärts gestellt, während in dem ventralen Theile des Kernes die Zellen unregelmässiger gestaltet sind und bunt durcheinander liegen. Hier finde ich meist in denselben Serien Endkörbe, wie im hinteren Vierhügel, und in der Fig. 3 stellt der obere Theil einige Zellen aus dieser Gegend von einem Präparate eines halberwachsenen Kaninchens dar, an dem die Färbung der Körbe auch an den Dendriten ausgezeichnet geglückt ist. Doch bin ich auch hier mit dem Auffinden der Anfangsstellen der Aufsplitterungen nicht glücklich gewesen, während die beiden unteren Bilder, die derselben Serie entnommen sind wie Fig. 1, mit dieser übereinstimmende Verhältnisse zeigen.

Ebenso wie an den Zellen der Fig. 3 ist auch an denen der meisten übrigen Kerne, aus denen ich Beispiele gezeichnet habe, der Korb um den Zellleib nur am Rande als stark gefärbter Saum sichtbar. Ich habe bereits betont, dass nach meiner Auffassung auch hier nur sehr dichte Körbe vorliegen können, deren

Geflecht von der Oberfläche, also im einfachen Durchschnitt, nicht gesehen wird; sonst wäre es ja unerklärlich, wie man auf dem ganzen optischen Querschnitt eine scheinbar einfache Linie dem so unregelmässigen Contur des ganzen Protoplasmas sich anschmiegen sehen könnte. An sich könnten nur eher Kelche ein solches optisches Verhalten aufweisen, doch habe ich bereits darauf hingewiesen, dass überall, wo ich die Endigungen bisher an der Zellenfläche studiren konnte, ein feines Gitterwerk von Fasern erkennbar ist, das, wie im Weiteren beschrieben wird, nur in einigen Kernen besonders in die Augen springende, aber nicht zu Membranen zusammenfliessende Verbreiterungen zeigt. Dass ein dichter Korb bei zu schwacher Färbung das Bild eines einfachen Randsaumes ergeben kann, beweist die Thatsache, dass ich in denjenigen Kernen, in denen an stark gefärbten Endigungen das Geflecht über und unter der Zelle deutlich erkennbar ist, stets zahlreiche Zellen finde, bei denen die Färbung entweder überhaupt schwach oder der Gegensatz in der Farbenstärke beider gefärbten Neurone sehr gering ist, und die dann weiter nichts von dem Korb erkennen lassen, als jenen feinen Saum.

Gegen ähnliche mit Methylenblau gewonnene Bilder könnte man leicht den Einwand erheben, dass bei der Reaction häufig der Aussenrand der Zelle stärker gefärbt werde als der ganze Körper. Ich möchte dies indess für die Befunde, die ich hier vorlege, im voraus mit aller Entschiedenheit zurückweisen. Der Einwand mag vielleicht Präparaten gegenüber, die durch postvitale Färbung gewonen sind, eine gewisse Berechtigung haben; bei meinem Vorgehen indess färbt sich von allen Zellen stets zuerst und am stärksten der Kern und dann der ganze Zellkörper in stets vollkommen gleichmässiger Nüance. Ein dunkler sich färbender Zellrand würde ja auch niemals das Bild eines so scharf abgesetzten Saumes geben, und niemandem, der die Präparate bisher gesehen hat, ist eine solche Auffassung noch in den Sinn gekommen.

Anders als die bisher beschriebenen Abbildungen stellt die Fig. 4 aus der oberen Olive eines halb erwachsenen Kaninchens nicht einzelne ausgewählte Zellbilder dar, sondern einen Theil dessen, was man auf *einem* Schnitt durch das mediale Blatt der oberen Olive neben einander sieht, freilich nur einen sehr geringen Theil des sichtbaren; denn im Präparate ist das ganze

Gesichtsfeld von umsponnenen Zellleibern und Dendriten so dicht erfüllt, dass es sich in der Zeichnung gar nicht wiedergeben lässt. Bei dem betreffenden Versuchsthiere sind in einem Theile der Olive sämmtliche Zellen mit den umspinnenden Körben gefärbt, aber gerade deswegen und wegen der ausserordentlichen Länge der Dendriten, die sich meist durch das ganze Organ erstrecken, ist ihre Verfolgung bis an die Spitzen fast gar nicht möglich, und ausserdem sind noch die Nervenfasern, die ich gefärbt finde, hier von seltener Feinheit, so dass ich wieder über die Anfänge der Umspinnungen nichts Bestimmtes angeben kann. Nur einzelne Beobachtungen, wie die Aufsplitterung der auf der Figur in der Abbildung von links eintretenden Faser, sprechen dafür, dass auch hier der Beginn der Endigung an der Spitze eines Dendriten stattfinden kann, während an der zweiten Zelle links der Neurit den Zellleib selbst zuerst zu erreichen scheint; denn der Axencylinder, der sich von unten heranbegiebt, sieht eher einem endenden als einem entspringenden ähnlich, wie der Vergleich mit der darunter abgebildeten Zelle lehrt, deren Neurit an seinem Ursprung das früher beschriebene Verhalten erkennen lässt.

Interessant ist an den Bildern der oberen Olive das optische Verhalten der Zellumspinnungen an den Ursprungstellen der Dendriten. Trotz der ausgezeichneten Deutlichkeit der Färbung an dem dargestellten Präparat ist von dem Korbe auf dem Zellleibe doch nichts zu sehen, hierzu ist auch der Unterschied in der Farbstärke, in der die beiden zusammenstossenden Gebilde erscheinen, zu gering. An den Ursprungsstellen der Dendriten aber verhält sich das optische Bild verschieden, so dass man danach Haupt- und Nebendendriten unterscheiden könnte. Jede Zelle hat hier nämlich einen oder zwei starke Fortsätze, auf die sich der Saum ohne Unterbrechung fortsetzt, während die übrigen dünneren Dendriten vom Zellleib durch eine etwas verwaschenere Linie abgetrennt erscheinen. Die Erklärung dafür ergiebt sich aus der früher gegebenen Deutung des Randsaumes von selbst. Wenn die dunkle Umrandung überall dort entsteht, wo der optische Querschnitt einen Abhang trifft, und das Licht eine stärkere Lage des Korbes passirt, so ist der Gegensatz so zu erklären, dass an einer oder zwei Stellen sich der ganze Zellleib allmählich zu einem Dendriten verdünnt, während die schwächeren Dendriten sich unvermittelter vom Zellleib absetzen. Aehnliche

Beobachtungen geben die Zeichnungen aus anderen Kernen wieder.

Die Figuren 5—11 sollen im Wesentlichen nur als Belege dafür dienen, dass übereinstimmende Verhältnisse an den verschiedensten Stellen des Hirnstammes aufzufinden sind. Freilich sind die Bilder in keinem weiteren der oben bereits aufgezählten Kerne so in die Augen springend wie die im Vorhergehenden beschriebenen. Ich habe meine zahlreichen Serien mit grosser Ausdauer durchsuchen müssen, um hier und da ein deutliches Bild aufzufinden, und weitere Aufschlüsse haben alle diese Befunde nicht ergeben. Nur einer Beobachtung, die ich an den motorischen Kernen machte, kommt möglicher Weise eine Bedeutung zu: hier habe ich nämlich fast überall die Körbe sich nur über einen Theil der Zelle ausbreiten sehen, was vielleicht darauf hindeutet, dass um die motorischen Zellen sich häufiger mehrere Neuriten neben einander verästeln, von denen meist nur einer gefärbt wird.

An vielen Kernen ist mir dann wohl die Färbung eines feinen, den Zellrand begleitenden Saumes, nicht aber die von Ausbreitungen auf die Dendriten gelungen. Jedoch ist dies überall gerade da der Fall, wo die Färbung überhaupt nur sehr schwach ist, und wenn ich bemerke, dass auch in den Kernen, in denen ich am allersichersten die Umspinnung der Dendriten an einem Theile der Zellen sehe, an anderen schwächer gefärbten nur die Umspinnung der Zellkörper sichtbar ist, so ergiebt sich, dass aus dem Fehlen der Färbung zum mindesten nichts Negatives geschlossen werden darf in Betreff des Verhältnisses der Endigungen zu den Dendriten in jenen Kernen.

Ein von den bisher beschriebenen sehr abweichendes Bild erblickt man in den Figuren 12—17, welche ebenfalls Bilder aus dem Acusticusgebiete darstellen. Die in den Figuren 12—15 abgebildeten Endigungen aus dem Trapezkern, die ich in meiner letzten Veröffentlichung[1]) beschrieben habe, bringe ich hier hauptsächlich deshalb noch einmal zur Sprache, weil sie Held[2]) für seine Untersuchungen über den Zusammenhang der centralen Nervenelemente als Paradigma gedient haben. Für diesen Zweck

1) Arch. f. mikroskop. Anat. Bd. 47, 1896, S. 744.
2) Arch. f. Anat. u. Physiol., Anat. Abth. 1897, S. 257.

sind jene Körbe sicherlich die geeignetsten, es sind die gröbsten und am leichtesten darstellbaren Nervenendigungen, die ich bisher im Centralnervensystem überhaupt gesehen habe. Zuerst richtig als Endigungen gedeutet sind diese Bildungen von Held selbst[1]), v. Kölliker erklärte sie zuerst[2]) für ein Kunstproduct, änderte indess später[3]) diese Ansicht, will aber hierfür im Gegensatz zur ersten Angabe wieder die Dicke der zuleitenden Fasern als Kunstproduct angesehen wissen. Ich habe dann die fraglichen Endigungen mit Methylenblau dargestellt und inzwischen hat auch Ramon y Cajal[4]) dieselben Gebilde eingehender untersucht, ist aber zu dem Schluss gekommen, dass in denselben keine Körbe, sondern Endkelche zu sehen seien, das heisst, dass die Fasern in Membranen, »löffelförmige Plaques«, wie der Autor sich ausdrückt, übergehen, die die Zellen gleichmässig einhüllen.

Letztere Auffassung kann ich auf Grund meiner Präparate nicht anerkennen, und auch Held scheint sie nicht zu theilen. Ramon hat sich gewöhnlicher Farbstoffe bedient und diese haben ihm ein ähnliches Bild ergeben, wie ich es von den schwach gefärbten Körben beschrieben habe, an denen nur ein Saum um die Zelle sichtbar ist. Ich habe hervorgehoben, dass die einfachste Erklärung für jenes optische Verhalten freilich die Annahme von Kelchen wäre, dass ich jedoch dasselbe Verhalten an Zellen gesehen habe, deren Nachbarn in demselben Kern deutlich ein unterbrochenes Geflecht auf und unter dem Zellleib erkennen lassen. Im Trapezkern sind meine Färbungen so ausserordentlich schön und deutlich, dass ich mir durchaus nicht denken kann, meine Bilder seien in mehreren Dutzenden von Serien überall übereinstimmend so zu Stande gekommen, dass von einer einfachen Membran nur Streifen und Flecken gefärbt seien. Allerdings zeigen die Abbildungen der Fig. 13, dass die Körbe beim erwachsenen Kaninchen so dicht sind, dass sie nicht mehr weit davon entfernt sind, geschlossene Becher zu bilden, im Princip ist jedoch zwischen beidem ein grosser Unterschied, und da man wirkliche Kelche bisher mit Sicherheit noch nirgends gefunden hat, glaube ich einigen Werth darauf legen zu müssen,

1) Arch. f. Anat. u. Physiol., Anat. Abth. 1893.
2) v. Kölliker, Handbuch. VI. Aufl., II. Bd., 1893, S. 264.
3) » » » 1896, S. 400.
4) Ramon y Cajal, Beitrag zum Studium der Med. obl.

dass auch für unser Object der Nachweis nicht als erbracht gelten kann.

Zu meiner früher gegebenen Beschreibung der Trapezkernendigungen habe ich in Bezug auf die Fasern, deren Dicke v. Kölliker als Kunstproduct erklärt, eine Beobachtung nachzutragen, die für ihr Verhalten wenigstens eine Analogie in schon Bekanntem an die Hand giebt. Ich habe nämlich an neuen Serien, deren Schnittrichtung und Dicke die Verfolgung der Fasern auf grössere Strecken zuliess, deutlich verfolgen können, dass die Fasern, wie die Figuren es zeigen, sich erst allmählich vor der Endigung verdicken, und zwar meist, indem sie in ihrem ganzen Verlauf nach der dorsalen Richtung allmählich stärker werden, ab und zu aber auch sehr bald nach dem Verlassen des Corpus trapezoides diejenige Dicke erreichen, die sie bis zur Theilung beibehalten. Ein solches Verhalten aber von endenden Neuriten kennen wir bereits und es wird bei denjenigen der Korbzellen der Kleinhirnrinde von niemand als Kunstproduct angesehen.

Woher die Fasern stammen, darüber möchte ich auch für dieses Object keine bestimmten Angaben machen; die einfache Verfolgung an Methylenblaupräparaten leistet nur wenig. Wahrscheinlich sind die Fasern grossentheils nur Collateralen des Corpus trapezoides, wenigstens habe ich dies noch am häufigsten constatiren können; von welcher Seite aber die betreffende Trapezfaser kommt, kann man ihr nicht ansehen. — Ich bemerke hierbei, dass ich niemals Axencylinder der Trapezkernzellen selbst um andere Zellen des Kernes Endigungen habe bilden sehen, und dass auch ich wie v. Kölliker angesichts zahlreicher Serien, in denen fast alle Körbe gefärbt sind, die betreffende Angabe Held's in Zweifel ziehen muss.

Die Bilder der Fig. 13 lehren mehrere Besonderheiten der Endigungen kennen, zunächst dass die Theilung des Neuriten, dessen Aufsplitterung hier nie an einer Dendritenspitze beginnt, sowohl am Zellkörper selbst als eine ziemliche Strecke vor ihm stattfinden kann. Ersteres zeigt besonders deutlich das Bild der Zelle *a*, wo ein glücklicher Schnitt die erste Theilung von oben her sehen lässt. Ferner zeigen mehrere Zellen in besonders schöner Ausbildung die Verlängerungen des Korbes, die sich auf die Dendriten erstrecken. Vollständig übereinstimmend ist aber das Bild mit denen aus anderen Kernen durchaus nicht,

ich kann hier jene feine Umspinnung der Dendriten bis an ihre letzten Endigungen nicht auffinden, und da ich nicht annehmen kann, dass bei den starken Färbungen die Faserung im weiteren Verlaufe nur wegen der zunehmenden Feinheit nicht mehr sichtbar ist, so ergiebt sich keine volle Analogie mit den früher beschriebenen Bildern.

Die Zeichnung *b* der Fig. 13 zeigt, dass eine Faser mehrere Endigungen bilden kann, und in den Fig. 14 und 15 sitzen die Körbe ebenfalls nur Theilästen der Faser auf, während der zweite Ast aus dem Kern hinaus in die Gegend der kleinen Olive zu verfolgen ist. Dieselbe Richtung schlägt die feine Faser ein, die man an der Endigung *c* der Fig. 13 sich ganz deutlich aus dem Korbe selbst ablösen sieht; vielleicht können sich auf beide Weisen Axencylinder mit ihren Endigungen über zwei verschiedene Kerne erstrecken.

Die Fig. 13 hat den Zweck, die Ergebnisse meiner Methode im Verhältniss zu der neuen Concrescenzlehre von Held darzulegen. Ich bemerke hierbei zunächst, dass ich in allen meinen Schnitten durch die verschiedensten Theile des Centralnervensystems von gegen 100 mit Methylenblau injicirten Thieren immer noch keine einzige Anastomose gesehen habe. Das ist freilich nur ein negativer Befund, aber doch wohl ein beachtenswerther, und dies um so mehr, als alle neuen Beobachtungen, und nicht zum mindesten die Held's selbst, es immer wahrscheinlicher machen, dass die Verbindungen alle auf ganz andere Weise zu Stande kommen, als durch einfache Anastomosen.

Held nimmt, gestützt auf Präparate von Thieren verschiedenen Alters, die nach einer Methode gefärbt sind, die der Autor anzugeben sich vorbehält, an, dass die Verbindungen zwischen endenden Axencylindern und dem Protoplasma im Laufe des extrauterinen Lebens eine immer innigere wird, indem bei neugeborenen Geschöpfen noch eine wirkliche Scheidewand wie eine Membran zwischen beiden Neuronen eingeschoben ist, welche später allmählich schwindet, so dass schliesslich streckenweise eine wirkliche Verwachsung beider Elemente eintritt. Held hält also die Beobachtungen Früherer nicht direct für falsch; er betont nur, dass die Golgi'sche Methode hauptsächlich an Embryonen und neugeborenen Geschöpfen angewandt werde, wodurch die Erkennung des von ihm aufgefundenen späteren Verhältnisses verhindert sei.

Ich hatte nun zwar zufällig in meiner vorigen Veröffentlichung betont, dass ich mit meiner Methode bei erwachsenen Thieren überall gleiche Verhältnisse nachzuweisen im Stande sei wie bei Embryonen, ich sah mich aber doch veranlasst, einige Versuche an ganz alten Thieren anzustellen, um speciell die Held'sche Lehre beleuchten zu können. Ich wählte zunächst einen ganz alten Kaninchenbock, und was ich am Trapezkern dieses Thieres erreichte, zeigt die Fig. 12. Diese ist nach *einem* Schnitte gezeichnet, um als Beleg dafür zu dienen, dass neben einander blosse Färbung der Neuritenendigungen wie blosse Zellfärbungen ohne eine Andeutung des Korbes, als auch gleichzeitige Färbungen beider Bestandtheile sich eingestellt haben. Genau dasselbe Verhalten findet der Leser auch an den anderen Abbildungen mehrfach, von denen insbesondere Fig. 2 und Fig. 20 nach Präparaten von ausgewachsenen Thieren gezeichnet sind.

Lehren demnach zwar die Untersuchungen Held's die interessante Thatsache kennen, dass die Verbindung der Neuritenendigungen mit dem Protoplasma der umsponnenen Zellen im Laufe des Lebens immer inniger wird, so ist mit meinen Befunden meines Erachtens die Annahme nicht zu vereinbaren, dass schliesslich eine wirkliche Verschmelzung beider Substanzen stattfindet. Freilich lehren Held's Untersuchungen wie ja auch die meinigen, dass die Contacte weit innigere sind, als man es sich bisher vorgestellt hat, und sie werden wohl so innig sein, dass rein histologisch bei Anwendung von gewöhnlichen Farbreagentien das mikroskopische Bild einer wahren Verschmelzung entsteht, aber die chemisch differenzirende Methylenblaumethode zeigt doch unzweideutig, dass, so dicht die Elemente auch verbunden sind, ihre Substanzen sich nicht vermischen, sonst wäre eine so reinliche Scheidung bei der vitalen Methylenblaureaction nicht denkbar. Meine Ansicht geht mithin dahin, dass ich zwar Held's Angaben nicht bestreite, nach denen histologisch nicht zu erkennen ist, wo der eine Bestandtheil anfängt und der andere aufhört, dass also rein morphologisch bei Anwendung der fein differenzirenden Färbungsmethode Held's wohl eine Verschmelzung sich wird nachweisen lassen, dass aber beide Elemente noch so weit gesondert bleiben, dass sie in ihrem Chemismus von einander unabhängig sind. Hiernach sprechen meine Beobachtungen im Gegensatze zu Held mehr für die Richtigkeit der Contactlehre.

Den Trapezkernendigungen ganz ähnlich sind diejenigen im ventralen (accessorischen) Acusticuskern (vergl. Fig. 16 u. 17). Nur sind die Verbreiterungen der Fasern hier nicht so reich, aber die Zeichnungen sind nach Präparaten vom Hund und der Katze gezeichnet, bei denen auch die Trapezkernendigungen, wie die Fig. 14 lehrt, nicht so reich an jenen Bildungen sind, die ich früher nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch als Knöpfchen bezeichnet habe, die aber wahrscheinlich nur Verbreiterungen und nicht Verdickungen sind. — Bei den Nagern ist der ventrale Kern sehr viel weniger entwickelt, es tritt dafür das Tuberculum acusticum in schönster Ausbildung auf, in diesem erscheinen aber wieder die zuerst beschriebenen Bilder der Körbe mit feiner Umspinnung der Dendriten.

Auch an den Fasern, die im ventralen Acusticuskern enden, ist die allmähliche Verdickung vor der Endigung oft deutlich zu erkennen, daneben enthält aber dieser Kern sehr viele Fasern, die sich ausserordentlich reich verästeln, wie die in die Fig. 16 eingezeichnete. Dass diese Fasern schliesslich mit in die Endkörbe eingehen, habe ich nicht sicher verfolgen können, aber Beobachtungen wie die der Zelle *a* beweisen, dass an der Bildung eines Korbes noch Nebenfasern theilnehmen können. Zugleich ist hier das dem Leser vom Trapezkern her bereits bekannte Hervorgehen einer Faser aus dem Korb selbst erkennbar.

Eine oberflächliche Aehnlichkeit mit den zuletzt beschriebenen Endigungen haben die viel kleineren Bilder der Fig. 18. Dieselbe stellt einen Theil eines Längsschnittes einer Kleinhirnwindung dar, deren Körnerschicht von unzähligen kleinen Faserendigungen erfüllt ist, an denen man nur mehr von den Verbreiterungen als von den Fasern erkennt. Die Art, wie diese Endapparate den Fasern aufsitzen, macht es für jeden, der die Kleinhirnrinde viel mit der Golgi'schen Methode untersucht hat, ohne weiteres deutlich, dass die Fasern nichts anderes sind, als die von Ramon als Moosfasern bezeichneten Bildungen. Diese erweisen sich mithin nicht als Kunstproducte. Ebenso wenig sind sie Entwicklungsstadien, ist doch die Fig. 18 nach einem Präparate von einer ausgewachsenen Katze gezeichnet, und ich habe auch mit der Golgi'schen Methode jene Bildungen bei erwachsenen Thieren imprägnirt gefunden. Die Silberbilder, die ich hierbei erhalten habe, entsprechen zwar meist den gewöhnlichen Abbildungen; man sieht den Fasern selbst oder kleinen

Nebenästchen ein schwer zu beschreibendes kleines Gebilde aufsitzen, das allem anderen eher ähnlich ist als einer Nervenendigung. Aber ebenso wie Held in seiner Arbeit beschreibt und abbildet, habe ich die Fasern auch mit der Silbermethode öfter so gefunden, dass ein ganz ähnliches Bild resultirte wie in den Methylenblaubildern der Fig. 18.

Das hier gezeichnete Verhalten gehört zu meinen ersten Funden mit der Methode, ist aber inzwischen auch von Dogiel beschrieben worden. Mit der Deutung, die dieser Autor giebt, kann ich mich nicht bestimmt einverstanden erklären. Dogiel schliesst nämlich aus der Form der Endigungen, dass sie bestimmt seien, kleine Körnerzellen zu umfassen. Diese Deutung ist freilich sehr naheliegend, allein es ist mir bisher nicht gelungen, eine so umsponnene Zelle aufzufinden, und bei genauerem Zusehen wird man auch gewahr, dass die Form der Endigungen jenem angenommenen Zwecke nicht ganz angepasst ist. Denn theils sind dieselben viel zu gross für die kleinen Körnerzellen, und es kommen ausserdem sehr langgestreckte Ausbreitungen vor, besonders wo die Endigungen der Faser wie Beeren dicht anhängen.

Ueberhaupt ist es schwer, bei der Annahme der Dogiel'schen Deutung, sich über die Leitungsverhältnisse in der Körnerschicht eine Vorstellung zu bilden; denn es kommt hinzu, dass auch die Dendriten der Körner nach einer Hypothese von Ramon y Cajal sich um die Körper ihrer Nachbarn verästeln sollen. Auch für diese Annahme kann ich keine Belege finden, dagegen bin ich öfter auf Bilder gestossen, wie sie die Fig. 19 giebt, wo eine Dendritenverästelung mit einer Moosfaserendigung zusammenzutreffen scheint, ohne dass eine Zelle darin liegt, und es würde sich aus diesen Beobachtungen, die freilich nicht häufig und wegen der Feinheit des Objectes nicht ganz unzweideutig sind, ergeben, dass die fraglichen beiden Bestandtheile in einem ähnlichen Verhältnisse zu einander stehen, wie es in den Glomeruli des Bulbus olfactorius vorzuliegen scheint.

Ueber die Verbindungsweise der übrigen Elemente der Kleinhirnrinde etwas auszusagen berechtigen mich meine bisherigen spärlichen Beobachtungen noch nicht, das Glück war mir hier nicht günstig.

Dagegen sind meine Untersuchungen wiederum sehr erfolgreich gewesen bei der Grosshirnrinde. Ich hätte meine allgemeinen

Schlüsse mit weit mehr Vorsicht ziehen zu müssen geglaubt, hätte mir nicht die Untersuchung dieses wichtigsten Organes sowohl mit den im Vorhergehenden beschriebenen als auch in allen seinen Theilen vollständig unter einander übereinstimmende Resultate ergeben.

Soweit mir die Literatur bekannt ist, habe ich über die Verbindungsweise der Elemente der Grosshirnrinde keine einzige positive Angabe gefunden; die meisten Darstellungen begnügen sich mit dem Hinweis auf die Hypothese RAMON's, nach der in der Grosshirnrinde die Reizübertragung vermittelst der Spitzen der Dendriten und der Dornen, die die Dendriten auf der Oberfläche tragen sollen, in der Weise geschehen, dass die Enden sich insbesondere in der Schicht der Tangentialfasern an die Neuriten anlegen und die Ströme gleichsam absaugen. Erwiesen ist hiervon nichts mit Sicherheit, ja ein Verhältniss wie das angenommene wäre auch histologisch mit unserer Methodik kaum erweisbar.

Was nun meine Befunde in der Hirnrinde betrifft, so ist zu ihrer Beschreibung wenig zu sagen, die Bilder der Fig. 20 sind ja kaum misszuverstehen und stimmen mit den oben beschriebenen ganz überein. Die Körbe sind auch hier bald ganz zu sehen, bald nur am Rande des ganzen protoplasmatischen Theils, bald aber auch nur an dem des Zellkörpers und des Anfangstheils der Hauptdendriten, und zwar letzteres leider an allen grossen Pyramidenzellen. Soweit ich den Beginn der Aufsplitterungen feststellen konnte, was bisher nur an den kleineren Zellarten möglich war, ergaben sich genau mit denen des hinteren Vierhügels übereinstimmende Verhältnisse. An der Serie vom erwachsenen Kaninchen, der die Abbildungen entnommen sind, war nur der Beginn der Aufsplitterungen an der Spitze eines Dendriten, meist des oberen, aber auch öfters anderer, noch sehr viel häufiger zu constatiren, und es scheint hier dieses Verhalten noch mehr zu überwiegen.

Es zeigt sich mithin, dass in der Grosshirnrinde dieselben Verbindungsapparate vorhanden sind wie in anderen Theilen des Gehirns. Selbstverständlich kann ich daraufhin nicht in Abrede stellen, dass es nicht auch noch andere Wege für die Reizübertragung giebt; jene Hypothese RAMON's aber, die die Dendritenspitzen als die eigentlichen Aufnahmeapparate der Erregungen hinstellt, war doch nur eine Aushilfe bei dem bis-

herigen Mangel an positivem Wissen, und sie verliert somit, wenn meine Befunde sich bestätigen, ihre Berechtigung. Dass für die Dornen an den Protoplasmafortsätzen, denen Ramon eine so grosse Bedeutung beilegt, bei der Fortleitung der Reize gar keine Rolle übrig bleibt, zeigen meine Befunde, wie mir scheint, unzweideutig. Ich habe früher betont, dass ich die Dendriten in meinen Präparaten stets glatt sehe; dies kann ich auch heute noch aufrecht erhalten, muss aber eine Einschränkung machen. Ich habe die Dornen einige Male in der Grosshirnrinde, aber auch nur hier, gesehen und zeichne das Bild in die Fig. 20 mit ein. Meine Objecte legen die Annahme nahe, dass es nur Lymphräume sind, in denen das Methylenblau von der Fixationsflüssigkeit getroffen wurde. Es sind ganz feine Knötchen, die zum Theil mit dem Dendrit gar nicht verbunden sind, zum Theil durch eine ganz feine blaue Linie mit ihm zusammenhängen. Das Ganze erinnert kaum an das grobe Bild der Silberpräparate.

Ich bemerke noch, dass in der Serie, aus der meine Abbildungen stammen, und in einer zweiten die Endigungen sich über die ganze Rinde verstreut finden, so dass ich in ihnen eine allgemeine Einrichtung des ganzen Organs sehe. Dagegen ist mir der Nachweis nicht an allen Zellarten geglückt, er fehlt für die Zellen der obersten und untersten Schicht.

Wo mich meine Untersuchungen aber bisher im Stiche gelassen haben, darf ich nach meinen Erfahrungen mit der höchst launenhaften Methode bestimmt hoffen, bei ausgedehnter Anwendung derselben die Verbindungen noch nachweisen zu können.

Erklärung der Abbildungen.

Sämmtliche Abbildungen sind nach Präparaten gezeichnet, die mit der Methode der subcutanen Methylenblau-Injection gewonnen sind.

Fig. 1. Zellbilder aus dem Kern des hinteren Vierhügels vom neugeborenen Meerschweinchen. Vergr. Hartnack Obj. 7, Oc. 3.

Fig. 2. Dasselbe von einem erwachsenen Kaninchen. Vergr. Obj. 7, Oc. 3.

Fig. 3. Dasselbe aus dem Kern der lateralen Schleife, a) eines 8 Wochen alten Kaninchens, b) eines neugeborenen Meerschweinchens. Vergr. Obj. 7, Oc. 3.

Fig. 4. Aus einem Schnitt durch das mediale Blatt der oberen Olive eines 8 Wochen alten Kaninchens. Vergr. Obj. 7, Oc. 3.

Fig. 5. Zellbilder aus dem Facialiskern eines erwachsenen Kaninchens. Vergr. Obj. 7, Oc. 3.

Fig. 6. Dasselbe aus dem cerebralen Trigeminuskern eines erwachsenen Kaninchens. Vergr. Obj. 7, Oc. 3.

Fig. 7. Dasselbe aus dem Oculomotoriuskern eines jungen Kaninchens. Vergr. Obj. 7, Oc. 3.

Fig. 8. Eine Zelle aus der Substantia reticulata eines erwachsenen Kaninchens. Vergr. Obj. 7, Oc. 3.

Fig. 9. Zellbilder aus dem Corpus geniculatum med. eines erwachsenen Kaninchens. Vergr. Obj. 7, Oc. 3.

Fig. 10. Dasselbe aus einem Brückenkern eines erwachsenen Kaninchens. Vergr. Obj. 7, Oc. 3.

Fig. 11. Dasselbe aus dem vorderen Vierhügel eines erwachsenen Kaninchens. Vergr. Obj. 7, Oc. 3.

Fig. 12. Schnitt durch den Trapezkern eines ganz alten Kaninchens. Vergr. Obj. 4, Oc. 3.

Fig. 13. Endapparate aus dem Trapezkern eines erwachsenen Kaninchens. Vergr. Obj. 9, Oc. 2.

Fig. 14. Dasselbe von einem $^1/_4$ Jahr alten Hund. Vergr. Obj. 7, Oc. 3.

Fig. 15. Dasselbe von einem 8 Wochen alten Meerschweinchen. Vergr. Obj. 7, Oc. 3.

Fig. 16. Dasselbe aus dem ventralen (accessorischen) Acusticuskern eines $^1/_4$ Jahr alten Hundes. Vergr. Obj. 7, Oc. 3.

Fig. 17. Dasselbe von einer ausgewachsenen Katze. Vergr. Obj. 7, Oc. 3.

Fig. 18. Aus einem Längsschnitt durch die Körnerschicht einer Kleinhirnwindung einer ausgewachsenen Katze. Vergr. Obj. 7, Oc. 3.

Fig. 19. Körnerzellen und Moosfasern. Von einem ausgewachsenen Kaninchen. Vergr. Obj. 7, Oc. 3.

Fig. 20. Zellbilder aus den mittleren Schichten der Grosshirnrinde vom ausgewachsenen Kaninchen. Vergr. Obj. 7, Oc. 3.

AUSSERORDENTLICHE SITZUNG VOM 13. NOV. 1897.

Vorträge hielten:

Herr H. Bruns, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von F. Hausdorff: »Das Risico bei Zufallsspielen.«

P. Drude, ao. M.: »Zur Theorie der anomalen elektrischen Dispersion und Absorption.

F. Hausdorff, *Das Risico bei Zufallsspielen.* Vorgelegt von H. Bruns.

Die vorliegende Arbeit behandelt in elementarer Weise zwei zur Charakteristik eines Zufallsspiels geeignete Grössen, die ich durchschnittliches und mittleres Risico nenne, und die sich zu den Gewinnen und Verlusten des Spieles ähnlich verhalten, wie der durchschnittliche und mittlere Fehler einer Beobachtungsreihe zu den positiven und negativen Fehlern der Einzelbeobachtungen. Eine tiefere Discussion vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung habe ich nicht geben wollen, da hierbei nur Dinge zu berühren wären, die sich in der Sprache der Fehlertheorie besser sagen lassen und dort längst gesagt worden sind. Selbst auf das Gauss'sche Gesetz ist nur gelegentlich als Grenzfall hingewiesen, ohne den Beweis, dass ein aus zahlreichen Einzelfehlern combinirter Gesammtfehler angenähert das Exponentialgesetz befolgt, auf unseren gegenwärtigen Fall zu übertragen — einen Beweis, der im Allgemeinen auf die Ermittlung der ersten Glieder einer semiconvergenten Reihe hinauszuführen scheint. Unsere Betrachtung verhält sich also zu einer allgemeinen Theorie der Zufallsspiele etwa wie die Gauss'sche Theoria combinationis, die mit dem einzigen Begriff des mittleren Fehlers operirt, zu der älteren Theoria motus, in der das Fehlergesetz selbst abgeleitet wird. Uebrigens steht es so, dass, so lange das Gauss'sche Gesetz angenähert gilt, der betreffende Beobachtungsmodus oder das betreffende Zufallsspiel durch *eine*

Grösse, zu der wir den mittleren Fehler oder das mittlere Risico wählen können, hinreichend charakterisirt ist; wo dies nicht der Fall ist, treten weitere Potenzmittelwerthe gerader und (bei merklicher Asymmetrie gegen den Mittelwerth) ungerader Ordnung als nothwendige Bestimmungsstücke hinzu, bis hinab zu dem einzelnen, willkürlich angeordneten Zufallsspiel, worin eigentlich alle einzelnen Gewinne, Einsätze und Wahrscheinlichkeiten die charakteristischen Parameter sind. — Es war mir nicht möglich, die theilweise in Versicherungszeitschriften zerstreute Literatur über das Risico vollständig einzusehen; übrigens ist bei der Einfachheit dieser Betrachtungen ein Anspruch auf Priorität wohl von keiner Seite zu erheben. Mir kam es mehr auf die Consequenz und Klarheit der Grundbegriffe, als auf absolute Neuheit der Resultate an; und ich kann nicht behaupten, dass ich in den mir vorliegenden Arbeiten (die im Folgenden gelegentlich citirt sind) jene Consequenz gefunden hätte. Gegen die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung so unerlässliche Scheidung zwischen unabhängigen und abhängigen Ereignissen ist von mehr als einer Seite verstossen worden, weshalb ich diesem Punkte eine besondere Aufmerksamkeit zugewandt habe. Die beiden ersten Abschnitte sind den grundlegenden Erörterungen, die drei letzten den Anwendungen auf Lotterie, Anleihen und Versicherungswesen gewidmet.

1. Das durchschnittliche Risico.

Bei jedem Zufallsspiel handelt es sich um zwei einander gegenüberstehende Spieler und um bedingte, also mit Wahrscheinlichkeitswerthen behaftete Zahlungen des einen an den anderen. Um Worte zu sparen, soll der eine der beiden kurzweg als *Spieler*, der andere als *Spielunternehmer* bezeichnet werden; ferner sollen Zahlungen des Spielers an den Unternehmer *Einsätze*, Zahlungen des Unternehmers an den Spieler *Preise* heissen. Durch Trennung der möglichen Fälle lässt sich das Zufallsspiel immer auf die Form bringen, dass n einander ausschliessende und zur Gewissheit ergänzende Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1 p_2 \dots p_n$ in Betracht kommen, derart dass

1) $$\sum^{\alpha} p_\alpha = 1;$$

im Falle des Ereignisses p_α habe der Spieler den Einsatz E_α, der Unternehmer den Preis A_α zu zahlen. Die Grössen

$$A = \sum^\alpha p_\alpha A_\alpha , \qquad E = \sum^\alpha p_\alpha E_\alpha \tag{2}$$

stellen die Summen der mathematischen Gewinnhoffnungen für Spieler und Unternehmer dar; ist das Spiel ein »gerechtes«, so ist $A = E$, ist es für den Unternehmer günstig, so ist $A < E$. Die Differenz

$$x_\alpha = A_\alpha - E_\alpha \tag{3}$$

stellt, im Falle p_α, den *Reingewinn* des Spielers dar (oder für $x_\alpha < 0$ den reinen Verlust), und der Ausdruck

$$x = \sum^\alpha p_\alpha x_\alpha = A - E \tag{4}$$

seine gesammte Reingewinnhoffnung, die bei gerechtem Spiel verschwindet; ebenso ist $-x_\alpha$ der Reingewinn des Unternehmers im Falle p_α, und $-x$ seine gesammte Reingewinnhoffnung. Wenn x nicht verschwindet, so können wir schreiben

$$0 = \sum^\alpha p_\alpha (x_\alpha - x) = \sum^\alpha p_\alpha (A_\alpha - E_\alpha - x) ,$$

d. h. das Spiel würde ein gerechtes sein mit den Preisen $A_\alpha - x$ und den Einsätzen E_α oder mit den Preisen A_α und den Einsätzen $E_\alpha + x$. Bleiben wir bei dieser zweiten Vorstellung und nehmen x als negativ, das Spiel als ein für den Unternehmer günstiges, so zahlt der Spieler zu jedem der »gerechten« Einsätze $E_\alpha + x$ thatsächlich einen festen Zuschlag $-x$, den er also bereits vor Eröffnung des Spieles zahlen kann und der den »ungerechten« Gewinn des Spielunternehmers darstellt. Diese von vornherein zu entrichtende Abgabe an den Unternehmer beeinflusst im Uebrigen den Charakter des Spieles nicht, das nunmehr zu einem gerechten wird: wir denken uns die Abtrennung des Theiles x (der dem »systematischen« Theile eines Beobachtungsfehlers x_α entspricht) ausgeführt, ändern die Bezeichnung und nennen die neuen Grössen wieder $A_\alpha, E_\alpha, x_\alpha$, sodass fortan die durch (4) definirte Grösse x verschwindet.

In der Praxis sind vielfach die Einsätze E_α einander gleich, also $= E$, und werden dann ebenfalls vor Eröffnung des Spieles entrichtet; die Preise A_α werden, soweit sie nicht verschwinden (in welchem Falle $x_\alpha = -E$, d. h. der Spieler seinen Einsatz

verliert), in der Regel grösser als E gehalten. Nehmen wir z. B. an, dass in einer Lotterie von s Loosen a Loose mit den Preisen (Gewinnen) A, b Loose mit den Gewinnen B gezogen werden, während c Nieten bleiben, so ist für den Spieler eines Looses

$$s = a + b + c\,, \quad p_1 = \frac{a}{s}\,, \quad p_2 = \frac{b}{s}\,, \quad p_3 = \frac{c}{s}\,,$$

$$E = aA + bB\,, \quad x_1 = A - E\,, \quad x_2 = B - E\,, \quad x_3 = -E\,,$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0\,.$$

Die Formel $sE = aA + bB$ spricht die Bedingung des gerechten Spieles hier unmittelbar in der Form aus, dass Einnahmen und Ausgaben des Lotterieunternehmers bilanziren, so dass weder er, noch die Gesammtheit der Spieler Gewinn oder Verlust erleidet. Um die Zerlegung in die einander ausschliessenden Fälle noch an einem andern Beispiel zu zeigen, nehmen wir zwei von einander *unabhängige* Lotterien von je s Loosen an; in der einen sollen a Loose mit dem Gewinn A, in der andern b Loose mit dem Gewinn B gezogen werden. Auch hier ist für einen Spieler, der zu beiden Lotterien ein Loos nimmt, der Gesammteinsatz $E = \frac{aA + bB}{s}$, aber wegen der Unabhängigkeit beider Ziehungen sind vier Fälle zu unterscheiden, je nachdem beide Loose oder eins von beiden oder keines gewinnt. Es wäre also etwa zu setzen

$$p_1 = \frac{ab}{s^2}\,, \quad A_1 = A + B\,, \quad x_1 = A + B - E\,,$$

$$p_2 = \frac{a(s-b)}{s^2}\,, \quad A_2 = A\,, \quad x_2 = A - E\,,$$

$$p_3 = \frac{(s-a)b}{s^2}\,, \quad A_3 = B\,, \quad x_3 = B - E\,,$$

$$p_4 = \frac{(s-a)(s-b)}{s^2}\,, \quad A_4 = 0\,, \quad x_4 = -E\,,$$

woraus wieder $\sum_\alpha p_\alpha x_\alpha = 0$ folgt.

Das Verschwinden des Ausdrucks $\sum_\alpha p_\alpha x_\alpha$ bedingt, dass die x_α theils positive, theils negative Werthe haben, dass also einer Anzahl Reingewinne eine Anzahl Verluste gegenübersteht. Trennen wir die x_α in die positiven x_π und die negativen x_ν, so ist

$$\sum_\pi p_\pi x_\pi + \sum_\nu p_\nu x_\nu = 0\,,$$

oder

$$(5) \qquad D = \sum\nolimits^{\pi} p_\pi x_\pi = -\sum\nolimits^{\nu} p_\nu x_\nu = \tfrac{1}{2}\sum p_\alpha [x_\alpha] .$$

Diese Grösse D, der mit Rücksicht auf die Wahrscheinlichkeiten genommene Mittelwerth aus den positiven oder den absoluten negativen oder der halbe Mittelwerth aus allen absoluten Werthen der Reingewinne x_α, soll das *durchschnittliche Risico* des Zufallsspieles heissen. Er besitzt eine einfache praktische Bedeutung: er stellt nämlich einerseits die Prämie $D = \sum^{\pi} p_\pi x_\pi$ dar, für welche der Spieler seine *Gewinn*chance an einen anderen Spieler abtreten (verheuern) kann, andererseits die Prämie $D = -\sum^{\nu} p_\nu x_\nu$, für welche der Spieler sich bei einem anderen Spieler gegen Spiel*verlust* versichern kann.

Man kann diese Operationen fortgesetzt denken. Der Spieler A habe seine Gewinnchance an B verheuert und dafür die Prämie

$$D = \sum\nolimits^{\alpha} p_\alpha x_\alpha , \quad x_\alpha > 0$$

erhalten. Der Spieler B erleidet nur dann Verlust, wenn $x_\alpha < D$ ausfällt; er kann seine Gewinnchance an einen Spieler C weitergeben und erhält dafür die Prämie

$$D_1 = \sum\nolimits^{\alpha} p_\alpha (x_\alpha - D) , \quad x_\alpha > D .$$

Ebenso würde C seine Gewinnchance für die Prämie

$$D_2 = \sum\nolimits^{\alpha} p_\alpha (x_\alpha - D - D_1) , \quad x_\alpha > D + D_1$$

verheuern können u. s. f. Umgekehrt, wenn sich A für die Prämie

$$D = -\sum\nolimits^{\alpha} p_\alpha x_\alpha , \quad x_\alpha < 0$$

bei B gegen Spielverlust versichert hat, so kann B sich bei C für die Prämie

$$D' = -\sum\nolimits^{\alpha} p_\alpha (x_\alpha + D) , \quad x_\alpha < -D$$

gegen einen aus seinem Verhältniss zu A resultirenden Verlust rückversichern, und C kann sich wiederum für die Prämie

$$D'' = -\sum\nolimits^{\alpha} p_\alpha (x_\alpha + D + D') , \quad x_\alpha < -D - D'$$

gegen Verlust weiter versichern u. s. w.

Wenn die Reingewinne x_α dicht genug vertheilt sind, um als stetige Mannigfaltigkeit angesehen zu werden, so tritt an Stelle der Wahrscheinlichkeit p_α von x_α die Wahrscheinlichkeit $\varphi(x)\,dx$, dass der Reingewinn zwischen den Grenzen $x \pm \frac{dx}{2}$ liege, und unsere Summen gehen in Integrale über die »Fehlerfunction« $\varphi(x)$ über[1]). Die Relationen $\sum_\alpha p_\alpha = 1$, $\sum_\alpha p_\alpha x_\alpha = 0$ werden

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\,dx = 1\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\varphi\,dx = 0$$

und die Gleichungen für $D\,D_1\,D_2\,D'\,D''$ geben

$$D = \int_0^\infty x\,\varphi\,dx = -\int_{-\infty}^0 x\,\varphi\,dx\,,$$

$$D_1 = \int_D^\infty (x - D)\,\varphi\,dx\,, \quad D' = -\int_{-\infty}^{-D} (x + D)\,\varphi\,dx\,,$$

$$D_2 = \int_{D+D_1}^\infty (x - D - D_1)\,\varphi\,dx\,, \quad D'' = -\int_{-\infty}^{-D-D'} (x + D + D')\,\varphi\,dx\,.$$

Wenn $\varphi(x)$ eine gerade Function von x, also $\varphi(-x) = \varphi(x)$ ist, so wird einfacher

$$(6)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \varphi\,dx = \tfrac{1}{2}\,, \quad D = \int_0^\infty x\,\varphi\,dx\,, \\ \displaystyle D_1 = D' = \int_D^\infty (x - D)\,\varphi\,dx\,, \quad D_2 = D'' = \int_{D+D_1}^\infty (x - D - D_1)\,\varphi\,dx\,. \end{cases}$$

Im besonderen Falle des GAUSS'schen Fehlergesetzes

$$(7)\qquad \varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2x^2}$$

---

1) Die Ausdrücke Fehlerfunction, Fehlergesetz, Präcisionsmaass bedürften im Grunde einer sinngemässen Anpassung an die Nomenclatur der Zufallsspiele, ähnlich wie wir statt durchschnittlichen und mittleren »Fehlers« jetzt durchschnittliches und mittleres »Risico« haben.

werden DD_1D_2 gleich absoluten Zahlen, dividirt durch das Präcisionsmaass h. Wenn man neben den bekannten Transcendenten

$$\Theta(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt \text{ und}$$

$$\Phi(y) = e^{y^2} \int_y^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{y^2} [1 - \Theta(y)]$$

noch die dritte Function

$$\Psi(y) = 2 \int_y^\infty e^{-t^2} (t - y) dt = e^{-y^2} - \sqrt{\pi}\, y\, [1 - \Theta(y)]$$

$$= e^{-y^2} [1 - 2y\Phi(y)] = - e^{-y^2} \frac{d\Phi(y)}{dy}$$

einführt, so folgt

$$hD = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-h^2x^2} hx\, d(hx) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Psi(0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

$$hD_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_D^\infty e^{-h^2x^2} (hx - hD)\, d(hx) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Psi(hD)$$

$$hD_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Psi(hD + hD_1)$$

u. s. w. Setzt man $D_1 = D \cdot \delta_1$, $D_2 = D \cdot \delta_2$, so folgt

$$\delta_1 = \Psi\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right), \quad \delta_2 = \Psi\left(\frac{1 + \delta_1}{2\sqrt{\pi}}\right), \quad \delta_3 = \Psi\left(\frac{1 + \delta_1 + \delta_2}{2\sqrt{\pi}}\right)$$

u. s. w. Aus den Tafeln für diese transcendenten Functionen findet man

(8) $\quad \delta_1 = 0{,}57854\,, \quad \delta_2 = 0{,}40272\,, \quad \delta_3 = 0{,}30645\,,$

woraus die Abnahme der durchschnittlichen Risiken bei successiver Rückversicherung oder Gewinnverheuerung ersichtlich ist.

Mit welcher Annäherung die eben aufgeführten Zahlen $\delta_1\, \delta_2\, \delta_3 \ldots$ selbst bei beliebig anderer Vertheilung der x reproducirt werden, ist etwa aus folgendem Beispiel zu ersehen. Es möge x alle Werthe von $-k$ bis $+k$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen können, sodass $\varphi(x) = \frac{1}{2k}$ für $x^2 \leqq k^2$ und $\varphi(x) = 0$ für $x^2 > k^2$. Dann findet man

$$D = \int_0^k \frac{x\,dx}{2k} = \frac{k}{4},$$

$$\frac{D_1}{D} = \delta_1 = \int_D^k \frac{2(x-D)\,dx}{k^2} = \left(1 - \frac{D}{k}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16},$$

$$\delta_2 = \left(1 - \frac{D+D_1}{k}\right)^2 = \left(1 - \frac{1+\delta_1}{4}\right)^2, \quad \delta_3 = \left(1 - \frac{1+\delta_1+\delta_2}{4}\right)^2 \text{ u. s. w.}$$

Damit wird

$$\delta_1 = 0{,}56250, \quad \delta_2 = 0{,}37134, \quad \delta_3 = 0{,}26681.$$

Bekanntlich nähert sich das aus der Combination zahlreicher Einzelfehler resultirende Fehlergesetz dem GAUSS'schen, welches auch die Fehlergesetze der Einzelfehler sein mögen. In der That zeigen schon bei Combination von *zwei* Einzelfehlern der eben behandelten Art die Zahlen δ eine nähere Uebereinstimmung mit den Werthen (8). Die Fehlerfunction wird hier, wenn man die Constante k mit ihrem halben Werthe vertauscht,

$$\varphi(x) = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{\sqrt{x^2}}{k}\right),$$

wobei unter $\sqrt{x^2}$ der absolute Werth von x verstanden wird, sodass die Curve $y = \varphi(x)$ aus den zwei geradlinigen Strecken besteht, die den Punkt $y = \frac{1}{k}$ der Ordinatenachse mit den beiden Punkten $x = \pm k$ der Abscissenachse verbinden.

Man erhält

$$D = \int_0^k \frac{x}{k}\left(1 - \frac{x}{k}\right) dx = \frac{k}{6},$$

$$\frac{D_1}{D} = \delta_1 = \left(1 - \frac{D}{k}\right)^3 = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3,$$

$$\delta_2 = \left(1 - \frac{D+D_1}{k}\right)^3 = \left(1 - \frac{1+\delta_1}{6}\right)^3, \quad \delta_3 = \left(1 - \frac{1+\delta_1+\delta_2}{6}\right)^3, \ldots$$

Die Zahlenwerthe sind

$$\delta_1 = 0{,}57870, \quad \delta_2 = 0{,}40012, \quad \delta_3 = 0{,}30102.$$

2. Das mittlere Risico.

Für das durchschnittliche Risico kann es, seiner Natur nach, keine allgemeinen Formeln geben; die Trennung der x_α in positive Werthe x_π und negative x_ν ist nur im Einzelfalle

wirklich durchzuführen. Man hat sich also nach anderen, zur Charakteristik des Zufallsspieles geeigneten Grössen umzusehen. Hierzu bieten sich die Potenzmittelwerthe der Reingewinne x_α dar, und zwar aus den x_α selbst oder ihren absoluten Werthen. Ich setze

$$(9)\quad \begin{cases} P_s = \sum^\alpha p_\alpha x_\alpha^s \\ Q_s = \sum^\alpha p_\alpha [x_\alpha^s] = \sum^\pi p_\pi x_\pi^s + (-1)^s \sum^\nu p_\nu x_\nu^s \\ Q_{2s} = P_{2s}\,. \end{cases}$$

Hierbei ist $P_1 = 0$, $Q_1 = 2D$,

$$(10)\qquad P_2 = Q_2 = M^2 = \sum^\alpha p_\alpha x_\alpha^2\,.$$

Die durch (10) eingeführte Grösse M heisst das *mittlere Risico* des Zufallsspieles. Man nimmt an, dass diese ersten der Zahlen $P_s Q_s$ hauptsächlich zur Charakteristik des Zufallsspieles beitragen; diese Annahme wird weniger für ein einzelnes Spiel, als für ein durch Combination mehrerer Spiele entstehendes Gesammtspiel, weniger für den einzelnen Spieler, als für eine Gesammtheit unabhängiger Spieler zutreffen. Bei der Zusammenfassung einer grossen Anzahl beliebiger Einzelspiele nähert sich das »Fehlergesetz« der Reingewinne x des Gesammtspieles dem Gauss'schen; in diesem Falle genügt der eine Parameter h, von dem alle Grössen $P_s Q_s$ abhängig werden, zur Kennzeichnung des Gesammtspieles, oder die sämmtlichen $P_s Q_s$ lassen sich durch eines unter ihnen, z. B. durch P_2 oder M, ausdrücken. Insbebesondere besteht dann zwischen D und M die Relation

$$(11)\qquad \frac{D}{M} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}39894\,, \quad \frac{M}{D} = \sqrt{2\pi} = 2{,}50663$$

oder näherungsweise $2M = 5D$.[1]) Der Parameter h der Formel (7) ergiebt sich aus

$$\sqrt{2}Mh = 2\sqrt{\pi}Dh = 1\,,$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass der Reingewinn des Gesammtspieles zwischen den Grenzen $\pm x$ liege, ist

$$w_x = \Theta(hx) = \Theta\left(\frac{x}{2\sqrt{\pi}D}\right) = \Theta\left(\frac{x}{\sqrt{2}M}\right).$$

---

1) Die oben erwähnten Fehlerfunctionen $\varphi = \frac{1}{2k}$ und $\varphi = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{\sqrt{x^3}}{k}\right)$ geben $\frac{D}{M} = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}43301$ resp. $\frac{D}{M} = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0{,}40825$.

Sucht man aus den Tafeln für die Transcendente $\Theta(y)$ zu einigen besonderen Werthen von w_x die zugehörigen Argumente, so kann man aus der folgenden Zusammenstellung

$w_x =$	0,5000	0,9000	0,9900	0,9990	0,9999
$x : D =$	1,6907	4,1230	6,4567	8,2481	9,752
$x : M =$	0,6745	1,6449	2,5758	3,2905	3,891

sich ein Urtheil über die muthmassliche Grösse und Vertheilung der Reingewinne bilden, wenn man D oder M kennt. Das Dreifache von M kann praktisch als äusserste Grenze des zu erwartenden Gewinnes oder Verlustes angesehen werden; da $w_{3M} = 0{,}9973$, so wird in tausend Fällen diese Grenze kaum dreimal überschritten werden. Der zu $w_x = \frac{1}{2}$ gehörige Werth $x = 0{,}6745\, M \sim \frac{2}{3} M$ würde als »wahrscheinliches Risico« zu bezeichnen sein.

Von den Grössen P_3, Q_3 u. s. w. der Formel (9) können wir absehen; nur ist zu bemerken, dass die Grössen P_{2s+1} mit ungeradem Index, weil sie aus positiven und negativen Werthen gemittelt sind, im Allgemeinen kleiner ausfallen als die Grössen P_{2s} und Q_s, die von gleicher Grössenordnung sind. Die P_{2s+1} können sogar sämmtlich, wie P_1, verschwinden, wenn nämlich positive und gleichgrosse negative x_α einander mit gleichen Wahrscheinlichkeiten gegenüberstehen, also im Falle symmetrischer Vertheilung, wie z. B. beim Gauss'schen Gesetz.

Für das mittlere Risico M existiren einfache Rechenvorschriften, namentlich über die Zusammensetzung des Risicos von Gesammtspielen aus den Risiken der Einzelspiele. Vorher sei bemerkt, dass für ein Spiel, worin ein Preis A mit der Wahrscheinlichkeit p zu erwarten ist, man die Formeln hat

$$(12)\quad \begin{cases} E = pA, \quad D = Ap(1-p) = E(1-p), \\ m^2 = A^2 p(1-p) = E^2 \cdot \frac{1-p}{p} = (A-E)^2 \frac{p}{1-p}. \end{cases}$$

Für ein Spiel mit zwei einander ausschliessenden Preisen A, B, deren Wahrscheinlichkeiten p und q, und die beide grösser sind als der Einsatz $E = pA + qB$, findet man

$$(13)\quad \begin{cases} D = p(A-E) + q(B-E) = (1-p-q)E, \\ M^2 = p(A-E)^2 + q(B-E)^2 + (1-p-q)E^2 = pA^2 + qB^2 - E^2 \\ \qquad = A^2 p(1-p) + B^2 q(1-q) - 2AB \cdot pq. \end{cases}$$

Bei der Zusammensetzung mehrerer unabhängiger Zufallsspiele zu einem Gesammtspiel ist *das Quadrat des Gesammtrisicos gleich der Summe der Quadrate der Einzelrisiken*, wobei unter »Risico« schlechthin immer das mittlere Risico verstanden sein soll. In der That, ist ein Zufallsspiel durch die Wahrscheinlichkeiten p_α und Reingewinne x_α, mit dem mittleren Risico M_1, charakterisirt, und ein zweites davon unabhängiges durch die Wahrscheinlichkeiten q_β, die Reingewinne y_β, das mittlere Risico M_2, so ist

$$(14)\quad \begin{cases} \sum^\alpha p_\alpha = 1\,, & \sum^\alpha p_\alpha x_\alpha = 0\,, & \sum^\alpha p_\alpha x_\alpha^2 = M_1^2\,, \\ \sum^\beta q_\beta = 1\,, & \sum^\beta q_\beta y_\beta = 0\,, & \sum^\beta q_\beta y_\beta^2 = M_2^2\,. \end{cases}$$

Bei dem Gesammtspiel tritt ein Reingewinn $x_\alpha + y_\beta$ mit der Wahrscheinlichkeit $p_\alpha \cdot q_\beta$ auf, und man findet durch Zerlegung der Doppelsummen und aus (14)

$$\sum^{\alpha\beta} p_\alpha q_\beta = 1\,, \quad \sum^{\alpha\beta} p_\alpha q_\beta (x_\alpha + y_\beta) = 0\,,$$
$$M^2 = \sum^{\alpha\beta} p_\alpha q_\beta (x_\alpha + y_\beta)^2 = M_1^2 + M_2^2\,.$$

Der oben ausgesprochene Satz ist damit für zwei und, durch eine leichte Verallgemeinerung, für beliebig viele unabhängige Einzelspiele bewiesen.

Um das Entscheidende der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Spiele hervortreten zu lassen, wollen wir in einem einfachen Falle das Risico eines aus zwei abhängigen Spielen zusammengesetzten Gesammtspieles bestimmen. Auf zwei Ereignisse E, E' seien die Preise A, A' gesetzt; die Wahrscheinlichkeit von E sei p, die seines Gegentheils F sei $q = 1 - p$. Die Wahrscheinlichkeit von E' hingegen sei davon abhängig, ob und in welcher Art das Ereigniss E eintritt. E könne auf m verschiedene einander ausschliessende Arten $E_1 E_2 \ldots E_m$ eintreten, ebenso auf n verschiedene einander ausschliessende Arten $F_1 F_2 \ldots F_n$ ausbleiben; im Falle E_α, dessen Wahrscheinlichkeit $= p_\alpha$, sei π_α die Wahrscheinlichkeit von E', $1 - \pi_\alpha$ die von F', im Falle F_β, dessen Wahrscheinlichkeit $= q_\beta$, sei $\varkappa_\beta$ die Wahrscheinlichkeit von E' und $1 - \varkappa_\beta$ die von F'.

Dann ist

$$p = \sum^\alpha p_\alpha\,, \quad q = \sum^\beta q_\beta\,, \quad p + q = 1\,.$$

Ferner sind die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisspaare

$$E_\alpha E' \quad F_\beta E' \qquad E_\alpha F' \qquad F_\beta F'$$

resp. gleich

$$p_\alpha \pi_\alpha \quad q_\beta \varkappa_\beta \quad p_\alpha(1-\pi_\alpha) \quad q_\beta(1-\varkappa_\beta),$$

also die totalen Wahrscheinlichkeiten der combinirten Ereignisse

$$EE' \quad FE' \qquad EF' \qquad FF'$$

resp. gleich

$$p\pi \qquad q\varkappa \quad p(1-\pi) \quad q(1-\varkappa),$$

wo

$$p\pi = \sum\nolimits_\alpha p_\alpha \pi_\alpha, \quad q\varkappa = \sum\nolimits_\beta q_\beta \varkappa_\beta.$$

Hierbei ist also π die mittlere Wahrscheinlichkeit für E' unter der Voraussetzung E, $\varkappa$ die mittlere Wahrscheinlichkeit für E' unter der Voraussetzung F. Die Gesammtwahrscheinlichkeiten von E' und F' sind p' und $q' = 1 - p'$, wo

$$p' = p\pi + q\varkappa.$$

Der Einsatz E und das mittlere Risico M eines Spielers, der sich bei beiden Spielen betheiligt, bestimmen sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} E &= \sum\nolimits_\alpha p_\alpha \pi_\alpha (A + A') + \sum\nolimits_\beta q_\beta \varkappa_\beta A' + \sum\nolimits_\alpha p_\alpha (1-\pi_\alpha) A \\ &= p\pi(A + A') + q\varkappa A' + p(1-\pi)A \\ &= pA + p'A', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^2 + E^2 &= p\pi(A + A')^2 + q\varkappa A'^2 + p(1-\pi)A^2 \\ &= pA^2 + p'A'^2 + 2p\pi AA', \\ M^2 &= pA^2 + p'A'^2 + 2p\pi AA' \\ &\quad - p^2A^2 - p'^2A'^2 - 2pp'AA' \\ &= pqA^2 + p'q'A'^2 + 2AA'pq(\pi - \varkappa). \end{aligned}$$

Der Einsatz wird also wie bei unabhängigen Spielen ermittelt; der Ausdruck M^2 hingegen enthält ausser der Quadratsumme $pqA^2 + p'q'A'^2$ der Einzelrisiken ein Productglied $2AA'$, dessen Coefficient

$$pq(\pi - \varkappa) = p(\pi - p') = q(p' - \varkappa)$$

nur dann verschwindet, wenn

$$\pi = \varkappa = p',$$

wenn also die totale Wahrscheinlichkeit von E' unter den Voraussetzungen E und F dieselbe ist (womit noch nicht das Zusammenfallen der einzelnen π_α und $\varkappa_\beta$ gesagt ist). Nehmen wir etwa an, die Ereignisse E und E' schliessen einander aus, so ist $\pi = 0$ und $q\varkappa = p'$,

$$M^2 = p(1-p)A^2 + p'(1-p')A'^2 - 2pp'AA',$$

was abgesehen von der Bezeichnung mit der Formel (13) übereinstimmt. Wir werden weiterhin noch Gelegenheit haben, die Verschiedenheit des Gesammtrisicos je nach der Abhängigkeit oder Unabhängigkeit der Einzelspiele hervorzuheben.

Ist E_1 der Einsatz und M_1 das Risico eines Spielers für ein gewisses Zufallsspiel, so ist der Einsatz E_λ und das Risico M_λ einer Gesammtheit von λ Spielern, die *unabhängig von einander* dasselbe Spiel eingehen, in den Formeln

$$E_\lambda = \lambda E_1, \quad M_\lambda^2 = \lambda M_1^2$$

gegeben; M_λ würde auch das Risico des einen, der Spielergesammtheit gegenüberstehenden Spielunternehmers sein. Während also E_λ proportional mit λ wächst, wächst M_λ nur proportional mit $\sqrt{\lambda}$, und das in Theilen des Einsatzes genommene *relative Risico*

$$\frac{M_\lambda}{E_\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{M_1}{E_1} \tag{15}$$

nimmt wie $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ ab. Diese Abnahme des relativen Risicos einer Gesammtheit, das Analogon zur Abnahme des mittleren Fehlers mit der Zahl der Beobachtungen, erklärt, warum Versicherungsgesellschaften mit wachsender Mitgliederzahl immer solider und besser gegen den Zufall gerüstet werden; man kann sagen, die Formel (15) enthalte im Keim den ganzen Versicherungsgedanken, wie auch die Betrachtungen über das Gesetz der grossen Zahlen. Der Einzelne, der sich innerhalb einer Genossenschaft von λ gleich exponirten Einzelnen befindet, wird von den Schwankungen des Zufalls nur noch in der gedämpften Intensität $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ betroffen; Vorgänge, die sich im Einzelnen jeder Berechnung entziehen, streben, wenn man die Durchschnittsergebnisse aus λ Einzelfällen zusammennimmt, mit einer Genauigkeit von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ einer zahlenmässigen Gesetzlichkeit zu.

Im Anschluss hieran sind verschiedene Aufgaben leicht zu lösen, etwa die, das Risico unter bestimmten Bedingungen möglichst klein zu halten u. dgl. Die folgende dürfte nicht ohne Interesse für Versicherungsgesellschaften sein. Es sei ein bestimmtes Zufallsspiel gegeben (etwa ein bestimmter Versicherungsmodus für ein bestimmtes Alter) und die Betheiligung daran in beliebigem Maassstabe freigestellt; als solcher »Maassstab« kann die Höhe der Einsätze oder Preise (Prämien, resp. Versicherungssummen) gelten. Eine Gruppe von Spielern (Versicherten) bestehe bereits, eine andere wünsche beizutreten; es sollen die Bedingungen dafür gesucht werden, dass sich durch Beitritt der neuen Gruppe das relative Risico der alten nicht erhöhe.

Das Spiel sei auf die Form

$$\sum^{\alpha} p_\alpha = 1\,, \quad \sum^{\alpha} p_\alpha x_\alpha = 0\,, \quad \sum^{\alpha} p_\alpha x_\alpha^2 = m^2$$

gebracht; m sei das mittlere Risico für die Maassstabseinheit, etwa, um die Vorstellung zu fixiren, für die Versicherungssumme 1. Dann ist bei *demselben* Spiel das Risico für die Versicherungssumme s gleich $M = ms$, und wenn wir mehrere unabhängige Spieler mit den Summen $s_1 s_2 \ldots$ haben,

$$M^2 = m^2(s_1^2 + s_2^2 + \cdots)\,,$$

die gesammte Versicherungssumme

$$S = s_1 + s_2 + \cdots\,,$$

wobei die s_α gruppenweise einander gleich sein können. Um die Abhängigkeit von der Zahl λ der Spieler besser hervortreten zu lassen, setzen wir

$$\lambda s = s_1 + s_2 + \cdots\,, \quad \lambda t^2 = s_1^2 + s_2^2 + \cdots\,,$$

sodass s die mittlere Versicherungssumme, t^2 das mittlere Quadrat der Versicherungssumme ist. Dann ist

$$M^2 = \lambda t^2 m^2\,, \quad S = \lambda s\,, \quad \frac{M}{S} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{t}{s} m\,,$$

das relative Gesammtrisico (Risico für die Einheit der Versicherungssumme) ist mit $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ proportional. Nun habe sich eine zweite Gruppe von Spielern, charakterisirt durch die analogen

Zahlen λ', s', t', zur Aufnahme gemeldet; für sie würde absolutes Risico, Versicherungssumme und relatives Risico durch

$$M'^2 = \lambda' t'^2 m^2, \quad S' = \lambda' s', \quad \frac{M'}{S'} = \frac{1}{\sqrt{\lambda'}} \frac{t'}{s'} m$$

gegeben sein, während die entsprechenden Werthe für die durch Fusion entstehende Gesammtgruppe

$$M^2 + M'^2, \quad S + S', \quad \sqrt{\frac{M^2 + M'^2}{S + S'}}$$

sein würden. Das absolute Risico der Gesammtgruppe ist natürlich grösser als jedes der Einzelrisiken, dagegen soll das relative Risico der Gesammtgruppe kleiner als das der ersten Gruppe, also

$$\frac{M^2 + M'^2}{(S + S')^2} \leqq \frac{M^2}{S^2}$$

sein, eine Relation, die sich zu

$$M^2(2SS' + S'^2) - M'^2 S^2 \geqq 0$$

vereinfacht. Die Einsetzung der obigen Werthe liefert

$$\lambda \left(\frac{s t'^2}{s' t^2} - 2 \right) \leqq \lambda' \frac{s'}{s}.$$

Diese Forderung ist ohne Rücksicht auf die Zahl λ' der Beitretenden erfüllt, wenn

$$s t'^2 \leqq 2 s' t^2, \quad \frac{t'^2}{s'} \leqq 2 \frac{t^2}{s};$$

andernfalls ist λ' an eine gewisse untere Grenze gebunden. Da $\frac{t^2}{s}$ ebenfalls einen gewissen Mittelwerth der Versicherungssumme darstellt, so ist der Bestand der Gesellschaft bei beliebiger Anzahl der Neuhinzutretenden nicht gefährdet, wenn jener Mittelwerth für die neue Gruppe das Doppelte des alten nicht übersteigt. Sind z. B. alle Summen der alten Gruppe gleich $s = t$, alle der neuen gleich s' oder t', so muss sein

$$\lambda \left(1 - 2 \frac{s}{s'} \right) \leqq \lambda'.$$

Solange also das Doppelte der bisherigen Summe nicht überschritten wird, dürfen beliebig viele Spieler hinzutreten. Die Anzahl von Spielern, die dagegen etwa mit dem fünffachen der bisherigen Summe beitreten wollen, ist an $\lambda' \geqq \frac{3}{5} \lambda$ gebunden, muss also mehr als 60 % der alten Spielerzahl betragen.

Betreffend die Berechnung des mittleren Risicos, ist zu bemerken, dass bei *ungerechtem* Spiel die Formel (10) mit denjenigen Reingewinnen x_α zu bilden ist, die nach Beseitigung des »systematischen Fehlers« (4) übrig bleiben; es tritt also, wenn wir zur ursprünglichen Bezeichnung des § 1 zurückgehen, an Stelle von (10) die folgende Gleichung

$$M^2 = \sum^\alpha p_\alpha (x_\alpha - x)^2, \quad x = \sum^\alpha p_\alpha x_\alpha,$$

wofür wir schreiben können

$$(16)\quad M^2 = \sum^\alpha p_\alpha x_\alpha^2 - x^2 = \sum^\alpha p_\alpha x_\alpha^2 - \Big(\sum^\alpha p_\alpha x_\alpha\Big)^2.$$

Diese Gestalt (16) zeigt M abhängig von den Differenzen der x_α, nicht von ihnen selbst; woraus der für die Vereinfachung der Rechnung oft sehr erwünschte Schluss zu ziehen ist, dass man einen constanten (von α unabhängigen) Theil von x_α bei der Berechnung von M nach (16) weglassen kann. Sind z. B. die Einsätze E_α gleich E, so kann in $x_\alpha = A_\alpha - E$ der constante Theil $-E$ wegbleiben und statt (16)

$$(17)\qquad M^2 = \sum^\alpha p_\alpha A_\alpha^2 - \Big(\sum^\alpha p_\alpha A_\alpha\Big)^2$$

geschrieben werden; bei gerechtem Spiel ist hiernach

$$E = \sum^\alpha p_\alpha A_\alpha, \quad M^2 + E^2 = \sum^\alpha p_\alpha A_\alpha^2.$$

Bei dieser Gelegenheit sei darauf hingewiesen, dass auch ein gerechtes Spiel, an irgend einer Stelle seines Verlaufs betrachtet, scheinbar ungerecht wird, nämlich in Folge des bereits getragenen Risicos und des daraus entstehenden Guthabens der einen Spielpartei bei der anderen. Nehmen wir etwa an, die Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten p_α seien derart, dass ihr Eintreffen oder Nichteintreffen sich erst successiv entscheiden kann; z. B. die p_α seien die Sterbenswahrscheinlichkeiten eines Versicherten in den einzelnen Jahren der Versicherung. Nachdem die ersten m Ereignisse, auf welche die Reingewinne $x_1 x_2 \dots x_m$ des Spielers gesetzt waren, nicht eingetroffen sind, möge der Spieler mit dem Unternehmer abrechnen. Da nun ein jetzt neu Hinzutretender ein Spiel mit den Reingewinnen x_α und den Wahrscheinlichkeiten

$$q_\alpha = \frac{p_\alpha}{p_{m+1} + p_{m+2} + \cdots + p_n} = \frac{p_\alpha}{1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_m}$$

vor sich hat ($\alpha = m+1, m+2, \ldots n$), so müsste dieser Neuhinzutretende für Betheiligung an diesem Spiel vorweg den Betrag

$$v_m = \sum_{m+1}^{n\alpha} q_\alpha x_\alpha = -\frac{\sum_{1}^{m\alpha} p_\alpha x_\alpha}{1 - \sum_{1}^{m\alpha} p_\alpha}$$

zahlen, während der bereits am Spiel seit Anfang betheiligte Spieler diesen selben Betrag *gut hat*, also bei nunmehrigem Austritt aus dem Spiel die Auszahlung desselben verlangen könnte. Ist etwa $m = 1$, so wird dieser Betrag $= -\frac{p_1 x_1}{1-p_1}$, oder der Spieler hätte umgekehrt an den Unternehmer den Betrag $+\frac{p_1}{1-p_1} x_1$ zu zahlen; d. h. es ist, je nachdem $x_1 > 0$ oder $x_1 < 0$, der Unternehmer oder der Spieler für Tragung der Verlustchance zu entschädigen. Diese Betrachtungen würden im Falle der Versicherungsrechnung sofort zum Begriff und zur Ermittlung der *Prämienreserve* führen, wenn man ausser der Verzinsung noch Folgendes berücksichtigt. Wenn die Einsätze E_α verschieden sind und die Ereignisse p_α sich nach einander entscheiden, so ist nach Ausbleiben des ersten Ereignisses dem Spieler der Einsatz E_1 zurückzugeben und der Einsatz E_2 abzufordern; bleibt auch das zweite Ereigniss aus, so ist gegen Rückgabe von E_2 der neue Einsatz E_3 einzufordern u. s. w. Oder auch, der Spieler zahlt zuerst den Einsatz E_1, nach Ausbleiben des ersten Ereignisses die Differenz $E_2 - E_1$, nach Ausbleiben des zweiten Ereignisses die Differenz $E_3 - E_2$ u. s. f.; wenn er dann nach Nichteintritt der ersten m Ereignisse das Spiel aufgeben will, so hat er ausser dem obengenannten Guthaben noch den pränumerando gezahlten Einsatz E_m zurückzufordern. Aehnliche Erwägungen gelten, wenn auch die Preise A_α in der angegebenen Weise vorschüssig und staffelweise gezahlt werden. Hat z. B. der Spieler den Preis A_m bereits pränumerando erhalten, so verringert sich sein Guthaben um A_m, und sein gesammtes Credit beim Spielunternehmer beträgt

$$E_m - A_m + v_m = -x_m + \sum_{m+1}^{n\alpha} q_\alpha x_\alpha;$$

dieser Ausdruck, durch Verzinsung auf den Moment des Austritts reducirt, ergiebt die Prämienreserve. Wir werden einige hierher gehörige Fälle der Versicherungsmathematik in § 5 behandeln.

Der vorhin definirte Ausdruck v_m kann als die *reine Reserve* oder als das reine Guthaben des Spielers beim Unternehmer (nach Nichteintritt der Ereignisse $p_1 p_2 \dots p_m$ und vor Anstellung des nächsten Versuches p_{m+1}) angesehen werden; er geht, wie gesagt, in die Prämienreserve nach der versicherungstechnischen Bedeutung über, wenn vorschüssig gezahlte Einsätze hinzugeschlagen, vorschüssig empfangene Preise abgerechnet werden und auf Verzinsung Rücksicht genommen wird. Für die reine Reserve v_m und die mit nächst höherem Index v_{m+1} hat man

$$-v_m(1-p_1-p_2-\cdots-p_m) = p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_mx_m,$$
$$-v_{m+1}(1-p_1-p_2-\cdots-p_m-p_{m+1}) = p_1x_1+p_2x_2+\cdots$$
$$+p_mx_m+p_{m+1}x_{m+1}$$

und durch Subtraction

$$(1-p_1-p_2-\cdots-p_m)(v_m-v_{m+1})+p_{m+1}v_{m+1}=p_{m+1}x_{m+1},$$

woraus mit der obigen Einführung der q_α die Gleichung

$$q_{m+1}(x_{m+1}-v_{m+1})+v_{m+1}-v_m=0$$

oder

$$q_{m+1}(x_{m+1}-v_m)+(1-q_{m+1})(v_{m+1}-v_m)=0$$

folgt. Diese Gleichung spricht, mutatis mutandis, eine in der Versicherungsrechnung bekannte Auffassung der Leistungen des Spielunternehmers in Bezug auf den Ausfall des nächsten Versuchs p_{m+1} aus. Nehmen wir an, um die abstracte Vorstellung durch eine concretere zu ersetzen, dass die p_α Sterbenswahrscheinlichkeiten für die aufeinanderfolgenden Versicherungsjahre bedeuteten, so haben wir einen *lebenden* Versicherten m Jahre nach Abschluss der Versicherung vor uns; die Versicherung führt eine reine Reserve v_m, als Guthaben des Versicherten beim Unternehmer. Die ursprüngliche Sterbenswahrscheinlichkeit p_{m+1} des Versicherten für das folgende Jahr ist jetzt auf q_{m+1} angewachsen; tritt dieser Fall q_{m+1} ein, so ist der bedungene Reingewinn x_{m+1} zu zahlen, woraus für den Unternehmer, da der Betrag v_m bereits reservirt ist, nur die Zahlung $x_{m+1}-v_m$ resultirt. Tritt das Gegentheil $1-q_{m+1}$

ein, so ist die neue Reserve v_{m+1} zu verabfolgen resp. gutzuschreiben, wovon wiederum nur die Differenzleistung $v_{m+1} - v_m$ in Betracht kommt. Dass diese beiden Leistungen $x_{m+1} - v_m$ und $v_{m+1} - v_m$ mit den Wahrscheinlichkeiten q_{m+1} und $1 - q_{m+1}$ ein gerechtes Spiel definiren, spricht die letzte Gleichung aus. Das mittlere Risico dieses nur zwei Fälle umfassenden Spieles ist

$$M_m^{m+1} = \pm\sqrt{\frac{q_{m+1}}{1-q_{m+1}}}(x_{m+1} - v_m) = \mp\sqrt{\frac{1-q_{m+1}}{q_{m+1}}}(v_{m+1} - v_m)$$

und natürlich nicht mit dem Risico der vollen Fortsetzung des Spiels

$$M_m = \sqrt{\sum_{m+1}^{n} {}^{\alpha}\, q_\alpha x_\alpha^2 - \left(\sum_{m+1}^{n} {}^{\alpha}\, q_\alpha x_\alpha\right)^2} = \sqrt{\sum_{m+1}^{n} {}^{\alpha}\, q_\alpha x_\alpha^2 - v_m^2}$$

identisch; eine Versicherung zu Ende laufen lassen oder sie an irgend einer Stelle mit Auszahlung der Prämienreserve abbrechen ist zwar in Bezug auf die mathematischen Hoffnungen, nicht aber in Bezug auf die Risiken das Gleiche. Uebrigens hat neben dem Risico der vollen Versicherung auch das obenstehende partielle (jährliche) Risico M_m^{m+1} versicherungstechnisches Interesse, weshalb wir im § 5 noch einmal darauf zurückkommen. Hier seien nur die leicht beweisbaren Formeln

$$\sum_{m}^{n} {}^{\alpha}(1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_\alpha)(M_\alpha^{\alpha+1})^2 = (1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_m) M_m^2$$

und (für $m = 0$)

$$\sum_{0}^{n} {}^{\alpha}(1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_\alpha)(M_\alpha^{\alpha+1})^2 = M_0^2 = M^2 = \sum_{1}^{n} {}^{\alpha} p_\alpha x_\alpha^2$$

aufgeführt, wonach, an irgend einer Stelle des Spiels betrachtet, das Quadrat des noch übrigen Totalrisicos gleich ist der Summe aus den Quadraten der partiellen Risiken, jedes multiplicirt mit der Wahrscheinlichkeit, dass es noch zur Anstellung des betreffenden Versuchs kommt. Andere Formeln würde man erhalten, wenn man statt der partiellen Risiken $M_\alpha^{\alpha+1}$, die sich auf Anstellung eines Versuches (im Versicherungsfalle auf ein Versicherungsjahr) beziehen, die partiellen Risiken von der Form $M_\alpha^{\alpha+2}$ u. s. w. in Betracht zöge.

Bevor wir zu weiteren Anwendungen übergehen, hätten wir mit einigen Worten unsere Auffassung vom Wesen der bei-

den Risicogrössen M und D zu rechtfertigen. Eine sachliche Bedeutung als erschöpfende Characteristica des Zufallsspiels haben beide doch nur unter ganz bestimmten Voraussetzungen; solange diese nicht erfüllt sind, wäre zur vollständigen Definition des Zufallsspiels die Heranziehung weiterer Glieder P_s oder Q_s der Reihe (9), oder schliesslich das Ensemble der Grössen p_α und x_α selbst erforderlich. Gelten aber jene Voraussetzungen, ist z. B. das Totalspiel aus einer hinlänglich grossen Anzahl unabhängiger Elementarspiele zusammengesetzt, so wird auch immer näherungsweise das GAUSS'sche Gesetz und die Relation (11) gelten, und es genügt dann eine der Risicogrössen, da die andere sich von ihr nur durch einen reinen Zahlfactor unterscheidet. Man wird dann natürlich die zur Rechnung bequemere, also nicht D, sondern M wählen, und kann die andere, also D, ganz aus dem Spiele lassen. Dass D eine einfache praktische Bedeutung, nämlich die Form einer mathematischen Hoffnung oder einer Prämie für Gewinn-, resp. Verlustchance hat, darf uns nicht verführen, in D etwa die eigentlich reale Risicogrösse und in M nur eine durch bequemere Rechnung empfehlenswerthe Hülfsgrösse zu sehen. Wenn WITTSTEIN[1]), der dieser Auffassung zuneigt, geradezu mit dem relativen *durchschnittlichen* Risico $\frac{D}{E}$ den zur Sicherung gegen Verluste nothwendigen Zuschlag in Theilen des Einsatzes identificirt, so ist das Maass der Willkür, die allen Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen anhängt, hiermit viel zu eng gefasst. Der Unternehmer, der sich ausser dem Einsatze E die Risicoprämie D zahlen lässt, ist damit durchaus nicht gegen Verlust gesichert, sondern er hat ausser dem ursprünglichen Zufallsspiel nur ein zweites (damit zusammenhängendes) entrirt, nämlich in der Bezeichnungsweise von (5) das durch die Formel

$$\sum\nolimits_\pi p_\pi (x_\pi - D) = 0$$

definirte, worin aber wiederum Gewinne und Verluste möglich sind und ein Risico D_1 besteht. Statt diese aneinanderhängende Kette von Zufallsspielen, deren Risiken allerdings immer kleiner werden, zu betrachten, ist es offenbar viel einfacher, direct den

---

1) WITTSTEIN, Das mathematische Risico der Versicherungsgesellschaften. Hannover 1885.

Zusammenhang des Risicos D oder M mit der muthmasslichen Vertheilung der Gewinne und Verluste im ursprünglichen Zufallsspiel zu suchen, und da zeigte sich (wenn ein solcher Zusammenhang überhaupt existirt), dass Gewinn oder Verlust mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit w_x ein gewisses Vielfaches des Risicos nicht übersteigen wird. Es bleibt dann dem Unternehmer überlassen, w_x so zu wählen, wie es seiner Meinung nach zur praktischen Beruhigung ausreicht; begnügt er sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 90%, so hätte er das 4,1-fache von D (das 1,6-fache von M) als Risicozuschlag zu fordern, wobei übrigens die Wahrscheinlichkeit, dass nur der *Verlust* nicht grösser als x sei, bereits 95%, nämlich allgemein $= \frac{1}{2}(1+w_x)$ ist. D ist also dem »nothwendigen« Risicozuschlag zum Spieleinsatz nicht gleich, sondern nur proportional; da aber von M dasselbe gilt, so verliert D seine ursprüngliche Sonderstellung, und die mehrfach bemerkte Rücksicht auf bequeme Rechnung tritt in ihr Recht. Die Wahrscheinlichkeit w_D, dass D selbst nicht überschritten werde, ist $= \Theta\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right) = 0{,}310$, also keineswegs »sehr gross«, wie Landré[1]) meint, während $w_M = \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}683 > \frac{2}{3}$ ist.

Uebrigens ist Wittstein in seiner sonst ausgezeichneten Abhandlung durch eine Verwechselung zwischen abhängigen und unabhängigen Spielen zu einer Formel gelangt, die sich in unserer Bezeichnung folgendermassen

$$M^2 = \sum_1^n{}^{\alpha}\, p_\alpha(1-p_\alpha)\, x_\alpha^2$$

schreiben würde und die mit seinen sonstigen Festsetzungen, vor allem mit der Bildung des Gesammtrisicos aus der Quadratsumme der Einzelrisiken in Widerspruch steht. Diese Formel gilt für n *unabhängige* Spiele, in denen einzeln die *Preise* x_α mit den Wahrscheinlichkeiten p_α gegen die Einsätze $p_\alpha x_\alpha$ zu gewinnen sind, nicht aber für n *einander ausschliessende* Möglichkeiten eines einzigen Spiels mit den Wahrscheinlichkeiten p_α und den Reingewinnen x_α. An sich stünde es natürlich frei, eine Risicogrösse M durch die obige Formel zu definiren, nur gelten dann andere und zwar complicirtere Rechengesetze.

1) C. Landré, Mathematisch-technische Capitel zur Lebensversicherung. Jena 1895. pag. 339.

LAURENT [1]) bestimmt das Risico von Versicherungen als additiv zusammengesetzt aus dem Risico der Prämien (Einsätze) für sich und dem Risico der Zahlungen (Preise) für sich, als ob beide von einander unabhängig wären. Er setzt also in einem Falle, wo verschiedene A_α mit verschiedenen E_α zusammen auftreten,

$$M = M_A + M_E,$$

$$M_A^2 = \sum^\alpha p_\alpha A_\alpha^2 - \left(\sum^\alpha p_\alpha A_\alpha\right)^2, \quad M_E^2 = \sum^\alpha p_\alpha E_\alpha^2 - \left(\sum^\alpha p_\alpha E_\alpha\right)^2,$$

während thatsächlich

$$M^2 = \sum^\alpha p_\alpha (A_\alpha - E_\alpha)^2$$

ist. Wenn, wie es scheint, LAURENT nur die Absicht hatte, in der Bestimmung des Risicos (resp. der extremen zu befürchtenden Abweichung, die er $= 3\sqrt{2}\,M$ setzt) wissentlich zu hoch zu greifen, so ist allerdings diese Absicht erreicht, da jedenfalls $M_A + M_E > M$ ist. Denn mit $A = \sum p_\alpha A_\alpha = \sum p_\alpha E_\alpha = E$, $A_\alpha - A = a_\alpha$, $E_\alpha - E = e_\alpha$ folgt

$$0 = \sum p_\alpha a_\alpha = \sum p_\alpha e_\alpha, \quad M_A^2 = \sum p_\alpha a_\alpha^2, \quad M_E^2 = \sum p_\alpha e_\alpha^2,$$

$$M^2 = M_A^2 + M_E^2 - 2\sum p_\alpha a_\alpha e_\alpha,$$

$$(M_A + M_E)^2 - M^2 = 2\left(M_A M_E + \sum^\alpha p_\alpha a_\alpha e_\alpha\right),$$

und da

$$\sum p_\alpha a_\alpha^2 \cdot \sum p_\alpha e_\alpha^2 - \left(\sum p_\alpha a_\alpha e_\alpha\right)^2 = \sum_{\alpha<\beta} p_\alpha p_\beta (a_\alpha e_\beta - a_\beta e_\alpha)^2 > 0,$$

so ist $M_A M_E$ dem absoluten Werthe nach grösser als $\sum p_\alpha a_\alpha e_\alpha$, $M_A + M_E$ also grösser als M.

3. Anwendung auf die Lotterie.

Bei einer einklassigen Lotterie mögen s Loose mit den Gewinnen $A_1 A_2 \ldots A_s$ gezogen werden; für Nieten sei $A_\alpha = 0$. Setzen wir

$$(19) \qquad sA = \sum_1^s{}^\alpha A_\alpha, \quad sB^2 = \sum_1^s{}^\alpha A_\alpha^2,$$

---

1) LAURENT, Théorie et pratique des assurances sur la vie. § 43, Du plein des assurances.

so ist A der mittlere Gewinn und zugleich der Einsatz eines Looses, B^2 das mittlere Gewinnquadrat. Ein Spieler besetzt die sämmtlichen s Loose, die in irgend einer Weise numerirt zu denken sind, mit den Bruchtheilen $\vartheta_1 \vartheta_2 \dots \vartheta_s$, wobei $\vartheta_\alpha = 1$ das Spielen eines ganzen Looses, $\vartheta_\alpha = 0$ die Nichtbetheiligung am Loose α ausdrückt. Wir setzen

$$(20) \qquad s\vartheta = \sum_1^s{}^\alpha \vartheta_\alpha, \quad s\eta^2 = \sum_1^s{}^\alpha \vartheta_\alpha^2,$$

sodass ϑ die mittlere Betheiligung an einem Loose und η^2 das mittlere Quadrat dieser Betheiligung bedeutet. Bei der Ziehung handelt es sich hiernach nur noch darum, die Reihenfolge der s Gewinne auf die s Loose durch den Zufall zu entscheiden; jede Reihenfolge

$$A_{h_1} A_{h_2} \dots A_{h_s},$$

wo $h_1 h_2 \dots h_s$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \dots s$ bedeutet, ist mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{s!} = p$ zu erwarten. Der Spieler hat in diesem Falle den Gewinn

$$G = A_{h_1}\vartheta_1 + A_{h_2}\vartheta_2 + \dots + A_{h_s}\vartheta_s = \sum{}^\alpha A_{h_\alpha}\vartheta_\alpha$$

gemacht, und da sein Einsatz

$$A(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_s) = As\vartheta$$

betrug, so ist

$$x = G - As\vartheta$$

sein Reingewinn; es sind die Summen Spx und Spx^2 zu berechnen, wobei S eine Summation über alle $s!$ Permutationen der obigen Elemente bedeutet. Die Summe über einen constanten (von der Permutation unabhängigen) Ausdruck c ist demnach $Sc = s!\,c$, also insbesondere $Sp = S\frac{1}{s}! = 1$.

Man findet nun in bekannter Weise

$$SG = (s-1)!\,(A_1 + A_2 + \dots + A_s)(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_s)$$
$$= s!\,s \cdot A\vartheta,$$

also

$$Sx = SG - s!\,As\vartheta = 0$$

und ebenso

$$Spx = 0,$$

wie zu erwarten.

Ferner zerfällt G^2 in einen quadratischen und einen Producttheil

$$G^2 = G_Q^2 + G_P^2,$$

und es wird einzeln

$$SG_Q^2 = (s-1)!\,(A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_s^2)(\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \cdots + \vartheta_s^2)$$
$$= s!\,sB^2\eta^2,$$
$$SG_P^2 = (s-2)!\,2[A_1A_2 + \cdots + A_1A_s + A_2A_3 + \cdots]\,2[\vartheta_1\vartheta_2 + \cdots + \vartheta_1\vartheta_s + \vartheta_2\vartheta_3 + \cdots]$$
$$= (s-2)!\,\Big[\Big(\sum\nolimits^\alpha A_\alpha\Big)^2 - \sum\nolimits^\alpha A_\alpha^2\Big]\Big[\Big(\sum\nolimits^\alpha \vartheta_\alpha\Big)^2 - \sum\nolimits^\alpha \vartheta_\alpha^2\Big]$$
$$= (s-2)!\,s^2(sA^2 - B^2)(s\vartheta^2 - \eta^2),$$

zusammengenommen

$$SG^2 = (s-2)!\,s^2[(s-1)B^2\eta^2 + (sA^2 - B^2)(s\vartheta^2 - \eta^2)]$$
$$= (s-2)!\,s^2(B^2 - A^2)(\eta^2 - \vartheta^2) + s!\,(sA\vartheta)^2.$$

Damit findet man

$$Sx^2 = S(G - As\vartheta)^2 = SG^2 - s!\,(As\vartheta)^2$$
$$= (s-2)!\,s^2(B^2 - A^2)(\eta^2 - \vartheta^2)$$

und

$$M^2 = Spx^2 = \frac{1}{s!}\,Sx^2 = \frac{s^2}{s-1}(B^2 - A^2)(\eta^2 - \vartheta^2).$$

Das mittlere Risico bei der angegebenen Besetzung ϑ_α hat also den Werth

$$M^2 = \frac{s^2}{s-1}(B^2 - A^2)(\eta^2 - \vartheta^2), \tag{21}$$

wo s die Gesammtzahl der Loose und die übrigen Grössen aus (19) (20) zu ermitteln sind.

Wenn σ ganze Loose genommen werden, so kann

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \cdots = \vartheta_\sigma = 1, \quad \vartheta_{\sigma+1} = \cdots = \vartheta_s = 0$$

gesetzt werden, womit sich ergiebt

$$s\vartheta = \sigma, \quad s\eta^2 = \sigma,$$
$$M_\sigma^2 = \frac{s^2}{s-1}(B^2 - A^2)\left(\frac{\sigma}{s} - \frac{\sigma^2}{s^2}\right)$$
$$= \frac{\sigma(s-\sigma)}{s-1}(B^2 - A^2). \tag{22}$$

Insbesondere ist das Risico M_1 eines Looses

$$M_1^2 = B^2 - A^2, \tag{23}$$

demnach

$$\frac{M_\sigma}{M_1} = \sqrt{\frac{(s-\sigma)\sigma}{s-1}}. \tag{24}$$

Wären die Einzelereignisse unabhängig von einander, d. h. würden die Chancen eines Looses nicht durch die bisher gezogenen Loose beeinflusst, so hätte die gewöhnliche Formel für die Zusammensetzung der Risiken

$$\frac{M_\sigma}{M_1} = \sqrt{\sigma}$$

ergeben; beide Formeln sind für kleine Werthe von σ und grosse von s nicht merklich verschieden.

Aus (24) folgt z. B., dass man, um mit einer gegebenen Einsatzsumme σA geringstes Risico zu erzielen, möglichst viele Einzelloose zu gleichen Theilen besetzen muss, also nicht σ ganze Loose, sondern 2σ halbe, 4σ Viertel-, 10σ Zehntelloose u. s. w., soweit die Theilung der Loose gestattet ist. Es verhalten sich z. B. bei der Besetzung von einem ganzen, zwei halben, vier Viertelloosen etc. die mittleren Risiken wie die Zahlen

$$\sqrt{s-1},\quad \sqrt{\tfrac{s}{2}-1},\quad \sqrt{\tfrac{s}{4}-1},\quad \sqrt{\tfrac{s}{10}-1} \quad \text{u. s. w.}$$

Complementäre Loosbesetzungen, d. h. solche zwei, die einander zur Besetzung aller Loose ergänzen, haben dasselbe Risico; wenn also Loose ganz oder theilweise unverkauft bleiben und auf Rechnung des Unternehmers spielen, so trägt der Unternehmer dasselbe Risico, wie die Gesammtheit der Spieler. Complementäre Besetzungen einer Gruppe von σ Loosen ergeben gleiches Risico, wenn jede die Hälfte der Gruppe, also den Betrag von $\frac{\sigma}{2}$ Loosen in irgendwelcher Anordnung besetzt. Z. B. haben zwei Spieler, die sich in drei Loose mit den Besetzungen

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{5}, & \frac{3}{5}, & \frac{12}{30}, & \text{zusammen} = \frac{1}{2} \\ \frac{4}{5}, & \frac{1}{5}, & \frac{11}{30}, & \text{»} \quad = \frac{3}{2} \end{array}$$

theilen, gleiches Risico.

Wenn der Unternehmer von den s Loosen nur σ verkauft, also $s - \sigma$ selbst spielt, so ist sein Risico $M_{s-\sigma} = M_\sigma$. Ist, bevor

der Loosverkauf beendet ist, $p(\sigma)$ die Wahrscheinlichkeit, dass σ Loose verkauft werden, so bestimmt die Gleichung

$$M^2 = \sum_0^s{}_\sigma\, p(\sigma)\, M_\sigma^2 = M_1^2 \sum_0^s{}_\sigma\, p(\sigma)\, \frac{\sigma(s-\sigma)}{s-1} \tag{25}$$

das mittlere Risico M des Unternehmers. Hätte z. B. ein Loos die bekannte Wahrscheinlichkeit v, verkauft zu werden, und $u = 1 - v$, unverkauft zu bleiben, so wäre

$$p(\sigma) = \frac{s!}{\sigma!\,(s-\sigma)!}\, v^\sigma u^{s-\sigma},$$

womit man fände

$$\left(\frac{M}{M_1}\right)^2 = suv. \tag{26}$$

Ist $\sigma = sv$ die *zu erwartende* Anzahl verkaufter Loose, so folgt aus (26)

$$\frac{M}{M_1} = \sqrt{\frac{\sigma(s-\sigma)}{s}},$$

welche Formel sich von (24), wo σ die *bekannte* Anzahl verkaufter Loose bedeutet, nur um den numerisch unerheblichen Factor $\sqrt{\frac{s-1}{s}}$ unterscheidet. Eine ähnliche Betrachtung ergiebt sich, wenn man nicht u, v, sondern aus λ früheren Lotterien die Anzahlen $\sigma_1\, \sigma_2 \ldots \sigma_\lambda$ der damals verkauften Loose kennt; hier findet man nach dem Satz über die Wahrscheinlichkeit von Hypothesen

$$p(\sigma) = \frac{s!}{\sigma!\,(s-\sigma)!} \int_0^1 v^{\sigma_1+\cdots+\sigma_\lambda+\sigma}\, u^{\lambda s+s-\sigma_1-\cdots-\sigma_\lambda-\sigma}\, dv$$
$$: \int_0^1 v^{\sigma_1+\cdots+\sigma_\lambda}\, u^{\lambda s-\sigma_1-\cdots-\sigma_\lambda}\, dv$$

und wenn man $\lambda\tau = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_\lambda$ setzt, also mit τ die mittlere Anzahl bisher verkaufter Loose bezeichnet, so ergiebt eine Zwischenrechnung aus (25) das Resultat

$$\left(\frac{M}{M_1}\right)^2 = \frac{s\left(\tau+\frac{1}{\lambda}\right)\left(s-\tau+\frac{1}{\lambda}\right)}{\left(s+\frac{2}{\lambda}\right)\left(s+\frac{3}{\lambda}\right)}. \tag{27}$$

Für hinlänglich grosses λ erhält man mit $\frac{\tau}{s} = v$ wiederum die Beziehung (26).

Bei einer gewöhnlichen Lotterie sind die Gewinne A_α gruppenweise einander gleich; es mögen a Gewinne A, b Gewinne B, c Gewinne Γ gezogen werden. Die Grössen A B aus (19) werden dann

$$sA = a\mathsf{A} + b\mathsf{B} + c\Gamma + \cdots$$
$$sB^2 = a\mathsf{A}^2 + b\mathsf{B}^2 + c\Gamma^2 + \cdots$$
$$s = a + b + c + \cdots$$

Nimmt man σ ganze Loose, so ist der aus Binomialfactoren gebildete Ausdruck

$$p = \binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}\binom{c}{\gamma}\cdots : \binom{s}{\sigma}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen σ Loosen α mit dem Gewinne A, β mit dem Gewinne B u. s. w. gezogen werden; der Gewinn des Spielers ist hier

$$\alpha\mathsf{A} + \beta\mathsf{B} + \gamma\Gamma + \cdots,$$

sein Reingewinn

$$x = \alpha\mathsf{A} + \beta\mathsf{B} + \gamma\Gamma + \cdots - \sigma A,$$

und man kann, vielleicht am einfachsten durch Einführung einer erzeugenden Function wie beim Bernoulli'schen Satze, zeigen, dass die über alle ganzzahligen nicht negativen Werthe $\alpha\beta\gamma\ldots$, deren Summe $= \sigma$, erstreckte Summation S die Ergebnisse

$$Sp = 1, \quad Spx = 0, \quad Spx^2 = M_\sigma^2 = \frac{\sigma(s-\sigma)}{s-1}(B^2 - A^2)$$

liefert. Indessen ist diese Ableitung complicirter und weniger allgemein als die zuerst gegebene, wo wir auf die Gruppencoincidenz der Lotteriegewinne keine Rücksicht nahmen und eine ganz beliebige Besetzung ϑ_α der Loose ins Auge fassten.

4. Anwendung auf Anleihen.

Wenn der allgemeine Geldmarkt die Kapitalien zu $p\%$ verzinst, so wächst ein heute angelegtes Kapital 1 nach einem Jahre auf $1 + \frac{p}{100} = r$, nach zwei Jahren auf $r\left(1 + \frac{p}{100}\right) = r^2$, nach n Jahren auf r^n. Ebenso hat ein nach n Jahren fälliges Kapital 1 heute nur den Werth $\frac{1}{r^n} = r^{-n} = \varrho^n$; man nennt r den Auf-

zinsungsfactor, seinen reciproken Werth $\varrho = \frac{1}{r}$ den Abzinsungs- oder Discontirungsfactor. In den eben notirten Formeln kann n auch gebrochene Werthe annehmen. Die im gewöhnlichen Leben häufig gebrauchte *einfache Zinsformel*, wonach ein Kapital 1 nach n Jahren auf $1 + \frac{pn}{100}$ anwächst, liefert nur die beiden ersten Glieder der Binomialentwicklung

$$r^n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = 1 + \frac{np}{100} + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{p}{100}\right)^2 + \cdots,$$

ist also nur als Annäherung aufzufassen und auf hinlänglich kleine Werthe von n zu beschränken.

Wird eine Anleihe vom heutigen Betrage P durch die nach $1, 2, \ldots n$ Jahren fälligen *Zahlungen* $z_1 z_2 \ldots z_n$ getilgt, so ist

$$(28) \qquad P = z_1\varrho + z_2\varrho^2 + \cdots + z_n\varrho^n = \sum_1^n{}^{\alpha}\, z_\alpha \varrho^\alpha .$$

Man zerlegt jedes z_α in eine eigentliche *Tilgungssumme* t_α und in die Zinsvergütung v_α für die jeweilig noch ungetilgte Schuld $P_{\alpha-1}$, wo

$$(29) \qquad \left\{ \begin{aligned} P_\alpha &= P - t_1 - t_2 - \cdots - t_\alpha \\ &= t_{\alpha+1} + t_{\alpha+2} + \cdots + t_n \end{aligned} \right.$$

den Stand der Schuld nach α Jahren, d. h. unmittelbar nach Zahlung der Quote z_α, bedeutet. Man hat also

$$z_1 = t_1 + v_1, \quad v_1 = \frac{p}{100} P,$$

$$z_2 = t_2 + v_2, \quad v_2 = \frac{p}{100} P_1 = \frac{p}{100}(P - t_1),$$

$$z_3 = t_3 + v_3, \quad v_3 = \frac{p}{100} P_2 = \frac{p}{100}(P - t_1 - t_2)$$

u. s. w. Dabei ist

$$(30) \qquad P = t_1 + t_2 + \cdots + t_n .$$

Man nennt n die *Tilgungsfrist*, das Ensemble der Grössen t_α charakterisirt den *Tilgungsplan*, der hier in jährlichen Tilgungen vorausgesetzt ist; man kann mit leichter Mühe auch die Fälle von Verzinsung und Tilgung in Jahresbruchtheilen behandeln. Eine etwaige *Restschuld*, die im Falle einer nicht ganzzahligen Tilgungsfrist n, die zwischen den ganzen Zahlen ν und $\nu + 1$ liegen

möge, nach der Zahlung z_ν verbleiben würde, und deren Tilgung im Laufe des $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Jahres selbständig erfolgt, lassen wir unberücksichtigt; ebenso übergehen wir die kleine Modification des Tilgungsplanes, die durch *Abrundung* der rechnungsmässigen Tilgungssummen auf ganze Vielfache des niedrigsten Antheilscheines der Anleihe (z. B. des Betrages 100) nothwendig würde.

Unter den verschiedenen Tilgungsplänen sind zwei von besonderem Interesse, der Plan *gleicher Tilgungen* und der Plan *gleicher Zahlungen*. Beim ersten ist $t_\alpha = \frac{P}{n}$,

$$P_\alpha = P\left(1-\frac{\alpha}{n}\right), \quad z_\alpha = \frac{P}{n}+\frac{p}{100}P_{\alpha-1} = \frac{Pr}{n}+\frac{Pp}{100}-\alpha\cdot\frac{P}{n}\frac{p}{100},$$

sodass die Zahlungen um den jährlichen Zins der Tilgungsquote $\frac{P}{n}$ abnehmen. Beim zweiten Plan sind die z_α constant $= z$, und die t_α wachsen in einer geometrischen Reihe, deren Quotient $= r$; man findet, wenn $t = t_1$ gesetzt wird,

$$t_\alpha = tr^{\alpha-1}, \quad z_\alpha = z = tr^n,$$
$$P = t\frac{r^n-1}{r-1} = z\frac{1-\varrho^n}{r-1} = z\varrho\frac{1-\varrho^n}{1-\varrho}.$$

Dieser in der Praxis häufigste Tilgungsplan wird meistens so formulirt, dass man die anfängliche Tilgungsquote t angiebt und sagt, dieselbe solle um die Zinsen der getilgten Antheilscheine wachsen.

Ist nun Q der *Nominalwerth* einer Anleihe, und soll vertragsmässig der Creditor dieser Anleihe durch die Zahlungen $z_1 z_2 \ldots z_n$ des Schuldners nach $1, 2, \ldots n$ Jahren befriedigt werden, so ist der heutige *Realwerth* P dieser Zahlungsreihe durch (28) gegeben. Das mit 100 multiplicirte Verhältniss des Realwerthes zum Nominalwerth heisst der *Curs* C der Anleihe, ist also durch

$$\frac{C}{100} = \frac{P}{Q} \tag{31}$$

definirt; offenbar ist C der Preis, den man in der Absicht, sein Kapital zu $p\,\%$ anzulegen, für einen auf nominell 100 lautenden Antheilschein der Anleihe zahlen kann. Dabei ist es häufig (wenn auch nicht nothwendig), dass die Zahlungen z_α ihrerseits als eine gewöhnliche Tilgung und Verzinsung des Nominalwerthes Q zu einem gewissen nominellen Zinsfusse q angesehen

werden — indessen bildet jede *Prämien*anleihe einen Ausnahmefall. Unter der ebengenannten Voraussetzung hätten wir

$$(32) \qquad Q = \sum_1^n{}^{\alpha}\, z_\alpha \sigma^\alpha, \quad s = 1 + \frac{q}{100}, \quad \sigma = \frac{1}{s},$$

wo σ der zum Zinsfuss q gehörige Discontfactor ist. Die z_α können wir nun wieder zerlegen in die Tilgungssummen t_α und die Zinsvergütungen $v_\alpha = \frac{q}{100} Q_{\alpha-1}$ für die noch ungetilgte Schuld, wobei Q_α den Stand der Nominalschuld nach α Jahren bedeutet und durch

$$Q_\alpha = Q - \sum_1^\alpha{}^{\beta}\, t_\beta = \sum_{\alpha+1}^n{}^{\beta}\, t_\beta$$

definirt ist. Demnach folgt aus (28)

$$P = \sum_1^n{}^{\alpha}\, z_\alpha \varrho^\alpha = \sum_1^n{}^{\alpha}\, t_\alpha \varrho^\alpha + \frac{q}{100} \sum_1^n{}^{\alpha}\, Q_{\alpha-1} \varrho^\alpha,$$

$$\sum_1^n{}^{\alpha}\, Q_{\alpha-1} \varrho^\alpha = \sum_1^n{}^{\alpha}\, \varrho^\alpha \sum_\alpha^n{}^{\beta}\, t_\beta = \sum_1^n{}^{\beta}\, t_\beta \sum_1^\beta{}^{\alpha}\, \varrho^\alpha$$

$$= \sum_1^n{}^{\beta}\, t_\beta \cdot \varrho \frac{1-\varrho^\beta}{1-\varrho} = \frac{100}{p} \left(\sum_1^n{}^{\alpha}\, t_\alpha - \sum_1^n{}^{\alpha}\, t_\alpha \varrho^\alpha \right).$$

Also wird

$$P = \sum_1^n{}^{\alpha}\, t_\alpha \varrho^\alpha + \frac{q}{p} \left(\sum_1^n{}^{\alpha}\, t_\alpha - \sum_1^n{}^{\alpha}\, t_\alpha \varrho^\alpha \right).$$

Da weiter

$$Q = \sum_1^n{}^{\alpha}\, t_\alpha,$$

so folgt mit Einführung von

$$(33) \qquad p_\alpha = \frac{t_\alpha}{Q}, \quad \sum_1^n{}^{\alpha}\, p_\alpha = 1,$$

$$(34) \qquad \frac{C}{100} = \frac{P}{Q} = \frac{q}{p} + \left(1 - \frac{q}{p}\right) \tau = \tau + \frac{q}{p}(1 - \tau),$$

$$(35) \qquad \tau = \sum_1^n{}^{\alpha}\, p_\alpha \varrho^\alpha.$$

Der Curs hängt also, ausser vom Verhältniss des nominellen Zinsfusses q zum thatsächlichen Zinsfusse p des Geldmarktes, vom Tilgungsplan ab, und zwar durch Vermittlung der einzigen Grösse τ. Diese Grösse τ hat eine juristische Bedeutung; 100τ stellt den Werth des *blossen Eigenthumsrechts* (nuda proprietas) des Antheilscheins 100 dar, während

$$100\frac{q}{p}(1-\tau)$$

den Werth des *Niessbrauchrechts*, d. h. des Zinsengenusses am Antheilschein bis zu seiner Ausloosung, und beide zusammen den Werth C des unbeschränkten Eigenthumsrechtes darstellen.

Für unsere zwei besonderen Tilgungspläne wird

a) Plan gleicher Tilgung, $p_\alpha = \frac{1}{n}$,

$$\tau = \frac{\varrho}{n}\frac{1-\varrho^n}{1-\varrho} = \frac{100}{pn}(1-\varrho^n), \tag{36}$$

b) Plan gleicher Zahlung, $z_\alpha = z$,

$$P = z\varrho\frac{1-\varrho^n}{1-\varrho} = \frac{100z}{p}(1-\varrho^n),$$

$$Q = z\sigma\frac{1-\sigma^n}{1-\sigma} = \frac{100z}{q}(1-\sigma^n),$$

$$\frac{C}{100} = \frac{P}{Q} = \frac{q}{p}\cdot\frac{1-\varrho^n}{1-\sigma^n}. \tag{37}$$

In beiden Fällen entfernt sich der Curs um so mehr von 100 (al pari) und nähert sich dem Extrem $100\cdot\frac{q}{p}$, je länger die Tilgungsfrist n ist.

Offenbar ist der Erwerb eines Antheilscheines 100 zum Preise C ein *Zufallsspiel*, in dem man den Möglichkeiten der verschiedenen Ausloosungstermine gegenübersteht; die Grössen p_α geben direct die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Antheilschein nach α Jahren ausgeloost und zurückgezahlt werde. Für einen solchen, nach α Jahren zurückzuzahlenden Antheilschein 100 sind α Jahre hindurch die Zinsen q und am Ende des α^{ten} Jahres der Nennwerth 100 zu zahlen; der heutige Werth dieser sämmtlichen Leistungen ist

$$A_\alpha = q(\varrho+\varrho^2+\cdots+\varrho^\alpha)+100\varrho^\alpha = q\varrho\frac{1-\varrho^\alpha}{1-\varrho}+100\varrho^\alpha$$
$$= 100\frac{q}{p}+100\left(1-\frac{q}{p}\right)\varrho^\alpha.$$

Es sind also auf Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten p_α die Preise A_α gesetzt, und der Einsatz C dieses Spieles, oder der heutige Werth eines Antheilscheines 100, ist

$$C = \sum_1^n{}^\alpha p_\alpha A_\alpha = 100\,\frac{q}{p} + 100\left(1 - \frac{q}{p}\right)\sum_1^n{}^\alpha p_\alpha \varrho^\alpha ,$$

d. i. nichts anderes als Formel (34).

Für das mittlere Risico M dieses Spieles erhält man

$$M^2 = \sum_1^n{}^\alpha p_\alpha A_\alpha^2 - \left(\sum_1^n{}^\alpha p_\alpha A_\alpha\right)^2 ,$$

in welcher Gleichung es erlaubt ist, in A_α den constanten Term $100\,\frac{q}{p}$ wegzulassen, also einfach A_α gleich $100\left(1 - \frac{q}{p}\right)\varrho^\alpha$ zu setzen. Man findet so

$$\frac{M}{100} = \pm\left(1 - \frac{q}{p}\right) w , \tag{38}$$

$$w^2 = \sum_1^n{}^\alpha p_\alpha \varrho^{2\alpha} - \left(\sum_1^n{}^\alpha p_\alpha \varrho^\alpha\right)^2 = \sum_1^n{}^\alpha p_\alpha \varrho^{2\alpha} - \tau^2 . \tag{39}$$

Wir wählen $w > 0$ und nehmen in (38) dasjenige Vorzeichen, das $M > 0$ macht. Hier tritt neben der charakteristischen Grösse τ des Tilgungsplanes noch die weitere w auf; $w^2 + \tau^2$ ist ganz analog wie τ gebildet, nur dass an Stelle von ϱ überall ϱ^2 (der Discontirungsfactor für den Zeitraum von *zwei* Jahren) getreten ist. An Stelle von $p = 100\,(r - 1)$ träte also

$$100\,(r^2 - 1) = p\,(r + 1) ;$$

der Formel (36) für gleiche *Tilgungen* entspräche also

$$w^2 + \tau^2 = \frac{\varrho^2}{n}\,\frac{1 - \varrho^{2n}}{1 - \varrho^2} = \frac{100}{np\,(r + 1)}\,(1 - \varrho^{2n}) , \tag{40}$$

während man im Falle gleicher *Zahlungen* erhielte

$$\tau = \frac{q}{p - q}\,\frac{\sigma^n - \varrho^n}{1 - \sigma^n} , \quad w^2 + \tau^2 = \frac{q}{p\,(1 + r) - q}\,\frac{\sigma^n - \varrho^{2n}}{1 - \sigma^n} . \tag{41}$$

Man kann den Zufallscharakter der Anleihentilgung noch in anderer Weise zahlenmässig übersehen, indem man nach der *subjectiven Verzinsung* fragt, die der Käufer eines Antheilscheins 100 zum Curse C für sein Geld erzielt, wenn der Antheilschein nach α Jahren ausgeloost wird. Ist u der Zinsfuss, $\xi = 1 : \left(1 + \frac{u}{100}\right)$

der Discontirungsfactor der subjectiven Verzinsung, so erhält man, weil die Zahlungen q am Ende der ersten α Jahre und die Zahlung 100 nach α Jahren zusammengenommen nach dem Zinsfuss u den heutigen Werth C haben sollen, die Gleichung

$$(42)\quad C = q(\xi + \xi^2 + \cdots + \xi^\alpha) + 100\xi^\alpha = q\xi\frac{1-\xi^\alpha}{1-\xi} + 100\xi^\alpha,$$

aus der ξ zu ermitteln ist. Offenbar giebt es einen Werth α, für den sich $u = p$, $\xi = \varrho$ ergiebt, für den also die subjective Verzinsung gleich der des allgemeinen Geldmarktes ist, d. h. für den der Käufer des Scheins ohne Gewinn und ohne Verlust davonkommt; dieser Werth α bestimmt sich aus der Gleichung

$$C = 100\frac{q}{p}(1-\varrho^\alpha) + 100\varrho^\alpha,$$

oder einfach aus der Gleichung $\varrho^\alpha = \tau = \sum_1^n{}^\alpha\, p_\alpha \varrho^\alpha$; α ist, wie man sich ausdrückt, der *mittlere Zahlungstermin* der Tilgungssummen $t_1 t_2 \ldots t_n$. Für jeden anderen Werth von α erzielt der Käufer Gewinn oder Verlust, und zwar überzeugt man sich leicht, dass bei Effecten *unter pari* ($C < 100$) *frühere*, bei Effecten *über pari* ($C > 100$) *spätere* Ausloosung *für den Gläubiger günstiger* ist. In der Art der Gewinne und Verluste sind beide Kategorien von Werthpapieren insofern verschieden, als bei niedrig verzinslichen Stücken höchstens Zinsverlust, bei höher verzinslichen auch Kapitalverlust eintreten kann. Aus der Gleichung (42) können wir zwei Grenzen für ξ und u angeben; einerseits ist für $\alpha = 1$

$$\xi_1 = \frac{C}{100+q}, \quad u_1 = \frac{100}{C}(q + 100 - C),$$

während für $\alpha = \infty$ (einen Werth, der allerdings bei endlicher Tilgungsfrist n nicht erreicht werden kann) sich ergiebt

$$\frac{\xi_\infty}{1-\xi_\infty} = \frac{C}{q}, \quad u_\infty = \frac{100}{C}\cdot q.$$

Bei Werthen unter pari ($C < 100$) ist $u_1 > u_\infty > 0$; bei Werthen über pari ist $u_\infty > u_1$ und $u_\infty > 0$, wogegen u_1 unter Umständen negativ werden, d. h. Kapitalverlust anzeigen kann. Nehmen wir ein Zahlenbeispiel: zwei Anleihen zu 3 und 4 % werden in 50 Jahren zu gleichen Tilgungsquoten amortisirt; der allgemeine Zinsfuss sei $p = 3\frac{1}{2}$. Man hat

$$\varrho = \frac{1}{1{,}035}, \quad p_\alpha = \frac{1}{50}, \quad \tau = \frac{100}{50\cdot 3\frac{1}{2}}(1-\varrho^{50}) = \frac{2}{7}(1-\varrho^{50}) = 0{,}469112,$$

der mittlere Termin α, aus $\varrho^{\alpha} = \tau$ zu bestimmen, wird 22,002 Jahre. Beide Papiere bringen also bei Ausloosung nach 22 Jahren weder Gewinn noch Verlust; bei früherer Ausloosung bringt das 3 % Gewinn, das 4 % Verlust, bei späterer umgekehrt. Ferner wird für das 4 % Papier

$$C = 100 \cdot \frac{8-\tau}{7} = 107{,}5841,$$

für das 3 %

$$C = 100 \cdot \frac{6+\tau}{7} = 92{,}4159.$$

Die Grösse u_1 ergiebt sich zu

$$(4\,\%) \quad -\ 3{,}3314,$$
$$(3\,\%) \quad +11{,}4527,$$

sodass, wenn der Antheilschein bereits nach 1 Jahre ausgeloost wird, das 4 % Papier einen Kapitalverlust, das 3 % die hohe Verzinsung von 11½ % erfährt. Für u_∞ ergiebt sich

$$(4\,\%) \quad 3{,}7180,$$
$$(3\,\%) \quad 3{,}2462,$$

d. h. die subjective Verzinsung des 4 % Scheins würde nie über 3,7 % steigen, die des 3 % nicht unter 3,2 % fallen können. Zusammenfassend kann man sagen, dass bei Effecten unter pari grössere Gewinne mit kleinerer Wahrscheinlichkeit (bei dem genannten Beispiel ist die Gewinnwahrscheinlichkeit im Ganzen $\frac{21}{50} = 0{,}42$, die Verlustwahrscheinlichkeit $\frac{28}{50} = 0{,}56$, während $\frac{1}{50} = 0{,}02$ als Wahrscheinlichkeit neutralen Ausgangs übrig bleibt) und kleinere Verluste mit grösserer Wahrscheinlichkeit, bei Effecten über pari kleinere Gewinne mit grösserer Wahrscheinlichkeit (0,56) und grössere Verluste mit kleinerer Wahrscheinlichkeit (0,42) zu erwarten sind.

Wenn der Tilgungsplan, sei es ganz oder theilweise, sei es an sich unbestimmt oder nur dem Publikum unbekannt ist, so kann man die Grössen τ und w und damit C und M nicht bestimmen, sondern nur schätzen, indem man die extremen Werthe dieser Grössen aufsucht und daraus Mittelwerthe nimmt.

Ist z. B. τ bekannt, aber nicht die p_α einzeln, so ist w^2 wegen $w^2 + \tau^2 < \tau$ an das Gebiet zwischen 0 und $\tau(1-\tau)$ gebunden; man wird also etwa $w = \frac{1}{2}\sqrt{\tau(1-\tau)}$ setzen dürfen. Oder, sind beide Grössen unbekannt und nur die Tilgungsfrist n

gegeben, so kann, wie sich leicht zeigen lässt, τ nur Werthe zwischen ϱ und ϱ^n, w nur Werthe zwischen 0 und $\frac{\varrho-\varrho^n}{2}$ annehmen, oder, für $n=\infty$ und mit der Näherung $\varrho=1$, es liegt τ zwischen 0 und 1, w zwischen 0 und $\frac{1}{2}$, sodass man schätzungsweise $\tau=\frac{1}{2}$, $w=\frac{1}{4}$ setzen wird. Ist andererseits, wie in der Praxis häufig, bekannt, dass die Tilgung nicht vor m Jahren beginnen wird, so können wir $\tau=\varrho^m\tau'$, $w=\varrho^m w'$ setzen, und diese Grössen τ', w' unterliegen dann derselben Unbestimmtheit wie vorhin τ, w; dabei ist die Abweichung des Curses von $\frac{q}{p}100$ und das Risico offenbar mit dem verkleinernden Factor ϱ^m versehen. Oder, etwas allgemeiner, gesetzt es sei ein gewisser Tilgungsplan, dessen charakteristische Grössen τ_0 und w_0, publicirt, und der Emittent der Anleihe verpflichte sich, die Tilgung die ersten m Jahre hindurch nicht über diesen Plan hinaus zu verstärken, so sind die Grössen τ, w des wirklichen Tilgungsplans dadurch eingeschränkt, dass die Differenzen $\tau-\tau_0$, $w^2-w_0^2$ den Factor ϱ^m enthalten — wodurch die Abweichung des Curses und Risicos von bekannten Werthen C_0, M_0 auf dieselbe Ordnung ϱ^m heruntergedrückt ist.

Aus der Combination der in diesem Paragraphen entwickelten Anleihentilgung mit dem Lotterieprincip entsteht die *Prämienanleihe*, von der wir hier einen nicht zu complicirten Fall betrachten wollen. Denken wir die Anleihe Q in $s=\frac{Q}{100}$ Antheilscheine vom Betrage 100 zerlegt und nennen jeden solchen Schein ein Prämienloos, kurz ein Loos. Von den s Loosen sollen s_1, s_2, ... s_n am Ende des 1., 2., ... n^{ten} Jahres ausgeloost werden, sodass $p_\alpha=\frac{s_\alpha}{s}$ die Wahrscheinlichkeit eines Looses ist, bei der α^{ten} Verloosung gezogen zu werden. Nun sollen aber die s_α Loose der α^{ten} Ziehung nicht zum Nominalwerthe 100 zurückbezahlt, sondern es sollen unter sie die s_α Gewinne

$$C_\alpha^\beta \quad (\beta=1, 2, \ldots s_\alpha)$$

verloost werden. Auf ein Loos, das bei der α^{ten} Ausloosung mit dem Gewinn C_α^β gezogen wird, sind überdies die Zinsen q α Jahre hindurch gezahlt worden; der Werth dieser sämmtlichen Zahlungen auf den heutigen Zeitpunkt discontirt ist

$$A_\alpha^\beta = C_\alpha^\beta\varrho^\alpha + q(\varrho+\varrho^2+\cdots+\varrho^\alpha) = C_\alpha^\beta\varrho^\alpha + 100\frac{q}{p}(1-\varrho^\alpha)$$

und da $p_\alpha^\beta = \frac{1}{s}$ die Wahrscheinlichkeit dieses Gewinns A_α^β ist, so ist

$$C = \sum_{\alpha\beta} p_\alpha^\beta A_\alpha^\beta = \frac{1}{s} \sum_{\alpha\beta} A_\alpha^\beta$$

der Einsatz (Curs) eines Looses, ferner M das damit verbundene Risico, wo

$$M^2 = \frac{1}{s} \sum_{\alpha\beta} (A_\alpha^\beta)^2 - \frac{1}{s^2} \left(\sum_{\alpha\beta} A_\alpha^\beta \right)^2 .$$

Es empfiehlt sich, zunächst die Summen nach β auszuführen und zu setzen

$$\sum_\beta A_\alpha^\beta = s_\alpha A_\alpha , \quad \sum_\beta (A_\alpha^\beta)^2 = s_\alpha B_\alpha^2 ,$$

wonach man hat

$$C = \sum_\alpha \frac{s_\alpha}{s} A_\alpha = \sum_\alpha p_\alpha A_\alpha ,$$

$$M^2 + C^2 = \sum_\alpha \frac{s_\alpha}{s} B_\alpha^2 = \sum_\alpha p_\alpha B_\alpha^2 .$$

Weiter ist mit

$$(43) \quad \sum_\beta C_\alpha^\beta = s_\alpha C_\alpha , \quad \sum_\beta (C_\alpha^\beta)^2 = s_\alpha D_\alpha^2 ,$$

$$A_\alpha = C_\alpha \varrho^\alpha + 100 \frac{q}{p} (1 - \varrho^\alpha) ,$$

$$B_\alpha^2 = D_\alpha^2 \varrho^{2\alpha} + 2 C_\alpha \varrho^\alpha \cdot 100 \frac{q}{p} (1 - \varrho^\alpha) + \left[100 \frac{q}{p} (1 - \varrho^\alpha) \right]^2 ,$$

$$B_\alpha^2 - A_\alpha^2 = (D_\alpha^2 - C_\alpha^2) \varrho^{2\alpha} .$$

Demnach ist

$$(44) \quad C = \sum_\alpha p_\alpha C_\alpha \varrho^\alpha + 100 \frac{q}{p} \left(1 - \sum_\alpha p_\alpha \varrho^\alpha \right) ,$$

$$(45) \quad M^2 = \sum_\alpha p_\alpha (B_\alpha^2 - A_\alpha^2) + \sum_\alpha p_\alpha A_\alpha^2 - \left(\sum_\alpha p_\alpha A_\alpha \right)^2$$

$$= \sum_\alpha p_\alpha (D_\alpha^2 - C_\alpha^2) \varrho^{2\alpha} + \sum_\alpha p_\alpha \varrho^{2\alpha} \left[C_\alpha - 100 \frac{q}{p} \right]^2 -$$

$$- \left(\sum_\alpha p_\alpha \varrho^\alpha \left[C_\alpha - 100 \frac{q}{p} \right] \right)^2 .$$

Hier ist C_α der für ein Loos zu zahlende Einsatz, wenn man bestimmt weiss, dass das Loos an der α^{ten} Ziehung theilnimmt, oder der durchschnittliche Satz, in dem ein Loos in der α^{ten} Ziehung an Stelle des Nominalwerths 100 zurückgezahlt wird. Da ge-

wöhnlich zuerst durch eine »Serienziehung« die s_α Loose bestimmt werden, die an der α^{ten} Verloosung theilnehmen, und dann erst durch »Nummernziehung« die Ausspielung der Gewinne unter ihnen stattfindet, so ist C_α unmittelbar vor der α^{ten} Ziehung der Curs eines in der Serie gezogenen Looses. — Im Grunde gehören bereits Anleihen, bei denen statt des Nominalwerthes ein höherer, aber constanter Satz C_α zurückgezahlt wird, hierher; dann sind also alle $C_\alpha{}^\beta = C_\alpha = D_\alpha$, und in der Risicoformel fällt das erste Glied fort. Sind überdies die C_α auch vom Index α unabhängig und $= C_0$, so wird

$$(46)\quad \begin{cases} C = \left(C_0 - 100\,\frac{q}{p}\right)\sum^\alpha p_\alpha \varrho^\alpha + 100\,\frac{q}{p}, \\ M^2 = \left(C_0 - 100\,\frac{q}{p}\right)^2\left[\sum^\alpha p_\alpha \varrho^{2\alpha} - \left(\sum^\alpha p_\alpha \varrho^\alpha\right)^2\right], \end{cases}$$

sodass wieder die gewöhnlichen Grössen τ, w des Tilgungsplanes auftreten. Für $C_0 = 100\,\frac{q}{p}$ wird der Curs $C = C_0$ vom Tilgungsplan unabhängig und das Risico Null; in der That ist ein zu $q\,\%$ verzinsliches und zu $100\,\frac{q}{p}$ rückzahlbares Papier genau gleich einem $p\,\%$ Papier mit einem im Verhältnis $\frac{q}{p}$ geänderten Nominalwerth. — Prämienanleihen gewähren in der Regel niedrigen Zinsfuss q oder gar keinen; für unverzinsliche Prämienanleihen vereinfachen sich die Formeln durch die Substitution $q = 0$.

5. Anwendung auf die Lebensversicherung.

Anstatt direct auf die Grundlagen der Versicherungsrechnung zurückzugehen, könnten wir einen schon von anderer Seite[1]) bemerkten Parallelismus zwischen Amortisation und Mortalität benutzen und an die Formeln (34) (35) (38) (39) des vorigen Paragraphen anknüpfen. Lassen wir nämlich die specielle Nomenclatur der Anleihentilgung fallen, so handelt es sich um folgenden Sachverhalt. Ein Ereigniss, das innerhalb der nächsten n Jahre eintreten muss, habe die Wahrscheinlichkeiten $p_1 p_2 \ldots p_n$, im 1., 2., ... n^{ten} Jahre einzutreten. Solange es noch nicht eingetreten ist, wird einer gewissen Person am Ende

1) Vgl. Charlon, Théorie mathématique des opérations financières (Paris 1869), auch das früher citirte Buch von Laurent.

jedes Jahres der Betrag q, überdies am Ende desjenigen Jahres, in welchem das Ereigniss eintritt, der Betrag 100 bezahlt. Der heutige Werth dieser Zahlungen ist $= C$, das Risico ihrer Erwerbung $= M$. Jenes die Zahlungen bedingende Ereigniss war bisher die Ausloosung eines Antheilscheins; der Betrag 100 galt als der Nominalwerth, der Betrag q als jährlicher Zins. Nun hätten wir nur die Bezeichnungsweise ein wenig zu ändern, sodass an Stelle der Zahlung 100 eine beliebige Zahlung Q tritt und die periodische Zahlung q, statt am Ende, am Anfang jedes Jahres fällig wird; sodann nehmen wir als bedingendes Ereigniss mit der Wahrscheinlichkeit p_α den *Tod* eines Einzelnen (oder Ehegatten) im α^{ten} Versicherungsjahre. Wir haben dann den allgemeinen Fall einer Rentenversicherung q und einer Kapitalversicherung Q gegen einmalige Prämie C und mit dem Risico M vor uns; die Grösse $\tau = \sum_1^n{}^\alpha p_\alpha \varrho^\alpha$ entspricht dabei den nachher mit P_x, ${}_n\mathfrak{P}_x$ u. dgl. bezeichneten Grössen. Man kann lebenslängliche, aufgeschobene, temporäre Versicherungen nach diesem Schema behandeln; bei den letztgenannten ist nur die Relation $\sum_1^n{}^\alpha p_\alpha = 1$ zu berücksichtigen, sodass $p_n = 1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_{n-1}$ abweichend von den übrigen p_α nicht eine Sterbens-, sondern eine Lebenswahrscheinlichkeit bedeutet. Da indessen auch Fälle zu besprechen sein werden, die sich der Analogie mit der Anleihentilgung nur gewaltsam und künstlich fügen würden, ist es vorzuziehen, die Versicherungsrechnung vom Standpunkt des Zufallsspiels direct zu behandeln.

Wir denken uns eine Mortalitätstafel in der gewöhnlichen Form gegeben; λ_x sei die Zahl der Lebenden vom Alter x,

$$\mu_x = \lambda_x - \lambda_{x+1}$$

die Zahl der zwischen den Altersgrenzen x und $x+1$ Sterbenden. Ferner seien

$$D_x = \lambda_x \varrho^x \quad \text{und} \quad d_x = \mu_x \varrho^{x+1} \tag{47}$$

die sogenannten »discontirten Zahlen« der Lebenden und Sterbenden, und

$$\begin{cases} E_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots, \\ e_x = d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \cdots \end{cases} \tag{48}$$

die Summen dieser discontirten Zahlen vom Alter x bis ans Ende der Tafel. Es bestehen die Relationen

$$(49)\quad \begin{cases} d_x = \varrho D_x - D_{x+1}\,, \\ e_x = \varrho E_x - E_{x+1} = \varrho E_x - (E_x - D_x) \\ \quad = D_x - (1-\varrho)\, E_x\,. \end{cases}$$

Diese Grössen genügen zur Berechnung der gewöhnlichen Versicherungstarife, während bei Versicherungen mit fallender Prämie, steigender Versicherungssumme, Prämienrückgewähr u. dgl. noch die weitere Zahlenreihe

$$\begin{aligned} F_x &= E_x + E_{x+1} + E_{x+2} + \cdots \\ &= D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \cdots \end{aligned}$$

zu berechnen ist. Hingegen verlangt die Ermittlung der Risiken die Kenntniss der Grössen $D'E'\ldots d'e'\ldots$, die aus den ungestrichenen durch Vertauschung von ϱ mit ϱ^2 hervorgehen, also

$$(50)\quad \begin{cases} D'_x = \lambda_x \varrho^{2x}\,, \quad d'_x = \mu_x \varrho^{2x+2}\,, \\ E'_x = D'_x + D'_{x+1} + \cdots, \quad e'_x = d'_x + d'_{x+1} + \cdots, \\ e'_x = D'_x - (1-\varrho^2)\, E'_x\,. \end{cases}$$

Dies vorausgeschickt, seien $\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_{n-1}$ die Wahrscheinlichkeiten[1]), dass ein x-jähriger im 1., 2., .. $(n-1)^{\text{ten}}$ Jahre seines ferneren Lebens sterbe, und

$$\pi_n = 1 - \pi_1 - \pi_2 - \cdots - \pi_{n-1}$$

demnach die Wahrscheinlichkeit, dass er nach $n-1$ Jahren noch am Leben sei. Wir finden

$$(51)\quad \pi_1 = \frac{\mu_x}{\lambda_x},\ \pi_2 = \frac{\mu_{x+1}}{\lambda_x},\ \cdots \pi_{n-1} = \frac{\mu_{x+n-2}}{\lambda_x},\ \pi_n = \frac{\lambda_{x+n-1}}{\lambda_x}\,.$$

Der x-jährige schliesse gegen Erlegung der einmaligen Prämie C die Versicherung auf folgende Zahlungen ab: 1) die jährliche Rente q am Beginn jedes Lebensjahres, jedoch höchstens n-mal, 2) das Kapital Q zu Ende des Sterbejahres, jedoch spätestens nach n Jahren. Dann ist in der Karup'schen Bezeichnung

1) Die früheren Wahrscheinlichkeiten p_α und q_α sind jetzt durch π_α und $\varkappa_\alpha$ ersetzt, um Verwechslung mit den jährlichen Prämien p_x zu vermeiden.

$$C = q \cdot {}_nR_x + Q \cdot {}_n\mathfrak{P}_x . \tag{52}$$

Wir haben ein Zufallsspiel vor uns, worin auf das Ereigniss mit der Wahrscheinlichkeit π_α der Preis

$$\begin{aligned} A_\alpha &= q(1 + \varrho + \varrho^2 + \cdots + \varrho^{\alpha-1}) + Q\varrho^\alpha \\ &= \tfrac{q}{1-\varrho} + \left(Q - \tfrac{q}{1-\varrho}\right)\varrho^\alpha \end{aligned} \tag{53}$$

gesetzt ist; denn wenn der Versicherte, von nun an gerechnet, im α^{ten} Jahre stirbt (resp. für $\alpha = n$ das n^{te} Jahr erlebt), so hat er α-mal pränumerando die Rente q und am Ende des α^{ten} Jahres den Betrag Q zu beanspruchen, und der discontirte Werth dieser Zahlungen ist A_α. Der Einsatz für dieses Spiel ist

$$C = \sum_1^n{}^\alpha \pi_\alpha A_\alpha = \tfrac{q}{1-\varrho} + \left(Q - \tfrac{q}{1-\varrho}\right)\sum_1^n{}^\alpha \pi_\alpha \varrho^\alpha , \tag{54}$$

und das Risico M ist, wenn man (17) benutzt und den constanten Theil von A_α weglässt,

$$M = \pm \left(Q - \tfrac{q}{1-\varrho}\right)\sqrt{\sum_1^n{}^\alpha \pi_\alpha \varrho^{2\alpha} - \left(\sum_1^n{}^\alpha \pi_\alpha \varrho^\alpha\right)^2} . \tag{55}$$

Die Vergleichung zwischen (52) und (54) zeigt, dass

$${}_n\mathfrak{P}_x = \sum_1^n{}^\alpha \pi_\alpha \varrho^\alpha , \quad {}_nR_x = \tfrac{1}{1-\varrho}\left(1 - \sum_1^n{}^\alpha \pi_\alpha \varrho^\alpha\right) . \tag{56}$$

Um auch die jährliche vorschüssige Prämie ${}_n\mathfrak{p}_x$ für die genannte (»gemischte«) Kapitalversicherung im Betrage 1 zu erhalten, deren einmalige Prämie $= {}_n\mathfrak{P}_x$ ist, braucht man in (52) nur $C = 0$, $q = -Q \cdot {}_n\mathfrak{p}_x$ zu setzen und hat

$${}_n\mathfrak{p}_x = {}_n\mathfrak{P}_x : {}_nR_x . \tag{57}$$

Um $\tau = \sum_1^n{}^\alpha \pi_\alpha \varrho^\alpha$ durch die Zahlen der Mortalitätstafel auszudrücken, hat man (54) zu benutzen und findet

$$\lambda_x \tau = \mu_x \varrho + \mu_{x+1}\varrho^2 + \cdots + \mu_{x+n-2}\varrho^{n-1} + \lambda_{x+n-1}\varrho^n$$

oder durch Multiplication mit ϱ^x

$$\begin{aligned} D_x^{\pi} &= d_x + d_{x+1} + \cdots + d_{x+n-2} + \varrho D_{x+n-1} \\ &= d_x + \cdots + d_{x+n-2} + d_{x+n-1} + D_{x+n} \\ &= e_x - e_{x+n} + D_{x+n} \\ &= D_x - (1-\varrho)(E_x - E_{x+n}). \end{aligned}$$

Demnach wird

$$(58) \quad \begin{cases} {}_n\mathfrak{P}_x = 1 - (1-\varrho)\cdot\frac{E_x - E_{x+n}}{D_x}, \\ {}_nR_x = \frac{E_x - E_{x+n}}{D_x}, \\ {}_n\mathfrak{p}_x = \frac{D_x}{E_x - E_{x+n}} - (1-\varrho); \end{cases}$$

sodass die Berechnung der Prämien auf die Zahlen D, E zurückgeführt ist. Endlich sind die Risiken dieser drei Versicherungen zu bilden; man erhält sie aus (55) durch die Substitutionen

(59) $\alpha)\ q=0,\ Q=1,\quad \beta)\ q=1,\ Q=0,\quad \gamma)\ q=-{}_n\mathfrak{p}_x,\ Q=1$

in der Form

(60) $$M({}_n\mathfrak{P}_x) = w, \quad M({}_nR_x) = \frac{w}{1-\varrho}, \quad M({}_n\mathfrak{p}_x) = \frac{w}{1-{}_n\mathfrak{P}_x},$$

wenn man unter w^2 den in (55) auftretenden Radicanden

(61) $$w^2 = {}_n\mathfrak{P}'_x - ({}_n\mathfrak{P}_x)^2$$

versteht, wobei natürlich

$${}_n\mathfrak{P}'_x = 1 - (1-\varrho^2)\frac{E'_x - E'_{x+n}}{D'_x}$$

zu setzen ist. Lässt man insbesondere n ans Ende der Tafel rücken, so gehen die drei behandelten temporären (n-jährigen) Versicherungen in die drei entsprechenden lebenslänglichen über (Kapitalversicherung 1 gegen einmalige Prämie P_x oder jährliche lebenslängliche Prämie p_x, lebenslängliche Rente 1 mit heutigem Werthe R_x) und man hat mit $D_{x+n} = E_{x+n} = 0$

$$(62) \quad \begin{cases} P_x = \frac{e_x}{D_x}, \quad R_x = \frac{E_x}{D_x}, \quad p_x = \frac{e_x}{E_x}, \\ P_x = 1 - (1-\varrho)R_x, \quad R_x = \frac{1-P_x}{1-\varrho}, \quad p_x = \frac{1}{R_x} - (1-\varrho), \end{cases}$$

(63) $$M(P_x) = (1-\varrho)\,M(R_x) = (1-P_x)\,M(p_x) = \sqrt{P'_x - P_x^2}.$$

Wir wollen nunmehr den complicirteren Fall behandeln, dass die Versicherung bereits m Jahre bestanden hat und also eine Prämienreserve führt, ferner berücksichtigen wir die Möglichkeit, dass der Versicherte nach irgend einer Anzahl von Jahren die Versicherung aufgiebt und sich die derzeitige Prämienreserve auszahlen lässt. Dabei beschränken wir uns aber auf lebenslängliche Versicherungen, also auf die drei Fälle P_x, R_x, p_x. Um diese drei Versicherungen mit einem Schlage zu behandeln, denken wir uns, wie bisher, der x-jährige habe die Leibrente q und die Sterbesumme Q zum Preise

$$C = qR_x + QP_x \tag{64}$$

erworben; die Substitutionen

$$\alpha)\ q=0,\ Q=1, \quad \beta)\ q=1,\ Q=0, \quad \gamma)\ q=-p_x,\ Q=1 \tag{65}$$

führen dann auf die genannten drei Specialfälle. Hierbei waren $\pi_1 \pi_2 \ldots$ die Sterbenswahrscheinlichkeiten des Versicherten für das 1., 2., ... Versicherungsjahr, und die in (62) (63) vorkommenden Grössen P_x, P_x' können in der Form

$$P_x = \sum_1^\infty{}^\alpha\, \pi_\alpha \varrho^\alpha, \qquad P_x' = \sum_1^\infty{}^\alpha\, \pi_\alpha \varrho^{2\alpha}$$

geschrieben werden, wo der obere Index $\alpha = \infty$ symbolisch das höchstvorkommende Alter der Sterbetafel bedeutet.

Nach m Jahren ist der Versicherte $x+m$ Jahre alt, und seine nunmehrigen Sterbenswahrscheinlichkeiten sind $\varkappa_{m+1}$, $\varkappa_{m+2}, \ldots$, wo

$$\varkappa_\alpha = \pi_\alpha : (1 - \pi_1 - \pi_2 - \cdots - \pi_m), \quad \alpha = m+1, m+2, \ldots \tag{66}$$

Wir haben dann zunächst (wenn wir von den durch Rückkauf erlöschenden Policen absehen) ein Zufallsspiel vor uns, in dem auf das Ereigniss mit der Wahrscheinlichkeit $\varkappa_{m+\alpha}$ derselbe Preis A_α wie in (53) gesetzt ist, nämlich α-malige Zahlung der Jahresrente q und Zahlung der Sterbesumme Q nach α Jahren. Der Einsatz dieses Spieles würde sein

$$C_m = \sum_1^\infty{}^\alpha\, \varkappa_{m+\alpha} A_\alpha = \frac{q}{1-\varrho} + \left(Q - \frac{q}{1-\varrho}\right) \sum_1^\infty{}^\alpha\, \varkappa_{m+\alpha} \varrho^\alpha$$

und das Risico

$$M_m = \pm \left(Q - \frac{q}{1-\varrho}\right) \sqrt{\sum_1^\infty{}^{\alpha} \varkappa_{m+\alpha} \varrho^{2\alpha} - \left(\sum_1^\infty{}^{\alpha} \varkappa_{m+\alpha} \varrho^{\alpha}\right)^2};$$

hierbei ist C_m offenbar identisch mit der *Prämienreserve*, da der Versicherte diesen Betrag zahlen müsste, wenn er ihn nicht bereits gut hätte.

Schlösse der Versicherte erst jetzt eine Kapitalversicherung 1 gegen einmalige Prämie ab, so müsste er den Betrag

$$P_{x+m} = \sum_1^\infty{}^{\alpha} \varkappa_{m+\alpha} \varrho^{\alpha}$$

zahlen. Berücksichtigt man dies, die entsprechende Formel für P'_{x+m} und die (auch für den Index $x+m$ gültigen) Relationen (62) zwischen den P und R, so gehen C_m und M_m über in

$$(67) \quad \begin{cases} C_m = \frac{q}{1-\varrho} + \left(Q - \frac{q}{1-\varrho}\right) P_{x+m} \\ \qquad = q R_{x+m} + Q P_{x+m}, \\ M_m = \pm \left(Q - \frac{q}{1-\varrho}\right) \sqrt{P'_{x+m} - P^2_{x+m}}. \end{cases}$$

Hieraus erhält man durch die Substitution (65) die Prämienreserven und Fortsetzungsrisiken unserer drei Versicherungen nach m Jahren in der Form

$$(68) \quad C_m(P_x) = P_{x+m}, \quad C_m(R_x) = R_{x+m}, \quad C_m(p_x) = 1 - \frac{R_{x+m}}{R_x}$$

$$(69) \quad M_m(P_x) = (1-\varrho) M_m(R_x) = (1-P_x) M_m(p_x) = \sqrt{P'_{x+m} - P^2_{x+m}}.$$

Die Formel (69) zeigt, dass auch nach m Jahren die drei Risiken noch das constante Verhältniss . . . . . .

$$M_m(P_x) : M_m(R_x) : M_m(p_x) = (1 - P_x) : R_x : 1$$

haben wie zu Anfang. Vergleicht man aber die drei Risiken (69) mit denen, die stattfinden würden, wenn die entsprechende Versicherung erst jetzt geschlossen würde, so erhält man nach (63)

$$M(P_{x+m}) = (1-\varrho)\, M(R_{x+m}) = (1 - P_{x+m})\, M(p_{x+m})$$
$$= \sqrt{P'_{x+m} - P^2_{x+m}}$$

und daher

$$(70)\quad \begin{cases} M_m(P_x) = M(P_{x+m}), \\ M_m(R_x) = M(R_{x+m}), \\ M_m(p_x) = \frac{1-P_{x+m}}{1-P_x} M(p_{x+m}) = \frac{R_{x+m}}{R_x} M(p_{x+m}). \end{cases}$$

Während also das Risico in den Fällen P_x und R_x für Fortsetzung der alten und Abschluss der neuen Versicherung das gleiche ist, ist im Falle p_x das Risico der Fortsetzung einer vor m Jahren abgeschlossenen Versicherung gegenüber dem einer neu abzuschliessenden im Verhältniss $\frac{R_{x+m}}{R_x}$ *kleiner*.

Wir ziehen nun die muthmasslich durch Austritt erlöschenden Versicherungen in Betracht und nehmen an, es sei aus statistischen Ermittelungen von vornherein die wahrscheinliche Zahl $\lambda_{x+m+\alpha} \cdot w_\alpha$ der nach α Jahren Austretenden oder die Wahrscheinlichkeit w_α bekannt, dass ein nach α Jahren noch Lebender von den heute Lebenden λ_{x+m} seine Police gegen die Prämienreserve an den Versicherer zurück verkaufe; w_α sei für die gesammten drei Versicherungen gleich. Man hat dann, vom heutigen Zeitpunkt gerechnet, folgendes Täfelchen, das Aufschluss über die Vorgänge innerhalb der Gesellschaft giebt und worin $y = x + m$ gesetzt ist.

Versicherungsjahr α	Versicherte zu Anfang d. J.	Sterbefälle des Jahres	Ueberlebende zu Ende d. J.	Austreten zu Ende d
1	λ_y	μ_y	λ_{y+1}	$w_1\lambda_{y+1}$
2	$(1-w_1)\lambda_{y+1}$	$(1-w_1)\mu_{y+1}$	$(1-w_1)\lambda_{y+2}$	$w_2\lambda_{y+1}$
3	$(1-w_1-w_2)\lambda_{y+2}$	$(1-w_1-w_2)\mu_{y+2}$	$(1-w_1-w_2)\lambda_{y+3}$	$w_3\lambda_{y+3}$
.	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . .

Demnach ist $v_\alpha = w_\alpha \frac{\lambda_{y+\alpha}}{\lambda_y}$ die Wahrscheinlichkeit, am Ende des α^{ten} Versicherungsjahres (von heute an, also ursprünglich des $(m+\alpha)^{\text{ten}}$) auszutreten, und

$$u_\alpha = \left(1 - \sum_1^{\alpha-1\beta} w_\beta\right) \frac{\mu_{y+\alpha-1}}{\lambda_y}$$

die Wahrscheinlichkeit, in diesem Jahre zu sterben. Die Austretenden erhalten ihre Reserve

$$C_{m+\alpha} = q \cdot R_{y+\alpha} + Q \cdot P_{y+\alpha} = \frac{q}{1-\varrho} + \left(Q - \frac{q}{1-\varrho}\right) P_{y+\alpha},$$

deren heutiger Werth $C_{m+\alpha}\varrho^{\alpha}$ ist, und haben die α-malige Zahlung q mit dem heutigen Werthe $q \cdot \frac{1-\varrho^{\alpha}}{1-\varrho}$ empfangen; beide Leistungen zusammen haben den heutigen Werth

$$B_{\alpha} = \frac{q}{1-\varrho} + \left(Q - \frac{q}{1-\varrho}\right) P_{y+\alpha}\varrho^{\alpha},$$

während auf die Sterbenden wiederum der Preis

$$A_{\alpha} = \frac{q}{1-\varrho} + \left(Q - \frac{q}{1-\varrho}\right) \varrho^{\alpha}$$

entfällt. Demnach ist Einsatz und Risico dieses Spieles, in dem auf Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten u_{α} und v_{α} die Preise A_{α} und B_{α} gesetzt sind, gegeben durch

$$(71) \qquad \begin{cases} E = \frac{q}{1-\varrho} + \left(Q - \frac{q}{1-\varrho}\right)\tau, \\ M = \pm\left(Q - \frac{q}{1-\varrho}\right)\sqrt{\tau' - \tau^2}, \end{cases}$$

wenn man

$$\tau = \sum_{1}^{\infty}{}_{\alpha}\,(u_{\alpha} + v_{\alpha} P_{y+\alpha})\,\varrho^{\alpha},$$

$$\tau' = \sum_{1}^{\infty}{}_{\alpha}\,(u_{\alpha} + v_{\alpha} P^{2}_{y+\alpha})\,\varrho^{2\alpha}$$

setzt und die Relation

$$1 = \sum_{1}^{\infty}{}_{\alpha}\,(u_{\alpha} + v_{\alpha})$$

beachtet. Ferner folgt

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\alpha}\, u_{\alpha}\varrho^{\alpha} = \sum_{1}^{\infty}{}_{\alpha}\,\frac{d_{y+\alpha-1}}{D_y}\left(1 - \sum_{1}^{\alpha-1}{}_{\beta}\, w_{\beta}\right) = \frac{1}{D_y}\left(e_y - \sum_{1}^{\infty}{}_{\beta}\, w_{\beta}\, e_{y+\beta}\right),$$

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\alpha}\, u_{\alpha}\varrho^{2\alpha} = \frac{1}{D_{y'}}\left(e'_y - \sum_{1}^{\infty}{}_{\beta}\, w_{\beta}\, e'_{y+\beta}\right) = P'_y - \sum_{1}^{\infty}{}_{\alpha}\, w_{\alpha}\,\frac{D'_{y+\alpha}}{D'_y}\, P'_{y+\alpha},$$

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\alpha}\, v_{\alpha}\varrho^{\alpha} P_{y+\alpha} = \sum_{1}^{\infty}{}_{\alpha}\, w_{\alpha}\,\frac{D_{y+\alpha}}{D_y}\, P_{y+\alpha} = \sum_{1}^{\infty}{}_{\alpha}\, w_{\alpha}\,\frac{e_{y+\alpha}}{D_y},$$

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\alpha}\, v_{\alpha}\varrho^{2\alpha} P^{2}_{y+\alpha} = \sum_{1}^{\infty}{}_{\alpha}\, w_{\alpha}\,\frac{D'_{y+\alpha}}{D_{y'}}\, P^{2}_{y+\alpha},$$

und damit ergiebt sich

$$\tau = \frac{e_y}{D_y} = P_y\,,$$

$$\tau' = P_y' - \sum_1^\infty{}_\alpha\, w_\alpha \frac{D'_{y+\alpha}}{D_y'}\,(P'_{y+\alpha} - P^2_{y+\alpha})\,,$$

$$D_y'(\tau' - \tau^2) = K_y - \sum_1^\infty{}_\alpha\, w_\alpha K_{y+\alpha}\,, \tag{72}$$

wenn zur Abkürzung

$$K_x = D'_x(P'_x - P^2_x) \tag{73}$$

gesetzt wird. Aus (71) folgt dann

$$E = \frac{q}{1-\varrho} + \left(Q - \frac{q}{1-\varrho}\right) P_y =$$
$$= qR_y + QP_y = C_m\,,$$

ein selbstverständliches Resultat, während die zweite Gleichung (71) mit (72) (73) das Risico M bestimmt. Die Substitutionen (65) zeigen, dass auch hier die Risiken der drei Versicherungen P_x, R_x, p_x in dem bekannten Verhältniss

$$(1 - P_x) : R_x : 1$$

stehen, sodass es genügt, das Risico der einen, etwa P_x, zu betrachten. Dieses Risico M von P_x ist definirt durch

$$D_y' M^2 = K_y - w_1 K_{y+1} - w_2 K_{y+2} - \cdots, \quad y = x + m\,, \tag{74}$$

wonach die Berechnung auf die Grössen K zurückgeführt ist. Finden keine Austritte statt, ($w_\alpha = 0$), so reducirt sich (74) auf ihr erstes Glied

$$M^2 = \frac{K_y}{D_y'} = P_y' - P^2_y = M_m(P_x)^2\,;$$

die Glieder mit w_α geben die Verminderung dieses Risicos $M_m(P_x)$ in Folge des muthmasslichen Erlöschens von Policen an.

Man gelangt von hier wieder zu den *partiellen Risiken*, deren allgemeiner Ansatz in § 2 gegeben wurde. Nimmt man an, es treten nach α Jahren sämmtliche noch lebende Mitglieder aus, so ist $w_\alpha = 1$, alle übrigen $w_\beta = 0$, und (74) wird

$$D_y' M^2 = K_y - K_{y+\alpha}\,.$$

Dieses M, nach Analogie des § 2 mit $M_m^{m+\alpha}$ zu bezeichnen, giebt also das Risico der Versicherung P_x, genommen nach m-jährigem Bestehen der Versicherung und für einen Zeitraum von α Jahren, an dessen Ende die Versicherung als aufgehoben und die Prämienreserve an den Versicherten zahlbar gedacht wird. Insbesondere ergiebt sich für $\alpha = 1$ das einjährige Risico M_m^{m+1} aus der Gleichung

$$(75)\quad D_y'(M_m^{m+1})^2 = K_y - K_{y+1}, \quad M_m^{m+1} = \sqrt{\frac{\mu_y}{\lambda_{y+1}}}(\varrho - P_y).$$

Hier wird also an Stelle der eigentlichen Versicherung ein Zufallsspiel mit nur zwei Möglichkeiten substituirt: entweder stirbt der Versicherte (Wahrscheinlichkeit $\varkappa_{m+1}$) und erhält die Sterbesumme 1, oder er bleibt leben und erhält die Reserve P_{y+1}. Da zu Anfang des Jahres bereits die Reserve P_y vorhanden ist, fallen nur die beiden (auf den Jahresanfang discontirten) Differenzleistungen $\varrho - P_y$, $\varrho P_{y+1} - P_y$ dem Versicherer zur Last, und die identische Gleichung

$$\varkappa_{m+1}(\varrho - P_y) + (1 - \varkappa_{m+1})(\varrho P_{y+1} - P_y) = 0$$

zeigt, dass auch in dieser Auffassung (die bekanntlich zum Begriff der sogenannten »Risicoprämie« für ein Jahr führt[1])) das Spiel ein »gerechtes« ist. Durch Aufsummirung der ersten Gleichung (75) von y bis ans Ende der Tafel kommt man auf eine zur Formel (18) des § 2 analoge Zusammensetzung des totalen Risicos aus den einjährigen.

Bei dieser Gelegenheit mag der im § 2 ohne Beweis ausgesprochene Zusammenhang zwischen der eigentlichen Prämienreserve C_m und der »reinen Reserve«

$$v_m = \sum_{m+1}^{\infty} {}_\alpha\, \varkappa_\alpha x_\alpha$$

verificirt werden. Man hat

$$x_\alpha = A_\alpha - C,$$

wo A_α und C aus (53) und (64) zu ermitteln sind, folglich

---

1) Vgl. Zillmer, Die math. Rechnungen bei Lebens- und Rentenversicherungen. Berlin 1887.

$$v_m = \sum_1^\infty{}^\alpha \varkappa_{m+\alpha}(A_{m+\alpha} - C)$$

$$= \sum_1^\infty{}^\alpha \varkappa_{m+\alpha}\left(\frac{q}{1-\varrho} - C\right) + \sum_1^\infty{}^\alpha \varkappa_{m+\alpha}\varrho^{m+\alpha}\left(Q - \frac{q}{1-\varrho}\right)$$

$$= \frac{q}{1-\varrho} - C + \varrho^m P_{x+m}\left(Q - \frac{q}{1-\varrho}\right)$$

$$= \left(Q - \frac{q}{1-\varrho}\right)(\varrho^m P_{x+m} - P_x)$$

oder

$$(Q P_{x+m} + q R_{x+m})\varrho^m = C_m \varrho^m = v_m + C - q \cdot \frac{1-\varrho^m}{1-\varrho}.$$

In der That hat der Versicherte den Einsatz C vorweg entrichtet und auch den Preis A_m theilweise, nämlich soweit er von der Rente q (nicht von der Sterbesumme Q) herrührt, vorweg empfangen; demnach ist sein reines Guthaben v_m um C zu vermehren und um

$$[A_m]_{\varrho=0} = q\,\frac{1-\varrho^m}{1-\varrho}$$

zu vermindern; das Resultat würde die Prämienreserve sein, aber bezogen auf den Anfang der Versicherung, also die mit ϱ^m multiplicirte Prämienreserve.

Die Ausdehnung der Betrachtungen dieses Paragraphen auf complicirtere Versicherungsmodi, verbundene Leben u. dgl. bietet keine principielle Schwierigkeit. Im Allgemeinen würde durch Mitberechnung der Risiken neben den gewöhnlichen Tarifgrössen die Arbeit verdoppelt, indem man ausser den bekannten Tafeln entsprechende mit dem Discontirungsfactor ϱ^2 zu construiren hat; bei den Tarifen mit fallenden Prämien oder Prämienrückgewähr braucht man überdies eine Summenreihe der discontirten Zahlen D_x' mehr als von den D_x. Diese Umstände würden zunächst gegen die praktische Verwendbarkeit des Risicos sprechen, wenn man sich nicht andererseits einige Erleichterungen gestatten dürfte, wie z. B. die Verwendung interpolatorischer Formeln für λ_x, die Zusammenfassung von Altersgruppen zu einem mittleren Alter und verschiedener Versicherungssummen zu einer mittleren Summe. Denn da die Zuschläge zu den Prämien nicht nur zur Deckung des Risicos, sondern

auch zur Aufbringung der Verwaltungskosten resp. Erzielung eines Geschäftsgewinns bestimmt sind, so wird — wenigstens gegenüber dem gewöhnlichen Verfahren, das über das Mass der Risicodeckung gar keine Rechenschaft ablegt — eine ungefähre Schätzung der Risiken bereits ausreichende Dienste thun.

Alle Ausführungen dieses Paragraphen beziehen sich auf einzelne Versicherungen; das Risico der Gesammtheit der Versicherten oder der Versicherungsgesellschaft ist die Quadratwurzel aus der Quadratsumme der Einzelrisiken, wenigstens solange man die Sterbenswahrscheinlichkeiten als gegebene und constante Grössen ansieht, die für jeden Versicherten unabhängig sind vom Leben oder Sterben anderer Versicherter. Diese Voraussetzung ist nicht mehr erfüllt, wenn man die Unsicherheit der genannten Wahrscheinlichkeiten (die ja nur aus einer endlichen Anzahl von Beobachtungen hergeleitet sind) in Betracht zieht; man erhält dann andere Formeln sowohl für Einzel- als Gesammtrisico, die sich den unsrigen um so mehr nähern, je mehr gewisse ganze Zahlen ins Unendliche wachsen. In mancher Beziehung sind die hierbei auftretenden Wahrscheinlichkeiten und Risiken das Gegenstück zu den entsprechenden Grössen des Lotteriespiels; sowie die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Loosen zu gewinnen, nicht einfach das Quadrat der Gewinnwahrscheinlichkeit eines Looses ist, so ist hier die Wahrscheinlichkeit, dass zwei gleichaltrige Personen sterben, nicht mehr das Quadrat der Sterbenswahrscheinlichkeit einer Person. Der allgemeine Fall dieser Kategorie würde, wenn wir ähnliche Bezeichnungen wie im § 3 einführen, folgendermassen zu behandeln sein. Auf n einander ausschliessende Ereignisse $\mathsf{A}\,\mathsf{B}\,\Gamma\ldots$, von denen eins eintreten muss, sind die Preise $\mathsf{A}\,\mathsf{B}\,\Gamma\ldots$ gesetzt. Man kennt aber ihre Wahrscheinlichkeiten nicht, sondern hat nur beobachtet, dass unter $s = a + b + c + \cdots$ angestellten Versuchen a mal das Ereignis A, b mal B, c mal $\Gamma\ldots$ eingetreten ist. Hieraus soll ein Schluss auf weiter anzustellende σ Versuche gezogen werden. Wenn über jene Wahrscheinlichkeiten alle Hypothesen des möglichen Werthbereichs gleichberechtigt sind, so ist bekanntlich

$$p = \frac{\sigma!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}\,\frac{(a+\alpha)!\,(b+\beta)!\,(c+\gamma)!\ldots}{(s+\sigma+n-1)!}\,\frac{(s+n-1)!}{a!\,b!\,c!\ldots}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass unter den $\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \cdots$

neuen Versuchen die Vertheilung $\alpha \cdot \mathsf{A} + \beta\ \mathsf{B} + \gamma \cdot \Gamma + \cdots$ der Ereignisse stattfinde. Der auszuzahlende Preis wird in diesem Falle

$$\alpha\mathsf{A} + \beta\mathsf{B} + \gamma\Gamma + \cdots$$

und der Reingewinn

$$x = \alpha\mathsf{A} + \beta\mathsf{B} + \gamma\Gamma + \cdots - \sigma A\,,$$

wenn A den Spieleinsatz bedeutet. Bezeichnet S eine Summation über alle ganzzahligen nichtnegativen Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ deren Summe $= \sigma$, und setzt man

$$(s+n)A = (a+1)\mathsf{A} + (b+1)\mathsf{B} + (c+1)\Gamma + \cdots,$$
$$(s+n)B^2 = (a+1)\mathsf{A}^2 + (b+1)\mathsf{B}^2 + (c+1)\Gamma^2 + \cdots,$$

so lässt sich zeigen, dass

$$Sp = 1\,, \quad Spx = 0\,,$$

und das mittlere Risico dieses Spieles wird

$$Spx^2 = M_\sigma^2 = \sigma \cdot \frac{s+\sigma+n}{s+n+1}(B^2 - A^2)$$
$$= \sigma M_1^2 \cdot \frac{s+\sigma+n}{s+n+1}\,.$$

Auch hier also, bei dem Inductionsschluss von s bekannten auf σ unbekannte Fälle, unterscheidet sich das mittlere Risico M_σ von seinem gewöhnlichen Werthe $\sqrt{\sigma}\,M_1$ um einen Betrag, der von der Ordnung $\frac{1}{s}$ ist; ausserdem ist bereits M_1 anders zu bestimmen als gewöhnlich, indem man nämlich statt der unbekannten Wahrscheinlichkeiten gewisse empirische Werthe $\frac{a+1}{s+n}, \frac{b+1}{s+n}, \cdots$ zu setzen hat. Sowohl der hier betrachtete Fall als auch die Theorie des Lotteriespiels führen wieder auf den Normalfall fester unabhängiger Wahrscheinlichkeiten, wenn man s (Anzahl der Loose resp. der beobachteten Versuche) über alle Grenzen wachsen lässt.

Wollte man endlich, wie es ZECH [1]) gethan hat, die Beziehung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung gänzlich fallen lassen und die mittleren Risiken rein als mittlere Fehler von Functionen

1) ZECH, Ueber das Risico bei Lebensversicherungen. Tübingen 1861.

beobachteter Grössen verstehen, so beträte man das Gebiet willkürlicher und conventioneller Annahmen, oder müsste, um die mittleren Fehler der unabhängigen Grössen zu bestimmen, eine grosse Zahl von Gruppen und innerhalb jeder Gruppe eine grosse Zahl einzelner Leben beobachten. Die von Zech aufgestellten Formeln leiden überdies an einer fehlerhaften Wahl der unabhängigen Variablen. Es ist unzulässig, aus der Formel

$$\lambda_x R_x = \lambda_x + \varrho\,\lambda_{x+1} + \varrho^2 \lambda_{x+2} + \cdots$$

für den Rentenwerth des x-jährigen den Schluss zu ziehen, dass der mittlere Fehler von R_x aus denen der $\lambda_{x+\alpha}$ durch die bekannte quadratische Formel erhalten werde — unzulässig deshalb, weil die $\lambda_{x+\alpha}$ nicht von einander unabhängig variiren dürfen (jedes $\lambda_{x+\alpha+1}$ muss $< \lambda_{x+\alpha}$ sein) und in Folge dessen auch die Productglieder $\lambda_{x+\alpha} \cdot \lambda_{x+\beta}$ einen Beitrag zum mittleren Fehler liefern. Um auf einwandfreie Formeln zu kommen, wären etwa die successiven Ueberlebenswahrscheinlichkeiten

$$w_\alpha = \lambda_{x+\alpha} : \lambda_{x+\alpha-1}$$

einzuführen und zu setzen

$$\lambda_{x+1} = \lambda_x \cdot w_1, \quad \lambda_{x+2} = \lambda_x \cdot w_1 w_2, \quad \lambda_{x+3} = \lambda_x \cdot w_1 w_2 w_3, \ldots$$

Diese Grössen w_α sind von einander unabhängig und liegen zwischen 0 und 1; in Bezug auf sie kann die bekannte Formel

$$m(R_x)^2 = \sum_1^\infty{}_\alpha \left(\frac{\partial R_x}{\partial w_\alpha}\right)^2 m(w_\alpha)^2$$

angewendet werden, die übrigens mit Benutzung unserer Zahlen D_x und E_x in

$$D_x^2 m(R_x)^2 = \sum_1^\infty{}_\alpha E_{x+\alpha}^2 \frac{m(w_\alpha)^2}{w_\alpha^2}$$

übergeht. Hieraus erhält man wieder einen mit (63) übereinstimmenden Werth, wenn man nach Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$$\lambda_{x+\alpha-1}\, m(w_\alpha)^2 = w_\alpha(1 - w_\alpha),$$

also

$$\frac{m(w_\alpha)^2}{w_\alpha^2} = \frac{1}{\lambda_{x+\alpha}} - \frac{1}{\lambda_{x+\alpha-1}}$$

setzt und einige nicht schwierige Umformungen vornimmt. Die von ZECH mit in Rechnung gezogene Unsicherheit des Zinsfusses lässt sich nach Einführung der w_α in einfachster Form behandeln, wenn man

$$R_x = 1 + W_1 + W_1 W_2 + W_1 W_2 W_3 + \cdots, \quad W_\alpha = \varrho_\alpha w_\alpha$$

setzt und den mittleren Fehler von R_x durch die mittleren Fehler der W_α ausdrückt; $\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \ldots$ sind hierbei die Discontirungsfactoren, die der voraussichtlich im ersten, zweiten, dritten ... Versicherungsjahre zu erzielenden Verzinsung entsprechen.

P. Drude, *Zur Theorie der anomalen elektrischen Dispersion und Absorption.*

Die Thatsache, dass viele Substanzen für elektrische Schwingungen schneller Periode eine nicht ihrer Leitfähigkeit entsprechende, sondern anomale Absorption und eine weit kleinere Dielektricitätsconstante, als bei langsamen elektrischen Schwingungen, besitzen, ist deshalb so auffallend, weil man zunächst aus Analogie mit den optischen Erscheinungen derartige Anomalieen erst bei denjenigen Schwingungsperioden erwarten sollte, welche in der Grössenordnung vergleichbar mit den Eigenschwingungsperioden der Molekule sind. Nun sind aber die elektrischen Schwingungen, bei denen unter Umständen diese Anomalien schon auftreten, noch so langsam, dass man ähnlich langsame Eigenschwingungsperioden der Molekule für wenig wahrscheinlich halten wird; mindestens ist zu versuchen, wie weit man zu einer den Thatsachen entsprechenden Theorie dieser Erscheinungen auch ohne die Hypothese sehr langsamer Molekular-Eigenschwingungen gelangen kann.

Die Richtung, in welcher ein derartiger Versuch unternommen werden kann, ergiebt sich nun aus einem genaueren Vergleich der Eigenschaften der elektrischen und der optischen Anomalie: abgesehen davon, dass beide Erscheinungen in sehr verschiedenen Schwingungsperioden sich abspielen, besteht ein wesentlicher Unterschied in der Breite der Absorptionsbanden. Obwohl für die elektrischen Schwingungen die volle Ausdehnung des Absorptionsgebietes noch bei keiner Substanz ermittelt worden ist, so kann man doch schon behaupten, dass das elektrische Absorptionsgebiet sich in stetig wechselnder Intensität über ein wesentlich grösseres Gebiet von Wellenlängen erstreckt, als die Absorptionsbanden der optsich

anomalen Körper. So konnte ich[1]) bei mehreren Körpern, welche starke Absorption bei der (in Luft gemessenen) Wellenlänge $\lambda = 75$ cm zeigten, auch merkbare, allerdings schwächere Absorption bei $\lambda = 200$ cm nachweisen.

Vom Standpunkte der Theorie der optischen anomalen Dispersion sind nun die Absorptionsbanden um so breiter, je stärker die Dämpfung der Eigenschwingungen der Moleküle ist. In dieser optischen Theorie nöthigt die Schmalheit der Absorptionsbanden zu der Annahme, dass die Dämpfungsconstante der Eigenschwingungen der Moleküle ziemlich klein ist. Sie gewinnt dadurch Einfluss auf die Erscheiuungen nur dann, wenn die Periode der Lichtschwingungen in der Nachbarschaft der Molekular-Eigenschwingungen liegt. Halten wir nun den allgemeinen Standpunkt der Theorie der optischen Anomalie auch hier im elektrischen Gebiete fest, so werden wir jedenfalls durch die Breite des Absorptionsgebietes zu der Annahme sehr grosser Dämpfungsconstanten gezwungen. Diese gewinnen dann aber Einfluss auf die Erscheinungen, selbst wenn die Periode der einfallenden Schwingungen sehr viel langsamer ist, als die Eigenschwingungsperiode der Moleküle; ja man kann als extremen Fall letztere als verschwindend annehmen im Vergleich zur Periode der einfallenden Schwingungen.

Dieser extreme Fall deckt sich dann in der Vorstellung mit einer Auffassung, die zuerst in einer Arbeit von Millikan[2]) als ein Gedanke von Nernst ausgesprochen worden ist, nämlich die anomale elektrische Dispersion durch Anwesenheit kleiner Bestandtheile gewisser Leitfähigkeit in isolirender Umgebung zu erklären. Es würde dies also eine Beschaffenheit des Körpers sein, die Maxwell[3]) zur mathematischen Darstellung der elektrischen Rückstandserscheinungen herangezogen hat.

Nachdem ich schon früher[4]) diesen extremen Standpunkt, nämlich völlige Vernachlässigung der Molekular-Eigenschwing-

---

1) Abhandl. d. sächs. Ges. d. Wiss. Math.-phys. Kl. Bd. 23, p. 1, 1896. — Wiedem. Ann. 58, p. 1, 1896.

2) R. Millikan, Wied. Ann. 60, p. 376, 1897.

3) Cl. Maxwell, Elektr. u. Magnetism., deutsch von Weinstein, Berlin 1883, p. 471 ff. Art. 328—330.

4) Wied. Ann. 60, p. 505, 1897. — Zeitschr. f. phys. Chem. 23, p. 324, 1897.

ungen, wegen seiner besonderen Einfachheit und grösseren Plausibilität hervorgehoben habe, möchte ich im Folgenden näher nachweisen, dass man von beiden Ausgangspunkten aus, nämlich aus der allgemeinen Dispersionstheorie und aus der Vorstellung des mit Leitern untermischten Isolators, zu denselben Resultaten geführt wird. Ferner werde ich diese Resultate an der Hand des bisher vorliegenden Beobachtungsmaterials prüfen.

I. Alle Theorien der optischen anomalen Dispersion, sowohl die mechanischen, als die elektrische Theorie der Valenzschwingungen, als die Theorie der elektrischen Schwingungen in elektrisch nicht geladenen Molekülen führen [1]) zu folgender Gleichung für den Brechungsexponenten n einer Substanz und ihren Absorptionsindex [2]) $\varkappa$:

$$(1) \qquad n^2(1-i\varkappa)^2 = \varepsilon_0 + \sum_h \frac{\varepsilon_h}{1 + i\frac{a_h}{T} - \frac{b_h}{T^2}};$$

T bedeutet die Periode der einfallenden Schwingung. Das Σ Zeichen über den Index h deutet an, dass mehrere Molekülgattungen vorhanden sein können. Die Constante a_h misst die Dämpfung der Molekül-Eigenschwingungen, b_h ist bei fehlender Dämpfung gleich dem Quadrat der Eigenschwingung der betreffenden Molekülgattung.

Nehmen wir letztere als verschwindend an im Vergleich zu den angewandten Perioden T, d. h. setzen wir $b_h = 0$, so entsteht aus (1):

$$(2) \qquad \begin{aligned} n^2(1-\varkappa^2) &= \varepsilon_0 + \sum \frac{\varepsilon_h}{1 + \left(\frac{a_h}{T}\right)^2}, \\ 2n^2\varkappa &= \sum \frac{\varepsilon_h}{1 + \left(\frac{a_h}{T}\right)^2} \cdot \frac{a_h}{T}. \end{aligned}$$

Für sehr kleine Perioden T strebt hiernach n^2 und $\varkappa$ den Grenzwerthen zu:

$$(3) \qquad n^2 = \varepsilon_0, \quad \varkappa = 0 \text{ für } T = 0,$$

---

1) Vgl. z. B. mein Buch Physik des Aethers. p. 527.

2) Absorptionsindex $\varkappa$ ist dadurch definirt, dass die Amplitude auf der Strecke von einer Wellenlänge (in der Substanz) im Verhältniss $1 : e^{2\pi\varkappa}$ abnimmt.

für sehr grosse Perioden T den Grenzwerthen:

$$(4) \qquad n^2 = \varepsilon_0 + \sum \varepsilon_h, \quad \varkappa = 0 \text{ für } T = \infty.$$

Aus der letzten Gleichung geht hervor, dass der Körper für sehr langsame Wechselzahlen keine Energie vermindernde Einflüsse äussert, d. h. dass wir ihn als elektrischen Isolator auffassen. Man könnte leicht die Gleichungen so ergänzen, dass auch die für langsame Stromwechsel als Leiter wirkende Körper inbegriffen würden, indess soll hiervon abgesehen werden, da Ohm'sche Leitfähigkeit bei den Körpern, auf welche schliesslich die Resultate der Rechnung angewandt werden sollen, nicht in Betracht kommt.

Aus (2) folgt, dass $n^2\varkappa$ mehrere Maxima bei verschiedenem T besitzt. Verfolgen wir näher den einfachsten Fall, der vielleicht bei der elektrischen Anomalie oft wirklich vorliegt, dass nämlich $n^2\varkappa$ nur ein Maximum besitzt, so giebt es auch nur eine Molekülgattung. Ihre Constanten ε_h, a_h seien ε', a' genannt. Die Gleichungen (2) werden dann, wenn man den Werth, den n^2 für $T = \infty$ annimmt, ε_∞ nennt, d. h. setzt:

$$(4') \qquad \varepsilon_\infty = \varepsilon_0 + \sum \varepsilon_h = \varepsilon_0 + \varepsilon',$$

$$n^2(1-\varkappa^2) = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}{1 + \left(\frac{a'}{T}\right)^2} = \varepsilon_\infty - \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}{1 + \left(\frac{T}{a'}\right)^2},$$

$$(5) \qquad 2n^2\varkappa = \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}{1 + \left(\frac{a'}{T}\right)^2} \cdot \frac{a'}{T} = \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}{1 + \left(\frac{T}{a'}\right)^2} \cdot \frac{T}{a'}.$$

Es sind also jetzt nur drei Constanten für den betrachteten Körper charakteristisch: ε_∞, ε_0 und a'. Die beiden ersteren bedeuten diejenigen Grenzwerthe, denen n^2 diesseits und jenseits des Absorptionsgebietes zustrebt. ε_∞ ist also mit der bei langsamen Stromwechseln oder in elektrostatischen Experimenten gültigen Dielektricitätsconstante identisch, ε_0 mit dem Werthe des Quadrates des optischen Brechungsindex, falls wirklich nur ein Absorptionsmaximum für die Schwingungen, die langsamer als die optischen sind, vorhanden ist. Giebt es deren mehrere Maxima, so gelten die Formeln (5) überhaupt nicht mehr, sondern die allgemeinen (2). Falls aber die verschiedenen Absorptionsgebiete genügend weit auseinander liegen, so gelten die Formeln

(5) immer noch angenähert. ε_∞ hat die Bedeutung behalten, ε_0 ist aber dann grösser als das Quadrat des optischen Brechungsindex.

a' bedeutet diejenige Schwingungsdauer T, für welche $n^2(1-\varkappa^2)$ das arithmetische Mittel $\frac{\varepsilon_\infty + \varepsilon_0}{2}$ zwischen den Grenzwerthen ist, während $n^2\varkappa$ für diese Periode a' das Maximum besitzt, nämlich $n^2\varkappa_{\text{Max}} = \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}{4}$. Die Grösse $n^2(1-\varkappa^2)$ spielt die Rolle der Dielektricitätsconstanten der Substanz bei beliebiger Schwingungsdauer. Wir wollen daher setzen

$$n^2(1-\varkappa^2) = \varepsilon . \tag{6}$$

ε ist directer Messung zugänglich, wenn die Substanz den Zwischenraum zwischen den Platten eines Condensators füllt, z. B. bei der von mir in der Zeitschr. f. phys. Chem. **23**, p. 324, 1897 als zweite bezeichnete Methode[1]), während die dort als Wellenlängenmethode bezeichnete direct den Brechungsexponenten n liefert.

Durch Elimination von $\frac{a'}{T}$ entsteht aus (5):

$$2n^2\varkappa = \sqrt{[\varepsilon_\infty - n^2(1-\varkappa^2)]\,[n^2(1-\varkappa^2) - \varepsilon_0]}\,, \tag{7}$$

oder wenn man die Bezeichnung (6) benutzt:

$$\frac{2\varkappa}{1-\varkappa^2} = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{(\varepsilon_\infty - \varepsilon)(\varepsilon - \varepsilon_0)}. \tag{8}$$

Man muss also aus bekanntem ε_∞, ε_0 und beobachteter Dielecticitätsconstante ε den Absorptionsindex $\varkappa$ berechnen können, am einfachsten durch die Formeln:

$$\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{(\varepsilon_\infty - \varepsilon)(\varepsilon - \varepsilon_0)} = \operatorname{tg}\varphi\,, \quad \varkappa = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\,. \tag{9}$$

Diese Formel fordert zur Prüfung mit den Beobachtungen sehr auf. Sie wird im dritten Abschnitt angewandt werden.

Die Berechnung der Constanten a' aus den Beobachtungen ergiebt sich am bequemsten mit Hilfe einer der Formeln:

---

1) Ich habe sie näher auch in Wied. Ann. **61**, p. 416, 1897 auseinandergesetzt.

$$a' = T\sqrt{\frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_0}}, \tag{10}$$

$$a' = T\frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon}{2n^2\varkappa}, \tag{11}$$

$$a' = T\frac{2n^2\varkappa}{\varepsilon - \varepsilon_0}. \tag{12}$$

Umgekehrt stellen sich die Dielektricitätsconstante ε, der Brechungsindex n, der Absorptionsindex $\varkappa$ mit Hilfe der Constanten ε_∞, ε_0, a' dar in folgender Weise:

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_0 + \dfrac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}{1 + \left(\dfrac{a'}{T}\right)^2} = \varepsilon_\infty - \dfrac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}{1 + \left(\dfrac{T}{a'}\right)^2}, \\ n = \sqrt{\dfrac{\eta + \varepsilon}{2}}, \quad \varkappa = \sqrt{\dfrac{\eta - \varepsilon}{\eta + \varepsilon}}, \end{cases} \tag{13}$$

wobei η eine Abkürzung ist für

$$\eta = \sqrt{\varepsilon_0^2 + \frac{\varepsilon_\infty^2 - \varepsilon_0^2}{1 + \left(\frac{a'}{T}\right)^2}} = \sqrt{\varepsilon_\infty^2 - \frac{\varepsilon_\infty^2 - \varepsilon_0^2}{1 + \left(\frac{T}{a'}\right)^2}}.$$

Für $\varkappa$ ergiebt sich auch die (oft bequeme) Formel

$$\varkappa = \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}{\eta + \varepsilon} \cdot \frac{\frac{T}{a'}}{1 + \left(\frac{T}{a'}\right)^2}. \tag{13a}$$

Für die numerische Berechnung ist es am bequemsten, nach Berechnung von ε zu bilden:

$$\frac{2\varkappa}{1 - \varkappa^2} = \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}{\varepsilon} \cdot \frac{\frac{T}{a'}}{1 + \left(\frac{T}{a'}\right)^2} = \operatorname{tg}\varphi. \tag{13b}$$

Dann ist

$$\varkappa = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi.$$

n^2 wird aus ε gefunden nach:

$$n^2 = \frac{\varepsilon}{1 - \varkappa^2}$$

Für sehr grosse T wird

$$\varkappa = \frac{a'}{2T} \cdot \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}{\varepsilon_\infty}, \tag{13'}$$

für sehr kleine T:

$$\varkappa = \frac{T}{2a'} \cdot \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass mit abnehmender Schwingungsdauer T ε und n beständig abnehmen von ε_∞ bis ε_0, dass dagegen $\varkappa$ ein Maximum erreicht bei

$$T = a' \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_\infty}}, \tag{14}$$

und zwar wird dort:

$$\varkappa_{\text{Max.}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_\infty - 2\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_\infty}}{\varepsilon_0 + \varepsilon_\infty + 2\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_\infty}}}, \quad \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_\infty}\right). \tag{14'}$$

Die Grösse $n\varkappa$ erreicht ein Maximum bei:

$$T = a' \sqrt{\frac{\varepsilon_\infty + 3\varepsilon_0}{3\varepsilon_\infty + \varepsilon_0}}, \tag{15}$$

und zwar wird dort:

$$n\varkappa_{\text{Max.}} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}{\sqrt{2(\varepsilon_\infty + \varepsilon_0)}}. \tag{15'}$$

Bedeutende Absorptionen sind also nur bei den Substanzen zu erwarten, bei denen ε_∞ und ε_0 stark von einander verschieden sind. Identificiren wir ε_0 mit dem Quadrate des optischen Brechungsindex, so ist daher beim Wasser die allergrösste Absorption zu erwarten. Für $\varepsilon_0 = 1{,}8$ und $\varepsilon_\infty = 81$ folgt bei Wasser aus den Formeln (14') und (15'):

$$\varkappa_{\text{Max.}} = 0{,}74; \quad n\varkappa_{\text{Max.}} = 3{,}08.$$

Bei welchen Schwingungsdauern T aber diese bedeutenden Absorptionen eintreten, kann man aus den bisherigen Beobachtungen noch nicht bestimmen. Bei einer Wellenlänge in Luft von 2 bis 3 cm scheint allerdings nach Versuchen, mit denen ich soeben beschäftigt bin, das Wasser bedeutende Absorption zu besitzen.

Bei den Fettsäuren: Propionsäure, Buttersäure, Valeriansäure unterscheidet sich ε_∞ nur wenig von ε_0. Daher tritt in ihnen trotz Hydroxylgruppe nur geringe Absorption auf[1]). Trotzdem kann bei derartigen Körpern die Reibungsconstante a'

1) Vgl. Zeitschr. f. phys. Chem. 23, 1897, p. 819.

einen bedeutenden Werth besitzen, wie ein Blick auf die Formel (10) lehrt.

Es ist zu bemerken, dass nach der hier entwickelten Theorie keine normale Dispersion des Brechungsindex n bestehen kann, d. h. derselbe kann nicht mit abnehmender Schwingungsperiode T wachsen. Sowie dieses eintritt, versagt also die hier gegebene Theorie, d. h. es macht sich dann doch der Einfluss der Eigenschwingungsdauern der Molekülе bemerkbar. Ob es wirklich Substanzen mit normaler elektrischer Dispersion giebt, möchte ich als wahrscheinlich gemacht bezeichnen, aber noch nicht als absolut sicher (vgl. hierüber meine Auseinandersetzungen in der Ztschr. f. phys. Chem. 23, p. 322 u. ff. 1897).

II. Es soll jetzt untersucht werden, zu welchen Resultaten die Vorstellung führt, dass in einem isolirenden Medium der Dielektricitätsconstante ε_1 eingebettet sind Bestandtheile der Dielektricitätsconstante ε_2 und der (nach absolutem elektromagnetischem Maasse gemessenen) Leitfähigkeit σ_2. Dabei sollen diese Bestandtheile von so kleinen Dimensionen angenommen werden, dass die Periode ihrer Eigenschwingungen, die streng genommen stets vorhanden sind, falls sich ε_2 von ε_1 unterscheidet, zu vernachlässigen ist gegenüber den Perioden der einfallenden Wellen.

Es ist wohl von vornherein klar, dass diese Vorstellung sich im Princip nicht unterscheidet von der im Abschnitt I benutzten, besonders wenn man die Molekülе als elektrisch ungeladen annimmt; ob aber die Resultate ganz identisch ausfallen, bedarf noch der näheren Untersuchung, zumal bei dieser Vorstellung zur Charakterisirung des Körpers vier (oder eventuell fünf, vgl. weiter unten) Constanten vorhanden sind, nämlich ε_1, ε_2, σ_2 und das von den eingelagerten Bestandtheilen eingenommene Volumen, während bei der Vorstellung I nur drei Constanten auftreten. Ausserdem ist es interessant, zu untersuchen, was für Aufschlüsse über jene vier Constanten man aus den Beobachtungen ziehen kann.

Nun ist allerdings zu berücksichtigen, dass die strenge Lösung der hier gestellten Aufgabe mathematisch nur für den Fall vollständig durchzuführen ist, dass die Structur des Körpers eine in Parallelschichten wechselnde ist. Diese Structur besteht in Wirklichkeit jedenfalls nicht, man kann aber wohl allgemeine Schlüsse über das Verhalten eines gemischten Dielektricums

aus der Parallelschichtenstructur ziehen, falls die Schichten senkrecht[1]) zu den elektrischen Kraftlinien angenommen werden. Diesen Weg hat schon Maxwell eingeschlagen.

Die nächste einfache Vorstellung, die der Wirklichkeit schon jedenfalls wesentlich näher käme, wäre die Annahme von eingelagerten Kugeln. Wenn sich nun auch der Fall einer einzigen eingelagerten Kugel in constantem elektrischen Felde leicht vollständig berechnen lässt, so ist dies doch mit einigermassen einfachen mathematischen Hilfsmitteln nicht mehr möglich, sobald mehrere oder unendlich viele Kugeln vorhanden sind, deren relative Abstände nicht sehr gross gegenüber ihren Radien sind. Wenn die eingelagerten Bestandtheile nicht die Gestalt von Kugeln besitzen, so wird die mathematische Behandlung noch weniger völlig durchführbar.

Eine völlige Durchführung dieser Rechnungen ist nun aber auch gar nicht nothwendig, falls man den wichtigsten Theil der hier gestellten Aufgabe lösen will, nämlich für die im Ganzen aus der Mischung resultirenden Eigenschaften ihre Abhängigkeit von der Periode T zu finden. Die umgekehrte Aufgabe, die Eigenschaften der beiden verschiedenen Bestandtheile aus den resultirenden Eigenschaften des Gemisches abzuleiten, erfordert allerdings die völlige mathematische Durchrechnung der Vorstellung, aber selbst wenn letztere gelingen sollte, so kann man doch einen Schluss auf alle vier oben genannten Constanten des Körpers nicht ziehen, sondern eine derselben kann stets willkürlich gewählt werden. Es wird dies weiter unten nachgewiesen.

Ich theile diesen Abschnitt in zwei Theile: im ersten (1) werden allgemeine Schlüsse gezogen, ohne eine Annahme über die specielle Gestalt der eingelagerten Bestandtheile zu machen; ein zweiter (2) wird die Vorstellung einer Parallelschichtenstructur und näherungsweise auch die Vorstellung von der Kugelgestalt der eingelagerten Bestandtheile mathematisch verfolgen.

1. *Nehmen wir zunächst an, die eingelagerten Bestandtheile seien ohne Leitfähigkeit* ($\sigma_1 = 0$), d. h. sie seien vollkommene

---

1) Würden die Schichten nicht senkrecht, z. B. parallel zu den elektrischen Kraftlinien verlaufen, so würde die Substanz auch für stationäre Ströme Leitfähigkeit besitzen, was den hier getroffenen Annahmen nicht entspricht.

Isolatoren der Dielektricitätsconstante ε_2 in dem Dielektricum der Constante ε_1, so ist die Mischung einem vollkommenen Isolator äquivalent, dessen Dielektricitätsconstante ε genannt werden möge. Um dieses äquivalente ε zu finden, möge vorausgesetzt werden, dass die Mischung den Zwischenraum zwischen zwei sehr grossen, parallelen Metallplatten anfülle, welche den Abstand d von einander besitzen und zur Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ geladen seien. Nennen wir die Capacität dieses Condensators C, die Grösse der Metallplatten S, so ist die äquivalente Dielektricitätsconstante ε der Mischung dadurch definirt, dass die Beziehung besteht:

$$C = \frac{S\varepsilon}{4\pi d}. \tag{16}$$

Die Capacität C kann man nun direct in folgender Weise berechnen: Nennt man den dielektrischen Widerstand w einer Kraftröhre zwischen den beiden Metallplatten 1 und 2 das Integral:

$$w = \int_1^2 \frac{dl}{\varepsilon' dq}, \tag{17}$$

wobei dl ein Längenelement der Kraftröhre, dq ihren Querschnitt und ε' die an gleicher Stelle wirklich vorhandene Dielektricitätsconstante (also entweder ε_1 oder ε_2) bezeichnet; nennt man ferner W den gesammten dielektrischen Widerstand sämmtlicher (zwischen beiden Metallplatten parallelgeschalteter) Kraftröhren, so ist[1]):

$$\frac{1}{W} = \sum \frac{1}{w}, \tag{18}$$

$$C = \frac{1}{4\pi W}. \tag{19}$$

Es möge nun der Querschnitt einer auf der Metallplatte 1 endigenden Kraftröhre mit dS bezeichnet werden und die dort stattfindende Stärke des elektrischen Feldes mit $\mathfrak{F}_1$; die Dielektricitätsconstante hat an den Metallplatten überall den Werth ε_1, da sie nicht die eingelagerten Bestandtheile durchschneiden oder genau berühren sollen.

---

1) Vgl. P. Drude, Wied. Ann. 57, p. 228, 1896.

Weil nun der Inductionsfluss an jeder Stelle einer und derselben Kraftröhre constant ist, so ist

$$\varepsilon' dq\mathfrak{F} = \text{Const.} = \varepsilon_1 dS\mathfrak{F}_1 , \tag{20}$$

wobei $\mathfrak{F}$ die Feldstärke an beliebiger Stelle bedeutet. Benutzt man diese Beziehung für die Formel (17), so entsteht:

$$w = \frac{1}{\varepsilon_1 dS\mathfrak{F}_1}\int_1^2 \mathfrak{F}\, dl = \frac{V_1 - V_2}{\varepsilon_1 dS_1\mathfrak{F}_1} , \tag{21}$$

und aus (18)

$$\frac{1}{W} = \frac{\varepsilon_1}{V_1 - V_2}\int \mathfrak{F}_1 dS , \tag{22}$$

wobei das Integral über die Oberfläche der Metallplatte 1 zu erstrecken ist.

Setzt man den Werth für W nach (22) in (19) ein und vergleicht damit die Formel (16), so ist die äquivalente Dielektricitätsconstante ε zu berechnen aus:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \frac{d \cdot \int \mathfrak{F}_1 \cdot dS}{S(V_1 - V_2)} , \tag{23}$$

oder, wenn man für $V_1 - V_2$ schreibt $\int_1^2 \mathfrak{F}\, dl$, so entsteht:

$$\varepsilon : \varepsilon_1 = \frac{\int \mathfrak{F}_1 \cdot dS}{S} : \frac{\int \mathfrak{F} \cdot dl}{d} . \tag{24}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung bedeutet das Verhältniss zweier Mittelwerthe der elektrischen Kraft, und zwar des auf einer Niveaufläche und des längs einer Kraftlinie genommenen Mittelwerthes. Man kann also die Berechnung der äquivalenten Dielektricitätsconstante ε anschaulich in Worte kleiden.

Die Art und Weise, in welcher jene Mittelwerthe von den Dielektricitätsconstanten ε_1 und ε_2 abhängen, lässt sich nun in allgemeiner Form angeben, ohne specielle Voraussetzungen über die Gestalt, Grösse und Lagerung der eingelagerten Bestandtheile zu machen.

An der Oberfläche eines eingelagerten Bestandtheiles sind nämlich die Grenzbedingungen zu erfüllen:

$$\varepsilon_1(\mathfrak{F}_n)_1 = \varepsilon_2(\mathfrak{F}_n)_2 , \quad (\mathfrak{F}_\tau)_1 = (\mathfrak{F}_\tau)_2 , \tag{25}$$

wobei $\mathfrak{F}_n$ die zur Oberfläche normal wirkende Kraftcomponente, $\mathfrak{F}_\tau$ eine zur Oberfläche parallel wirkende Kraftcomponente bedeutet. Diesen Grenzbedingungen kann genügt werden, wenn man sich denkt, dass das elektrische Feld, wie es die äusseren Einwirkungen in der homogen gedachten Substanz hervorbringen, gestört wird durch eine an der Oberfläche der eingelagerten Bestandtheile angebrachte elektrische Belegung, deren relative Dichtigkeitsvertheilung je nach den geometrischen Verhältnissen der Einlagerungen passend zu wählen ist und deren Wirkung so berechnet wird, als ob die Dielektricitätsconstante überall gleich 1 sei. Es ist zu beachten, dass die relative Dichtigkeitsvertheilung der fingirten Belegung nur von geometrischen Verhältnissen abhängig ist, aber nicht von den Werthen der Dielektricitätsconstanten ε_1 und ε_2. Wohl aber hängt die absolute Intensität dieser fingirten Belegung von ε_1 und ε_2, besonders von der Differenz $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ ab. Diese Art der Abhängigkeit kann man leicht bestimmen.

Durch die Annahme von Flächenladungen wird die zweite der Grenzbedingungen (25) sofort befriedigt; die erste liefert hier Folgendes:

Falls die Substanz homogen wäre, würden die äusseren Einwirkungen überall eine constante Feldstärke a von der Richtung s, in unserem Falle eines Plattencondensators bewirken. Es ist demnach zu setzen:

$$(\mathfrak{F}_n)_1 = a\cos(ns) + b\,.\,\beta_1\,, \quad (\mathfrak{F}_n)_2 = a\cos(ns) + b\,.\,\beta_2\,,$$

wobei β_1 und β_2 die Werthe der von den Oberflächen sämmtlicher Einlagerungen herrührenden Wirkungen der relativen Dichtigkeitsvertheilung sind, d. h. derjenigen Dichtigkeitsvertheilung, die man erhält, wenn man an einem willkürlich gewählten Punkte P einer Oberfläche die Dichtigkeit der Belegung gleich 1 setzt, während b die absolute Intensität der fingirten Belegung bedeutet, d. h. die wirklich im Punkte P anzunehmende Ladungsdichte.

Nach (25) muss dann sein:

$$\varepsilon_1(a\cos(ns) + b\beta_1) = \varepsilon_2(a\cos(ns) + b\beta_2)\,. \tag{26}$$

β_1 und β_2 hängen nur von der geometrischen Anordnung der Einlagerungen ab, nicht von ε_1 oder ε_2. Damit die Gleichung

(26) an jedem Punkte der Grenzflächen bestehen kann, muss die relative Dichtigkeitsvertheilung auf ihnen so gewählt werden, dass β_1 und β_2 die Form annehmen:

$$\beta_1 = \gamma_1 \cos(ns), \quad \beta_2 = \gamma_2 \cos(ns), \tag{27}$$

wobei γ_1 und γ_2 gewisse Zahlwerthe sind, die an jedem Punkte der Grenzflächen dieselben sind. Vermöge (26) und (27) wird dann

$$b = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)a}{\varepsilon_2\gamma_2 - \varepsilon_1\gamma_1}. \tag{28}$$

In dieser Formel ist die Art der Abhängigkeit der absoluten Intensität b der fingirten Flächenbelegung von den Werthen der Dielektricitätsconstanten ε_1 und ε_2 enthalten.

Vermöge (28) muss nun auch $\mathfrak{F}$ sowohl, als $\mathfrak{F}_1$ die Form annehmen:

$$\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1 = a\left[1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2\gamma_2 - \varepsilon_1\gamma_1} f(x, y, z)\right], \tag{29}$$

wobei die Function $f(x, y, z)$ eine Abhängigkeit vom Ort bezeichnet, die durch die geometrischen Anordnungen der Einlagerungen hervorgerufen wird, aber nicht von ε_1 oder ε_2 abhängt. Daher wird nach (24)

$$\varepsilon : \varepsilon_1 = 1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2\gamma_2 - \varepsilon_1\gamma_1} p : 1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2\gamma_2 - \varepsilon_1\gamma_1} q, \tag{30}$$

wobei p und q gewisse von der geometrischen Anordnung der Einlagerungen abhängige Zahlwerthe sind, die aber nicht von ε_1 oder ε_2 abhängen.

Nach (30) ist also die äquivalente Dielektricitätsconstante ε der Mischung:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \frac{\varepsilon_2\gamma_2 - \varepsilon_1\gamma_1 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)p}{\varepsilon_2\gamma_2 - \varepsilon_1\gamma_1 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)q}, \tag{31}$$

welche Gleichung man auch in der Form schreiben kann:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 f \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1 g}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1 h}. \tag{32}$$

Dabei ist:

$$f = \frac{\gamma_2 - p}{\gamma_2 - q}, \quad g = \frac{p - \gamma_1}{\gamma_2 - p}, \quad h = \frac{q - \gamma_1}{\gamma_2 - q}. \tag{33}$$

Es ist also

$$f = \frac{1 + h}{1 + g}, \tag{34}$$

d. h. es bleiben in (32) nur zwei Constanten übrig, welche aus der Gestalt und der geometrischen Anordnung der Einlagerung im Princip berechnet werden können.

Es soll jetzt die Untersuchung auf den Fall ausgedehnt werden, dass die Einlagerungen ausser der Dielektricitätsconstante ε_2 auch noch die endliche Leitfähigkeit σ_2 besitzen sollen. Zu den Verschiebungsströmen, deren Intensität zu ε_2 proportional ist, superponiren sich dann noch Leitungsströme, deren Intensität proportional zu σ_2 ist. Für periodische Bewegungen der Periode T, die wir gleich dem reellen Theile gewisser den Factor

$$e^{2\pi \frac{t}{T} i}$$

enthaltenden Ortsfunctionen setzen können, wobei i die imaginäre Einheit bedeutet, ist der Effect der superponirten Leitungsströme sowohl in den Bewegungsgleichungen als auch in den Grenzbedingungen ganz derselbe [1]), als ob an Stelle der reellen Dielektricitätsconstante ε_2 die complexe Grösse $\varepsilon_2 - 2ic^2 T\sigma_2$ getreten wäre, wobei $c = 3 \cdot 10^{10}$ das Verhältniss des elektrostatischen zum elektromagnetischen Maasssystem bedeutet, d. h. $c^2\sigma_2$ die nach absolutem elektrostatischem Maasse gemessene Leitfähigkeit der Einlagerungen ist. Bezeichnen wir dieselbe mit σ_2', d. h. setzen wir:

$$\sigma_2' = c^2\sigma_2 , \tag{35}$$

so ergeben sich aus (32) die äquivalenten Werthe der Dielektricitätsconstanten ε und der nach elektrostatischem Maasse gemessenen Leitfähigkeit σ' der Mischung aus der Formel:

$$\varepsilon - 2iT\sigma' = \varepsilon_1 f \frac{\varepsilon_2 - 2iT\sigma_2' + \varepsilon_1 g}{\varepsilon_2 - 2iT\sigma_2' + \varepsilon_1 h} . \tag{36}$$

f, g, h hängen nur von der Gestalt und relativen Lage der Einlagerungen ab; zwischen ihnen besteht die Relation (34).

Aus (36) ergiebt sich für $T = \infty$:

$$\varepsilon = \varepsilon_\infty = \varepsilon_1 f , \quad \sigma' = 0 ; \tag{37}$$

---

1) Vgl. z. B. das Buch des Verf. »Physik des Aethers« p. 551.

für $T = 0$:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \varepsilon_1 f \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1 g}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1 h}, \quad \sigma' = 0. \tag{38}$$

Durch Einführung der Werthe ε_∞ und ε_0 in (36) ergiebt sich:

$$\varepsilon - 2iT\sigma' = \varepsilon_\infty \frac{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_\infty} - 2iT\frac{\sigma_2'}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1 h}}{1 - 2iT\frac{\sigma_2'}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1 h}},$$

oder wenn man setzt

$$\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1 h}{2\sigma_2'} = a': \tag{39}$$

$$\varepsilon - 2iT\sigma' = \frac{\varepsilon_\infty + i\frac{a'}{T}\cdot\varepsilon_0}{1 + i\frac{a'}{T}} = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}{1 + i\frac{a'}{T}}. \tag{40}$$

Wenn man nun den Brechungsindex n und den Absorptionsindex $\varkappa$ der Mischung an Stelle ihrer Dielektricitätsconstanten ε und Leitfähigkeit σ' einführen will, so ist zu setzen [1]):

$$\varepsilon = n^2(1 - \varkappa^2), \quad T\sigma' = n^2\varkappa. \tag{41}$$

Daher ergiebt sich aus (40) durch Trennung des Reellen und Imaginären:

$$n^2(1 - \varkappa^2) = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}{1 + \left(\frac{a'}{T}\right)^2}, \quad 2n^2\varkappa = \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}{1 + \left(\frac{a'}{T}\right)^2}\cdot\frac{a'}{T}. \tag{42}$$

Diese Formeln sind aber völlig identisch mit den aus der ersten Vorstellung im Abschnitt I abgeleiteten Formeln (5). *Beide Vorstellungen führen also zu völlig identischen Resultaten.*

Nach der hier durchgeführten Vorstellung könnte eine Substanz im allgemeinsten Falle fünf charakteristische Constanten besitzen, nämlich ε_1, ε_2, σ_2, die Gestalt der Einlagerungen und die procentische Volumanfüllung mit denselben. Letztere beiden Constanten kommen durch die Grössen g und h zur Geltung, während f nach (34) von g und h abhängt. Wie aber die letzten Resultate, z. B. die Formel (40), lehren, ist das beobachtbare Verhalten der Mischung nur durch drei Constanten charakterisirt, als

1) Vgl. Wied. Ann. **61**, p. 494, 1897.

welche man z. B. ε_∞, ε_0 und α' wählen kann. Man kann daher aus den Beobachtungen auch nicht alle fünf, in der Theorie zunächst auftretenden Constanten berechnen, sondern erhält nur drei Relationen für dieselben. Nimmt man für alle Substanzen Kugelgestalt für die Einlagerungen an, so bleiben nur vier Constanten übrig. Setzt man ferner noch $\varepsilon_1 = 1$, wie es Clausius in seiner Theorie der Dielektrica thut, so bleiben nur drei Constanten übrig. Diese muss man dann aus den Beobachtungen berechnen können. Es soll dies im nächsten Abschnitt (2) näher untersucht werden.

Bedeutendere Absorption tritt für diejenigen Schwingungsdauern T ein, welche von der Grössenordnung der Constanten α' sind. Nach der Formel (14), pag. 555, wird z. B. $\varkappa$ ein Maximum für

$$T = \frac{\sqrt{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1 g)(\varepsilon_2 + \varepsilon_1 h)}}{2\alpha'_2}. \tag{43}$$

Die Werthe von h und g haben, wie aus den weiter unten angegebenen Formeln (57) hervorgeht, den Betrag 2 bei sehr kleiner Ausdehnung der Einlagerungen; je grösser letztere werden, um so mehr wächst h, während g um so mehr abnimmt. Wenn ε_1 nicht sehr bedeutend grösser als ε_2 ist, ist daher $\varepsilon_2 + \varepsilon_1 g$ und $\varepsilon_2 + \varepsilon_1 h$ im Allgemeinen von der Grössenordnung von ε_2 (oder ε_1). Man erhält daher dann den früher[1]) von mir ausgesprochenen Satz, dass »diejenigen elektrischen Schwingungen am stärksten absorbirt werden, deren Periode (der Grössenordnung nach) gleich der Dielektricitätsconstante der Theilchen, dividirt durch das Doppelte ihrer nach absolutem elektrostatischem Maasse gemessenen Leitfähigkeit ist«. Zu bemerken ist, dass diese Periode, d. h. der Werth $\varepsilon_2 : 2\alpha'_2$, die Bedeutung der sogenannten Abklingungsconstante für die Einlagerungen besitzt, d. h. derjenigen Zeit, innerhalb deren eine elektrische Störung, wenn sie sich selbst überlassen wird, auf den $e^{2\pi}$-ten Theil des Anfangswerthes sinkt.

2. Es mögen nun zwei specielle Vorstellungen über die Gestalt der Einlagerungen näher verfolgt werden.

Nehmen wir eine Structur in Schichten an, welche senkrecht zu den Kraftlinien verlaufen, so ist für einen Platten-

1) Wied. Ann. **60**, p. 508, 1897.

condensator, dessen Platten den Abstand d besitzen, während die Einlagerungen im Ganzen die Dicke d' einnehmen mögen, der dielektrische Widerstand w einer zwischen den Condensatorplatten verlaufenden Kraftröhre, die den (in diesem Falle überall constanten) Querschnitt q besitzt:

$$w = \frac{d'}{\varepsilon_2 \cdot q} + \frac{d - d'}{\varepsilon_1 \cdot q} .$$

Die äquivalente Dielektricitätsconstante der Mischung bestimmt sich aus:

$$w = \frac{d}{\varepsilon \cdot q} .$$

Da nun $d' : d = \nu$ gleich dem in der Volumeinheit von den Einlagerungen eingenommenen Volumen ist, so folgt aus diesen Gleichungen:

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\nu}{\varepsilon_2} + \frac{1 - \nu}{\varepsilon_1} ,$$

oder

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 \nu + \varepsilon_2 (1 - \nu)} . \tag{44}$$

Aus dem Vergleich mit (32) folgt also hier:

$$f = \frac{1}{1 - \nu}, \quad g = 0, \quad h = \frac{\nu}{1 - \nu} .$$

Eine nähere Verfolgung dieses Falles hat aber für den vorliegenden Zweck wenig Interesse, da eine derartige Schichtenstructur jedenfalls nicht vorliegt.

Es soll nun der Fall untersucht werden, dass die Einlagerungen Kugeln vom Radius R seien. Wenn nur eine einzige Kugel unter dem Einflusse eines constanten äusseren Feldes a vorhanden wäre, so kann man bekanntlich den Grenzbedingungen (25) genügen durch die Annahme einer Belegung der Kugeloberfläche, die aus der Superposition einer positiv und einer etwas in Richtung der Kraft a verschobenen negativ geladenen Kugel entsteht. Diese Flächenbelegung erzeugt für innere Punkte der Kugel eine constante Kraft (b), während sie für äussere Punkte das Potential

$$-V' = bR^3 \cdot \frac{z}{r^3} \tag{45}$$

erzeugt, falls der Coordinatenanfang in das Kugelcentrum gelegt wird, die z-Axe in die Richtung der äusseren constanten Kraft a, und mit r die Entfernung vom Kugelcentrum bezeichnet ist. Im Inneren der Kugel ist also die elektrische Kraft

$$\mathfrak{F}_i = a + b \tag{46}$$

und zwar nach der z-Axe gerichtet, während sie für äussere Punkte aus dem Potential

$$-V = az - V' = az + bR^3 \frac{z}{r^3} \tag{47}$$

durch Differentiation ableitbar ist. Die zweite der Grenzbedingungen (25) ist dadurch erfüllt, während die erste liefert:

$$\varepsilon_1 (a - 2b) \cos(nz) = \varepsilon_2 (a + b) \cos(nz),$$

d. h.

$$b = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} a. \tag{48}$$

Wir wollen uns nun denken, dass der die Kugel umgebende Isolator (ε_1) eine concentrische Kugel vom Radius R_1 wäre. Wir wollen fragen: Mit welcher Dielektricitätsconstante ε müsste man diese Kugel vom Radius R_1 behaftet ansehen, damit ihre Wirkung bei Lagerung im Luftraum, d. h. in einer Umgebung der Dielektricitätsconstante 1, und bei homogener Anfüllung dieselbe wäre, wie die Wirkung der Kugel vom Radius R, deren Dielektricitätsconstante ε_2 ist, und die sich in einer Umgebung der Dielektricitätsconstante ε_1 befindet?

Letztere Kugel besitzt nach (45) und (48) das Potential:

$$-V' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} aR^3 \cdot \frac{z}{r^3},$$

erstere Kugel würde das Potential besitzen:

$$-V_1' = \frac{1 - \varepsilon}{2 + \varepsilon} a R_1^3 \cdot \frac{z}{r^3}.$$

Damit gleiche Wirkungen eintreten, muss sein $V = V'$, d. h.

$$\frac{1 - \varepsilon}{2 + \varepsilon} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{R^3}{R_1^3}.$$

Nun bezeichnet $R^3 : R_1^3$ das Verhältniss des Volumens der ein-

gelagerten Kugel zu dem Volumen des homogen gedachten Isolators der äquivalenten Dielektricitätsconstante ε. Bezeichnet man das Verhältniss dieser Volumina mit ν, so ergiebt sich aus der letzten Gleichung für die äquivalente Dielektricitätsconstante:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \frac{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\nu}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\nu}. \tag{49}$$

Ueberträgt man diese Formel auch auf den Fall, dass beliebig viele Kugeln im Isolator eingebettet sind, wobei dann ν das Volumen der Einlagerungen in der Volumeneinheit der Mischung bedeutet, so hat man die Verallgemeinerung der Clausius-Mossotti'schen Formel für die Theorie der Dielektrica. Denn für $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \infty$ ergiebt sich

$$\varepsilon = \frac{1 + 2\nu}{1 - \nu}. \tag{50}$$

Indess ist zu bemerken, dass die strenge Gültigkeit dieser Formeln aufhört, sowie ν nicht mehr sehr klein ist, d. h. sowie der Radius der eingelagerten Kugeln nicht mehr sehr klein im Vergleich zu ihrem relativen Abstand ist. Denn dann stören die Nachbarkugeln die Constanz des elektrischen Feldes im Inneren jeder der Kugeln, wir können durch Flächenbelegungen der Kugeln, deren relative Dichtevertheilung durch die oben genannte Construction zu erhalten ist, jetzt nicht mehr die erste der Grenzbedingungen (25) erfüllen. Eine strenge Lösung dieser Aufgabe wird in geschlossener Form unmöglich sein.

Indess wollen wir zur Illustration des oben eingeschlagenen Weges eine angenäherte Berechnung der äquivalenten Dielektricitätsconstante ε auch einmal nach der oben pag. 11 abgeleiteten Formel (24) vornehmen.

Wir denken uns zunächst nur eine einzige Kugel vom Radius R vorhanden. Der Anfangspunkt der Coordinaten liege in ihrem Centrum, die z-Axe in der Richtung der ursprünglichen elektrischen Kraft. Um den in (24) auftretenden Linearmittelwerth der elektrischen Kraft zu finden, ist die Gleichung zu berücksichtigen

$$\frac{\int \mathfrak{F} \cdot dl}{d} = \frac{V_1 - V_2}{d}.$$

Wir wollen als Strecke d nehmen eine vom Kugelcentrum aus-

gehende, in der z-Axe verlaufende Linie. Nach (47) ist dann

$$V_1 - V_2 = d\left(a + b\frac{R^3}{d^3}\right),$$

d. h.

$$\frac{\int \mathfrak{F} \cdot dl}{d} = a + b\frac{R^3}{d^3}. \tag{54}$$

Um den in (24) auftretenden Flächenmittelwerth der elektrischen Kraft zu finden, wollen wir die betrachtete Fläche S nicht, wie dort vorausgesetzt wurde, ganz ausserhalb der Einlagerung verlaufen lassen, sondern wollen sie durch das Kugelcentrum legen. Aus (20) ergiebt sich nun sofort:

$$\varepsilon_1 \int \mathfrak{F}_1 \cdot dS = \varepsilon_2 \int \mathfrak{F}_i \cdot dS_1 + \varepsilon_1 \int \mathfrak{F}_a \cdot dS_2, \tag{52}$$

wobei das erste Integral sich auf die Flächenelemente dS_1 der Fläche S bezieht, welche im Inneren der Kugel liegen, während dS_2 ein ausserhalb liegendes Flächenstück der Fläche S bedeutet. Es ist nun nach (46)

$$\varepsilon_2 \int \mathfrak{F}_i \cdot dS_1 = \varepsilon_2 (a + b) \cdot \pi R^2, \tag{53}$$

ferner ist nach (47)

$$\mathfrak{F}_a = -\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0} = a + b\frac{R^3}{r^3}.$$

Setzen wir

$$dS_2 = 2\pi r\, dr,$$

so ist

$$\varepsilon_1 \int \mathfrak{F}_a \cdot dS_2 = \varepsilon_1 \int_R^{d'} \left(a + b\frac{R^3}{r^3}\right) 2\pi r\, dr,$$

falls wir die Fläche S, auf der wir den Mittelwerth der elektrischen Kraft bilden wollen, als Fläche eines um den Coordinatenanfang mit dem Radius d' beschriebenen Kreises wählen. — Man kann die Integration leicht ausführen und erhält

$$\varepsilon_1 \int \mathfrak{F}_a \cdot dS_2 = 2\pi\varepsilon_1 \left[a\frac{d'^2 - R^2}{2} + bR^3\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d'}\right)\right]. \tag{54}$$

Aus (52), (53) und (54) ergiebt sich nun, wenn man auf (48) Rücksicht nimmt:

$$\frac{\varepsilon_1 \int \mathfrak{F}_1 \cdot dS}{S} = \varepsilon_1\left(a - 2b\frac{R^3}{d'^3}\right). \tag{55}$$

Daher ergiebt sich nun aus (24), (54), (55) und (48):

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \frac{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\frac{R^3}{d'^3}}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\frac{R^3}{d^3}}. \tag{56}$$

Wenn nun sehr viele Kugeln eingelagert sind, so können wir uns die Centren derselben wegen der Isotropie der Substanz in den Mittelpunkten von aneinander liegenden Würfeln der Kantenlänge s liegend denken. Verwenden wir auch jetzt noch die bisherige Form der Lösung (was nur bei grossen $s : R$ gestattet ist), so ist annähernd in jedem Würfel die Wirkung der eigenen Kugel besonders massgebend. Berücksichtigen wir sie nur allein, so ist in unserer vorigen Betrachtung $d = d' = \frac{1}{2}s$ zu wählen. Allerdings ist eigentlich der Flächenmittelwerth der elektrischen Kraft über die ganze Seite s^2 des Würfels zu nehmen und nicht nur über die Fläche $\frac{\pi}{4}s^2$ des einbeschriebenen Kreises.

Unter d' ist also in (55) und (56) etwas zu verstehen, das zwischen $\frac{1}{2}s$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}s$ liegt. Ebenfalls ist aber auch unter d in (56) und (54) eine Grösse zu verstehen, die zwischen $\frac{s}{2}$ und $\frac{s}{\sqrt{2}}$ liegt, denn nach (47) schwankt ja das Potential auf einer Würfelseite, da r von $\frac{1}{2}s$ bis $\frac{s}{\sqrt{2}}$ variirt. Bezeichnet man das Verhältniss des Kugelvolumens zum Würfelvolumen mit ν, so wäre

$$\frac{R^3}{d^3} = \frac{6}{\pi}\nu, \text{ falls } d = \tfrac{1}{2}s,$$

$$\frac{R^3}{d^3} = \frac{3}{\sqrt{2}.\pi}\nu, \text{ falls } d = \frac{s}{\sqrt{2}}.$$

Für den mittleren Werth, den d und d' anzunehmen haben, kann daher $R^3 : d^3$, bezw. $R^3 : d'^3$ nicht wesentlich vom Volumverhältniss ν verschieden sein. Eine genauere Berechnung hat nicht viel Zweck, da die Formeln doch ungenau werden müssen, sowie ν nicht mehr sehr klein ist.

Es ergiebt sich also, angenähert wenigstens, auch auf diesem

Wege die frühere Formel (49). — Ein Vergleich mit der früheren allgemeineren Formel (32) liefert hier

$$(57) \qquad f = \frac{1+2r}{1-\nu}, \quad g = \frac{2(1-\nu)}{1+2\nu}, \quad h = \frac{2+\nu}{1-\nu}.$$

Wenn die Einlagerungen auch Leitfähigkeit σ_2 besitzen, so gelten ganz die früheren Betrachtungen; die Coefficienten f, g, h bleiben ungeändert.

Wenn $\varepsilon_1 = 1$ gesetzt wird (wie es Clausius thut), so kann man aus den Beobachtungen die drei Constanten ε_2, σ_2', ν berechnen. Zuverlässige Schlüsse werden wir nur bei sehr kleinem ν zu erwarten haben. Die weitgehenden Bestätigungen indessen, welche die Clausius'sche Formel (50) bei Dichte- und Temperaturänderungen erfahren hat, geben auch bei grösserem ν den Schlüssen ein gewisses Interesse.

Aus (37) folgt bei $\varepsilon_1 = 1$:

$$(58) \qquad \nu = \frac{\varepsilon_\infty - 1}{\varepsilon_\infty + 2},$$

aus (38):

$$(59) \qquad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_\infty + 1) - 2}{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0},$$

aus (39):

$$(60) \qquad \sigma_2' = \frac{(\varepsilon_\infty + 2)(\varepsilon_\infty - 1)}{2a'(\varepsilon_\infty - \varepsilon_0)}.$$

III. *Vergleich der Resultate mit Beobachtungen.* Zunächst soll zur Prüfung der Theorie mit Hilfe der Formel (9) aus beobachtetem $\varepsilon_\varkappa$, ε und ε_0 der Absorptionsindex $\varkappa$ berechnet und mit dem beobachteten Werthe verglichen werden. Für mehrere Substanzen habe ich Beobachtungen von ε und $\varkappa$ in der Ztschr. f. phys. Chem. **23**, p. 267, 1897 veröffentlicht. Die Beobachtungen beziehen sich mit einer Ausnahme beim Glycerin, die durch einen Stern * gekennzeichnet ist, auf eine Wellenlänge λ der elektrischen Schwingungen in Luft des Betrages $\lambda = 75$ cm, d. h. auf eine Periode $T = 25 \cdot 10^{-10}$ sec. Beim Glycerin ist die eine Beobachtung (*) bei der Wellenlänge $\lambda = 200$ cm hinzugefügt, deren Resultat ich in den Abhandl. der k. Sächs. Ges. d. Wiss. math.-phys. Klasse Bd. **23**, p. 55 und p. 165 früher mitgetheilt habe. Für ε_0 ist bei allen Substanzen der Werth 2 angenommen, was etwa dem Quadrate des optischen Brechungsindex entspricht. $\varkappa$ wird bei dieser Berechnung wenig von ε_0 beeinflusst, so dass

es auf den genauen Werth von ε_0 nicht ankommt. Selbst wenn wir beim Aethylalkohol den Werth $\varepsilon_0 = 6{,}8$ und beim Glycerin den Werth $\varepsilon_0 = 3{,}4$ annehmen würden, was aus weiter unten zu besprechenden Beobachtungen wahrscheinlicher sein würde, würde trotzdem der Werth von $\varkappa$ bei dem vorliegenden T nur ganz unerheblich kleiner werden. ε_∞ ist entweder als Mittelwerth aus den Resultaten mehrerer Beobachter entnommen oder von mir selbst mit Hilfe des Nernst'schen Apparates[1]) bestimmt (vgl. das Nähere in der Ztschr. f. phys. Chem. 22 p. 267), oder den Angaben von Thwing[2]) entnommen. Die von ihm benutzte Schwingungsdauer ist für den vorliegenden Zweck nahezu schon als unendlich gross anzusehen. Die von Thwing entnommenen Zahlen ε_∞ sind durch * gekennzeichnet.

Die Temperatur ist etwa 19° Cels.

Wenn an dem Namen der Substanz kein Index angebracht ist, so ist die Beobachtung nach der Condensatormethode von mir ausgeführt worden (vgl. Ztschr. f. phys. Chem., l. c.), dagegen bedeutet ein $\sim$, dass ε und $\varkappa$ nach der Wellenlängenmethode bestimmt worden sind.

Substanz	ε_∞	ε	$\varkappa$ ber.	$\varkappa$ beob.
Methylalkohol	34,0*	32,5	0,10	0,08
Methylalkohol $\sim$ . .		33,2	0,07	
Aethylalkohol . . . ,	26,0	21,7	0,21	0,21
Aethylalkohol $\sim$ . .		22,0	0,20	0,21
Propylalkohol	21,6	12,3	0,35	0,41
Isopropylalkohol . .	19,8*	15,4	0,24	0,24
Isobutylalkohol . . .	18,6	6,1	0,46	0,47
Amylalkohol.	16,0	5,4	0,44	0,43
Amylalkohol $\sim$ . . .		4,1	0,47	0,51
Allylalkohol.	21,6*	20,6	0,13	0,07

[1]) W. Nernst, Zeitschr. f. phys. Chem. 14, p. 622, 1894.
[2]) Thwing, Zeitschr. f. phys. Chem. 14, p. 286, 1894.

Substanz	ε_∞	ε	$\varkappa$ ber.	$\varkappa$ beob.
Glycerin.	56,2*	16,5	0,52	0,42
Glycerin $\sim$		19,1	0,50	0,50
*Glycerin $\sim$		36,4	0,32	0,27
Ameisensäure. . . .	62,0*	57,0	0,14	0,08
Essigsäure.	9,7	6,5	0,27	0,07
Propionsäure	3,22	3,15	0,04	0,03
Buttersäure(n). . . .	2,90	2,85	0,04	$<$ 0,02
Isovaleriansäure . .	2,64	2,60 [1]	0,03	$<$ 0,02
Milchsäure.	20,9*	19,2	0,14	0,25
Salicylaldehyd . . .	19,2*	17,9	0,12	0,06
Kreosol	11,7*	6?	0,36	0,28

Zum Theil ist die Uebereinstimmung zwischen berechnetem und beobachtetem $\varkappa$ recht gut. Erheblichere Abweichungen finden sich, abgesehen von der Essigsäure, zum Theil bei den Substanzen, deren ε_∞ den Angaben von Thwing entnommen sind. Diese Angaben sind aber oft mit Fehlern behaftet, andererseits enthalten aber auch die von mir erhaltenen Werthe von ε gerade bei den stark absorbirenden Substanzen naturgemäss merkliche Fehler. *Immerhin kann man aus der Tabelle das Resultat gewinnen, dass der Absorptionsindex $\varkappa$ aus ε_∞, ε und ε_0 entsprechend der hier dargelegten Theorie annähernd richtig berechnet werden kann.*

Eine Anwendung der Formeln (58), (59), (60) auf die homologe Reihe der Alkohole würde das Resultat geben, dass mit wachsendem Molekulargewicht ν abnimmt und ebenfalls σ_2', während ε_2 sich nicht wesentlich von ε_0 unterscheidet, d. h. also nahezu constant ist.

Es soll jetzt untersucht werden, ob sich bei ein und derselben Substanz die Abhängigkeit des Brechungsindex n von der Schwingungsdauer mit Hilfe der einfachsten Form der hier be-

1) Mittel aus der Condensator- und Wellenlängenmethode.

nutzten Theorie, d. h. mit der Annahme einer einzigen eingelagerten Molekülgattung, den Thatsachen entsprechend darstellt. Ich kann dazu Beobachtungen am Aethylalkohol und Glycerin verwenden, die von v. Lang[1]), Lampa[2]), Cole[3]), Thwing (l. c.) und mir (l. c.) gemacht worden sind.

Glycerin.

Es sind der Rechnung (Formeln (13^b)) die Constanten zu Grunde gelegt:

$$\varepsilon_\infty = 56\,, \quad \varepsilon_0 = 3{,}4\,, \quad a' = 121 : 3 \cdot 10^{10}\,.$$

ε_0 wurde grösser, als das Quadrat des optischen Brechungsexponenten gewählt, nämlich zu 3,4, weil Lampa für sehr schnelle Schwingungen den Werth $n^2 = 3{,}4$ fand. Die Constante a' ist vermöge der Formel (12) aus meiner bei $\lambda = 75$ cm gemachten Beobachtung $n^2 = 25{,}4$; $\varkappa = 0{,}5$; daher $\varepsilon = 19{,}1$ berechnet. λ bedeutet die Wellenlänge der elektrischen Schwingungen in Luft in cm gemessen. $\lambda = 1000$ cm entspricht etwa der von Thwing angewandten Schwingungszahl.

λ	n^2 ber.	n^2 beob.	$\varkappa$ ber.	$\varkappa$ beob.	Beobachter
1000 cm	55,5	56,2	0,05	—	Thwing
200 »	44,7	39,1	0,26	0,27	Drude
75 »	23,6	25,4	0,50	0,50	Drude
8,5»	4,4	14,1	0,44	—	v. Lang
0,8»	3,4	3,4	0,05	—	Lampa

Eine wesentliche Differenz besteht nur für die Wellenlänge $\lambda = 8{,}5$ cm; die Beobachtungen für diese Wellenlänge hat v. Lang angestellt. Dieselben waren aber, wie der Verfasser selbst angiebt, schwierig, sie mussten (wahrscheinlich wegen der starken Absorption) unter Umständen angestellt werden,

[1]) V. v. Lang, Wien. Ber. II, **105**, April 1896.
[2]) A. Lampa, Wien. Ber. II, **105**, Juli 1896.
[3]) A. D. Cole, Wiedem. Ann. **57**, p. 290, 1896.

welche die Genauigkeit der Messung gefährden. Auch ist nach jener Methode vielleicht der störende Einfluss von Interferenzen nicht ausgeschlossen. Wenn aber die Differenz von n^2 ber. = 4,4 gegen n^2 beob. = 14,1 durch Beobachtungsfehler nicht zu erklären ist, so würde das beweisen, dass man mit der Annahme *einer* absorbirenden Molekülgattung im Bereiche von $\lambda = 1000$ cm bis $\lambda = 0{,}8$ cm nicht mehr auskommt. Die Differenz des $\varepsilon_0 = 3{,}4$ gegen das Quadrat des optischen Brechungsindex würde auf Absorption im Ultrarothen hinweisen (cf. weiter unten Formel (66)). Man könnte auch durch die Annahme zweier absorbirender Molekülgattungen, von denen die eine ein Absorptionsmaximum vor $\lambda = 8{,}5$ cm, die anderen hinter $\lambda = 8{,}5$ cm besitzen, die bisherigen Beobachtungen befriedigend darstellen und dann den Anschluss an das optische $\varepsilon_0 = 2$ gewinnen.

Nach den der Tabelle zu Grunde gelegten Constanten würde

für $\lambda = 121$ cm $n^2\varkappa$ sein Maximum $n^2\varkappa_{Max} = 13{,}1$
» $\lambda = 75$ » $n\varkappa$ » » $n\varkappa_{Max} = 2{,}4$
» $\lambda = 30$ » $\varkappa$ » » $\varkappa_{Max} = 0{,}60$

annehmen. Für $\lambda = 121$ cm müsste ε gleich dem arithmetischen Mittel von ε_0 und ε_∞ sein, d. h. $\varepsilon = 29{,}7$.

Aethylalkohol.

Es sind der Rechnung die Constanten zu Grunde gelegt:

$$\varepsilon_\infty = 26\,, \quad \varepsilon_0 = 6{,}8\,, \quad a' = 47 : 3 \cdot 10^{10}\,.$$

a' ist gewonnen aus der Formel (12) mit Benutzung meiner bei $\lambda = 75$ cm gemachten Beobachtung $n^2 = 23{,}0$; $\varkappa = 0{,}21$; $\varepsilon = 22{,}0$. Der grosse Werth $\varepsilon_0 = 6{,}8$ ist gewählt, um Anschluss an die Lampa'sche Beobachtung von n^2 bei sehr kleinem λ zu gewinnen.

λ	n^2 ber.	n^2 beob.	$\varkappa$ ber.	$\varkappa$ beob.	Beobachter
1000 cm	26,0	24,8	0,02	—	Thwing
200 »	25,1	24,4	0,08	—	Drude
75 »	21,4	23,0	0,20	0,21	Drude
5 »	7.2	10,2	0,14	—	Cole
0,8»	6,8	6,8	0,02	—	Lampa

Am meisten fällt die Beobachtung von COLE aus der Berechnung. Aber auch bei $\lambda = 75$ cm kann die Differenz von $n^2 = 21{,}4$ gegen $n^2 = 23{,}0$ nicht durch Beobachtungsfehler völlig hervorgerufen sein, da dort die Beobachtungen ziemlich genau sind. Auf das Resultat hat der hier gewählte grosse Werth $\varepsilon_0 = 6{,}8$ Einfluss. Daher würde sich die ganze Tabelle ändern, wenn der LAMPA'sche Werth falsch sein sollte und ε_0 dementsprechend anders gewählt würde. Auch durch kleine Aenderung in Wahl der Constanten a' kann ein besserer Anschluss zwischen n^2 ber. und n^2 beob. hergestellt werden, z. B. recht gut durch $a' = 41 : 3 \cdot 10^{10}$.

Wegen der starken Abweichung des ε_0 vom Quadrat des optischen Brechungsindex muss mindestens noch eine absorbirende Molekülgattung (z. B. im Ultraroth) vorhanden sein. Man würde natürlich einen sehr viel besseren Anschluss an die Beobachtungen erzielen können, wenn man von vornherein der Rechnung zwei verschiedene Gattungen leitender Moleküle zu Grunde legte.

Nach den der Tabelle zu Grunde gelegten Constanten würde

für	$\lambda = 47$ cm	$n^2 \varkappa$	sein Maximum	$n^2 \varkappa_{Max} = 4{,}8$
»	$\lambda = 35$ »	$n\varkappa$	»	»	$n\varkappa_{Max} = 1{,}2$
»	$\lambda = 24$ »	$\varkappa$	»	»	$\varkappa_{Max} = 0{,}32$

annehmen. Für $\lambda = 47$ cm müsste ε gleich dem arithmetischen Mittel von ε_0 und ε_∞ sein, d. h. $\varepsilon = 16{,}4$.

Beim Amylalkohol und der Essigsäure habe ich n^2 bei zwei verschiedenen λ beobachtet, nämlich bei $\lambda = 75$ cm und $\lambda = 200$ cm. Da ε_∞ bekannt ist, so kann man die eine Beobachtung aus der anderen berechnen, falls man ε_0 kennt. Wählt man für ε_0 den Werth 2 (die Resultate werden nur wenig durch geringe Abweichungen hiervon beeinflusst), so erhält man folgende Tabelle:

	ε_∞	ε ($\lambda = 75$ cm)	ε ber. ($\lambda = 200$)	n^2 beob. ($\lambda = 200$)
Amylalkohol	16,0	4,7	10,8	10,8
Essigsäure	9,7	6,3	9,0	7,1

Wegen der bei $\lambda = 200$ cm geringen Absorption müssen ε ber. mit n^2 beob. nahezu identisch sein. Dies stimmt beim Amylalkohol sehr gut, während Essigsäure, gerade wie oben p. 572 bei Prüfung der Formel (9) sich der Theorie schlecht fügt.

Zum Schluss möchte ich hervorheben, dass die bisher vorliegenden Beobachtungen noch nicht ausreichen, um eine den Thatsachen völlig entsprechende Dispersionsformel für ε, n^2 und $\varkappa$ auch für das Gebiet der elektrischen Schwingungen definitiv aufzustellen. Es sollte aber auch im Vorigen wesentlich nur gezeigt werden, zu welchen Consequenzen man gelangt, wenn man die einfachste der hier möglichen Vorstellungen, nämlich die Annahme *einer* leitenden Molekülgattung, verfolgt, dass man dann schon in gewissem Grade die bisher vorliegenden Beobachtungen annähernd darstellen kann, und dass man dadurch gewisse Perspectiven auch für die elektrische anomale Absorption und Dispersion anderer Körper erhält, bei denen diese bisher nicht mit Sicherheit nachgewiesen oder mindestens nicht gemessen worden sind, wie z. B. beim Wasser.

Bei Annahme mehrerer Molekülgattungen, die zum Theil auch gedämpfte Eigenschwingungen besitzen, stellt sich die ganze Dispersionsformel inclusive des optischen Gebietes in der Form dar:

$$(64) \qquad n^2(1-i\varkappa)^2 = \varepsilon_0 + \sum \frac{\varepsilon'}{1+i\frac{a'}{T}} + \sum \frac{\varepsilon''}{1+i\frac{a''}{T}-\frac{b''}{T^2}}.$$

Wenn nur eine Gattung der ε' vorhanden ist und das zugehörige a' weit grösser als die a'', b'' ist, so ist das die Form der hier speciell verfolgten Theorie, wenn man gleichzeitig die optische Dispersion mit umfassen will. Es ist dann für langsame Wechselströme

$$(62) \qquad (T=\infty): \; n_\infty^2 = \varepsilon_0 + \varepsilon' + \sum \varepsilon''.$$

Für äusserst schnelle elektrische Schwingungen, die den Uebergang zum Gebiete der Wärme- bezw. Licht-Wellen bilden, ist

$$(63) \qquad n'^2 = \varepsilon_0 + \sum \varepsilon''.$$

n'^2 tritt dann an Stelle der in den früheren Ausführungen mit

ε_0 bezeichneten Grösse. Es bleibt also die frühere Beziehung (cf. oben p. 552 Formel (4')

$$\varepsilon' = \varepsilon_\infty - \varepsilon_0 = n_\infty^2 - n'^2 \tag{64}$$

auch hier bestehen.

Falls T direct Null wird, so ist nach (64) $n_0^2 = \varepsilon_0$. Dieses ε_0 wird nach einigen Dispersionstheorieen gleich 1 gesetzt, was die Versuche mit Röntgenstrahlen verificiren würden, falls diese wirklich Schwingungen äusserst kleiner Periode T sind.

Der optische Brechungsexponent, d. h. genauer genommen die Grösse B in der optischen Dispersionsformel:

$$n^2 = -AT^2 + B + \frac{C}{T^2} + \frac{D}{T^4},$$

folgt[1]) aus (64) zu:

$$B = \varepsilon_0 + \sum \varepsilon_v'',$$

wobei ε_v'' sich auf die Molekülgattungen bezieht, deren Eigenschwingungen im Ultraviolett liegen. Es ist daher nach (63) und (65), da $\sum \varepsilon'' = \sum \varepsilon_v'' + \sum \varepsilon_r''$ ist, die Differenz von n'^2 gegen den optischen Brechungsexponenten B:

$$n'^2 - B = \sum \varepsilon_r'', \tag{66}$$

wobei ε_r'' sich auf die Molekülgattungen bezieht, deren Eigenschwingungen im Ultraroth liegen (vgl. oben p. 574). Die Formel (66) bleibt bestehen, auch wenn die Annahme mehrerer Molekülgattungen ε' zur Darstellung der elektrischen Anomalie gemacht wird.

Sobald normale elektrische Dispersion des n^2 auftritt, d. h. ein Wachsen von n^2 mit abnehmendem T, so reicht die Formel (64) zur Darstellung nicht aus; normale elektrische Dispersion kann man erhalten, wenn auch die auf die elektrische Dispersion sich beziehenden Glieder der Formel (64) die Form der optischen Glieder haben, d. h. falls langsame Eigenschwingungen der Molekülе vorhanden sind.

Leipzig, November 1897.

---

[1]) Vgl. mein Buch »Physik des Aethers«, p. 532.

SITZUNG VOM 6. DECEMBER 1897.

Vorträge hielten:

1. Herr **W. Scheibner**, o. M.: Ueber die formale Bedeutung des Hamilton'schen Princips und das Weber'sche Gesetz.
2. Herr **Fr. Engel**, a. o. M.: Die Zerlegung einer ganzen Function einer Veränderlichen in Factoren ohne vielfache Wurzeln.
3. Herr C. Neumann, o. M.: Vorlegung einer Note von Prof. **Lange** in Berlin: Ein elementarer Beweis des Reciprocitätsgesetzes.
4. Herr **C. Neumann**, o. M.: Das Hamilton'sche Princip in der Hydrodynamik.
5. Herr S. Lie, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von **W. Ahrens** in Magdeburg: Ueber eine besondere Classe von Substitutionsgruppen.
6. Herr **K. Rohn**, o. M.: Ueber den Zusammenhang der von Flächen beliebiger Ordnung auf einer Raumcurve ausgeschnittenen Punktgruppen mit denen ihrer Restcurven.
7. Herr **K. Rohn**, o. M.: Die Curven auf den Flächen 4ter Ordnung.
8. Herr H. Bruns, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von Dr. **Hartmann**: Untersuchung des Ganges einer Fraunhofer'schen Pendeluhr.
9. Herr **S. Lie**, o. M.: Liniengeometrie und Berührungstransformationen.

W. Scheibner, *Ueber die formale Bedeutung des Hamilton'schen Princips und das Weber'sche Gesetz.*

1.

In seiner Gratulationsschrift *über die Principien der Elektrodynamik* (Tübingen 1868)[1] benutzt Herr C. Neumann das Verschwinden der sogenannten *inneren* Variation δu des Hamilton'schen Integrals $u = \int (T + U)\, dt$ zur Ableitung der mechanischen Differentialgleichungen und untersucht den Werth der Kräftefunction $U = \frac{m m_1}{r_0}$, welcher zu dem Weber'schen elektrodynamischen Fundamentalgesetze führt. In der Schlömilch'schen Zeitschrift des Jahres 1868[2] habe ich bei Gelegenheit einer

1) Wieder abgedruckt *Math. Annalen* Bd. 17 (1880), vergl. auch die *Göttinger Nachrichten* vom Juni 1868, Bd. 1, S. 317 der *Annalen* (1869), sowie das 8. Capitel des Neumann'schen Werkes *über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen*, Leipzig 1896.

2) S. 39 der »*Literaturzeitung*«.

Besprechung der Neumann'schen Abhandlung betont: »Voraus»gesetzt wird dabei, dass man nur solche Variationen der Coordi»naten berücksichtigt, welche nebst ihren verschiedenen Differen»tialquotienten an den Integrationsgrenzen verschwinden. Auf »die Bedeutung dieser Voraussetzung braucht man zunächst nicht »weiter einzugehen, da sie, wie aus dem Folgenden erhellt, nur »einen *formalen* Sinn hat. Es sollen einfach bei der Bildung der »Variation des Integrals diejenigen Glieder, die mit den an den »Grenzen stattfindenden Werthen der Variationen und ihrer »Differentialquotienten multiplicirt sind, ausser Rechnung »bleiben.«

Es mag mit Herrn Weierstrass daran erinnert werden, dass wenn eine Function $ft = \delta x$ nebst sämmtlichen Differentialquotienten $\delta x' \delta x''..$ für $t = t_0$ verschwinden soll, für $t = t_0 + h$

$$ft = \delta x_0 + h\delta x_0' + \tfrac{1}{2}h^2 \delta x_0'' + \cdot\cdot$$

identisch Null sein würde. Im Ausdrucke der dem Weber'schen Gesetze nach C. Neumann zu Grunde liegenden Kräftefunction treten in der That die sämmtlichen Differentialquotienten der Coordinaten auf. Dass für gewisse Werthe von t_0 die Taylor'sche Entwickelung von δx unzulässig werden kann, ist eben so selbstverständlich, wie dass die Bedeutung der Variation δx sich nicht auf solche singuläre Fälle beschränkt.

2.

Wichtiger erscheint die weitere Bemerkung, dass die Kräftefunction

$$U = F(xx'x''..\ yy'y''..\ zz'z''...)$$

durch die isoperimetrischen Differentialgleichungen nicht völlig bestimmt ist, sondern um ein Increment V, für welches

$$\int V dt = \Phi(xx'x''..\ yy'y''..\ zz'z''..)$$

geändert werden kann[1]). Denn es ist einleuchtend, dass unter den gemachten Voraussetzungen die Variation $\delta\Phi$ an den Integrationsgrenzen verschwindet, und die Function V kann beliebig

---

1) Neumann nennt dieses Increment das *ineffective Potential*, Annalen Bd. 17, S. 405, und Prof. Mayer hebt hervor, dass die Function Φ auch die Zeit t explicite enthalten darf. Vergl. dessen Abhandlung *Ueber den allgemeinsten Ausdruck der inneren Potentialkräfte eines Systems bewegter materieller Punkte* in den Berichten der Sächs. Ges. 1877, S. 88.

gewählt werden, sobald nur Vdt ein vollständiges Differential wird. Als Beispiel mag die folgende Annahme dienen.

Herr Neumann hat a. a. O. die Kräftefunction $U = \frac{mm_1}{r_0}$ gesetzt, wo r_0 den Abstand der anziehenden Massenpunkte m und m_1 zur Zeit t_0 bezeichnet, die der Zeit t jedesmal um dasjenige Zeitintervall $t - t_0$ vorhergeht, welches erforderlich ist, um die Entfernung $r = ft$ mit einer durch die Constante c gegebenen Geschwindigkeit zurückzulegen. Alsdann führt die Anwendung des Hamilton'schen Princips auf das Weber'sche Fundamentalgesetz der Elektrodynamik, wenigstens wenn man die durch c^3 dividirten Glieder weglässt. Man könnte nun versucht sein, die Neumann'sche Annahme, nach welcher das Potential $\frac{mm_1}{r_0}$ erst nach Ablauf der Zeit $t - t_0 = \frac{r}{c}$ zur Wirksamkeit gelangen soll, dahin zu modificiren, dass

$$t - t_0 = \frac{r_0}{c}$$

gesetzt würde[1]). Unter dieser Voraussetzung erhält man mittelst

$$r_0 = f(t - \tfrac{r_0}{c}) = r - \frac{r_0 r'}{c} + \tfrac{1}{2}\frac{r_0^2 r''}{c^2} - \tfrac{1}{6}\frac{r_0^3 r'''}{c^3} \pm \cdots$$

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{r} + \frac{r'}{cr} - \frac{r''}{2c^2} + \frac{3r'r'' + rr'''}{6c^3} - \frac{12r'^2r'' + 6rr''^2 + 8rr'r''' + r^2r^{IV}}{24c^4} \pm \cdots,$$

also mit Vernachlässigung der durch c^5 dividirten Glieder:

$$U = \frac{mm_1}{r_0}$$

$$= \frac{mm_1}{r} + \frac{mm_1}{c}\frac{d}{dt}\left\{\lg r - \frac{r'}{2c} + \frac{r'r' + rr''}{6c^2} - \frac{2r'^3 + 6rr'r'' + r^2r'''}{24c^3}\right\}.$$

3.

Es ergibt sich hieraus, dass unter der gedachten Annahme die Kraftwirkung die nämliche wird, wie beim Newton'schen Attractionsgesetze. Diess bestätigt die directe Rechnung ohne

---

1) Wollte man unter r_0 die Distanz der anziehenden Masse zur Zeit t_0 und der angezogenen Masse zur Zeit t verstehen, so würde das Princip der Gleichheit von Action und Reaction nicht mehr gewahrt bleiben.

Schwierigkeit, und man erhält den immerhin bemerkenswerthen Satz, dass für

$$x = ft, \quad y = f(t + \frac{h}{y})$$

der Ausdruck

$$(y - x)\, dt = h\, dv$$

ein vollständiges Differential darstellt, mit anderen Worten, dass

$$v = \varphi(x\, x'\, x''\, x''' \ldots)$$

eine Function von x und seinen Differentialquotienten bedeutet, welche die unabhängige Variable t nicht explicite enthält.

Setzt man dagegen mit Neumann

$$t - t_0 = \frac{r}{c},$$

so wird

$$r_0 = f(t - \frac{r}{c}) = r - \frac{r r'}{c} + \tfrac{1}{2}\frac{r^2 r''}{c^2} - \tfrac{1}{6}\frac{r^3 r'''}{c^3} \pm \cdots$$

$$U = \frac{m m_1}{r_0} = \frac{m m_1}{r}\left\{1 + \frac{r'}{c} + \frac{2r'r' - rr''}{2c^2} + \frac{6r'^3 - 6rr'r'' + r^2 r'''}{6c^3} \cdots\right\}$$

$$= \frac{m m_1}{r}\left\{1 + \frac{r'r'}{c^2} + \frac{r'^3}{c^3} \cdots\right\} + \frac{m m_1}{c}\frac{d}{dt}\left\{\lg r - \frac{r'}{2c} - \frac{7r'r' - 2rr''}{12c^2} \cdots\right\}.$$

Der erste Theil dieses Ausdrucks

$$\frac{m m_1}{r}\left\{1 + \frac{r'r'}{c^2} + \frac{r'^3}{c^3} \cdots\right\}$$

ist von Neumann als *effectives Potential* bezeichnet worden.

Wenn U nur von r und seinen Differentialquotienten abhängt, so muss, damit die innere Variation des Hamilton'schen Integrals verschwinde, die isoperimetrische Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'} = \left\{\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial r'} + \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial U}{\partial r''} \mp \cdots\right\}\frac{\partial r}{\partial x}$$

erfüllt sein. In der Schlömilch'schen Zeitschrift ist a. a. O. die Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial r'} + \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial U}{\partial r''} \mp \cdots = \frac{dW}{dr}$$

abgeleitet worden, wobei das Integral

$$T = W + h$$

an die Stelle des Satzes von der lebendigen Kraft tritt. Man erhält damit die etwas verallgemeinerte Form des Weber'schen Gesetzes

$$mx'' = \frac{dW}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{mm_1}{r^2}\left\{1 - \frac{r'r' - 2rr''}{cc} - \frac{2r'^3 - 6rr'r''}{c^3} \cdots\right\}\frac{\partial r}{\partial x},$$

während das zugehörige *Weber'sche Potential*[1])

$$W = \frac{mm_1}{r}\left\{1 - \frac{r'r'}{cc} - \frac{2r'^2}{c^2} \cdots\right\}$$

gefunden wird.

Die in der Richtung der Entfernung r wirkende bewegende Kraft kann folglich auch durch

$$R = -\frac{T'}{r'} = -\frac{dW}{dr}$$

dargestellt werden, so oft die Kräftefunction nur von r und seinen Differentialquotienten abhängt. Das Hamilton'sche Integral selbst aber nimmt den Werth an

$$u = \int (T + U)\,dt = \int (U + W + h)\,dt$$

oder

$$u' = 2\frac{mm_1}{r}\left(1 - \frac{r'^2}{2c^2} \cdots\right) + h,$$

letzteres falls der ineffective Theil der Kräftefunction vernachlässigt wird. Derselbe würde das Increment

$$\int V dt = \frac{mm_1}{c}\left\{\lg r - \frac{r'}{c} - \frac{7r'r' - 2rr''}{12c^2} \cdots\right\}$$

zu u hinzufügen.

Uebrigens darf ich ausdrücklich aussprechen, dass die vorstehenden Entwickelungen mit den eigenen Resultaten von Herrn C. Neumann in völligem Einklange stehen.

4.

Der Einfluss, welchen die Einführung des Weber'schen Gesetzes an Stelle des Newton'schen auf die Planetenbewegung ausüben würde[2]), ist im Laufe der Jahre von Mathematikern und

---

1) *Poggendorff's Annalen*, Bd. 73, S. 229 (1848), sowie Beer, *Elektrostatik* S. 250.

2) Für die gegenseitige Wirkung zweier elektrischer Massen hat Wilh. Weber in Verbindung mit Kohlrausch den numerischen Werth der Constante

Astronomen mehrfach untersucht worden. Es sei mir verstattet, bei dieser Gelegenheit die elementare Rechnung zu reproduciren, deren Resultate ich vor 28 Jahren der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften mitgetheilt hatte, und auf welche später von F. Zöllner und W. Weber öffentlich Bezug genommen worden ist[1]). Wenn ich dabei zur Ableitung der zu Grunde liegenden Störungsformeln einen umständlicheren Weg einschlage, als die vorliegende Aufgabe erfordert, so geschieht diess, weil die befolgte Methode sich vielleicht in manchen Fällen mit Vortheil zur Anwendung eignen dürfte.

Die Differentialgleichungen

$$m x'' = \frac{x - x_1}{r} \cdot \frac{dW}{dr}, \qquad m_1 x_1'' = \frac{x_1 - x}{r} \cdot \frac{dW}{dr}$$
$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

liefern für

$$M = m + m_1, \qquad MX = mx + m_1 x_1 \quad \ldots$$

oder

$$x = X + \frac{m_1 (x - x_1)}{M}, \qquad x_1 = X - \frac{m (x - x_1)}{M} \ldots$$

$$MX'' = 0, \qquad x'' - x_1'' = \frac{M}{m m_1} \cdot \frac{dW}{dr} \cdot \frac{x - x_1}{r}$$
$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

Es bleibt also die Trägheitsbewegung des Schwerpunkts (XYZ) neben dem Flächensatze bestehen, so dass die relative Bewegung

---

$$c = 439450 \frac{\text{Kilometer}}{\text{Secunde}}$$

gefunden (*Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass*, im 5. Bande der Abhandlungen der Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch.). Er sagt das. S. 265: »Es ergiebt sich ferner aus dem gefundenen grossen Werthe der *Constanten* »*c* die interessante Folgerung, dass auch der *Gravitationskraft ponderabler* »*Körper* ein solcher dynamischer Theil beigefügt werden könnte (wodurch »eine grössere Analogie zwischen den Wechselwirkungen *ponderabler* und »*imponderabler* Körper hergestellt würde), ohne dass dieser dynamische »Theil der Kraft den geringsten merklichen Einfluss auf die Bewegungen »der Weltkörper äussern würde.«

4) Zöllner, *Ueber die Natur der Cometen* (1874), S. XC u. 334, so wie *Principien einer elektrodynamischen Theorie der Materie* (1876), S. XI, und W. Weber's Werke, Bd. IV, S. 428. Der Vortrag *über die allgemeine Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes* wurde laut den Acten der Gesellschaft am 6. Febr. 1869 gehalten.

von m um m_1 in der invariabeln Ebene erfolgt. Wir machen diese zur xy-Ebene und setzen

$$x - x_1 = r\cos v\,, \qquad y - y_1 = r\sin v\,,$$

also

$$(x' - x_1')^2 + (y' - y_1')^2 = r'r' + r^2v'^2 = s's'\,.$$

Die Integralgleichung der lebendigen Kraft gibt

$$T = \tfrac{1}{2}MC^2 + \frac{mm_1}{2M}s's' = W + h\,,$$

wenn C die constante Geschwindigkeit des Schwerpunkts und s' die Geschwindigkeit der relativen Bewegung bezeichnet. Wir schreiben dafür

$$\tfrac{1}{2}s's' = \tfrac{1}{2}(r'^2 + r^2v'^2) = \frac{\mu}{r}\left(1 - \frac{r'r'}{cc} - \frac{2r'^2}{c^3}\cdot\cdot\right) - \frac{\mu}{2a}\,,$$

wo $\mu = k^2M$ unter Hinzufügung der Gauss'schen Constante k gesetzt und a an Stelle der Integrationsconstante

$$h = \tfrac{1}{2}MC^2 - \frac{mm_1k^2}{2a}$$

getreten ist.

Da ferner vermöge des Flächensatzes

$$(x - x_1)(y' - y_1') - (y - y_1)(x' - x_1') = r^2v' = \sqrt{\mu p}\,,$$

so erhält man durch Einführung der Integrationsconstanten a und p

$$\left(1 + \frac{2\mu}{c^2r} + \frac{4\mu r'}{c^3r}\cdot\cdot\right)r'r' = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{p}{r^2}\right) = \varrho\varrho\,,$$

wo die Bedeutung von ϱ von selbst erhellt.

. . . . . .

5.

Wir wollen jetzt den Grössen a und p noch kleine constante Incremente

$$\Delta a = \frac{\mu\alpha}{c^2} \qquad \text{und} \qquad \Delta p = \frac{\mu\beta}{c^2}$$

hinzufügen, was wegen der Willkürlichkeit der beiden Integrationsconstanten offenbar gestattet ist. Mit Vernachlässigung der durch c^3 dividirten Terme werden alsdann die noch zu integrirenden Gleichungen

$$r'\left(1+\frac{\mu}{c^2 r}\right)=\sqrt{\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a+\Delta a}-\frac{p+\Delta p}{r^2}\right)}$$
$$=\varrho\left(1+\frac{\mu\,\Delta a}{2a^2\varrho^2}-\frac{\mu\,\Delta p}{2r^2\varrho^2}\right)$$

und

$$r^2 v'=\sqrt{\mu(p+\Delta p)}=\sqrt{\mu p}\left(1+\frac{\Delta p}{2p}\right)$$

oder

$$\varrho=r'\left\{1+\frac{\mu}{c^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{\mu\alpha}{2a^2\varrho^2}+\frac{\mu\beta}{2r^2\varrho^2}\right)\right\} \tag{1}$$

und

$$v'=\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}\left(1+\frac{\mu\beta}{2c^2 p}\right). \tag{2}$$

Wir setzen hier

$$p=a(1-e^2),\qquad \mu=a^3n^2 \tag{3}$$

und führen neben den beiden dadurch definirten Constanten e und n zwei neue Variable ε und f ein, welche durch die Gleichungen

$$r=a(1-e\cos\varepsilon)=\frac{p}{1+e\cos f}$$

oder

$$r\cos f=a(\cos\varepsilon-e),\quad r\sin f=a\sqrt{1-e^2}\sin\varepsilon \tag{4}$$
$$\sqrt{1+e}\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon=\sqrt{1-e}\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}f$$

bestimmt werden sollen. Aus der Theorie der elliptischen Bewegung ist bekannt, dass a die halbe grosse Axe, p den halben Parameter, e die Excentricität, n die mittlere Bewegung, f die wahre und ε die excentrische Anomalie in der Ellipse bedeuten.

Mit Hülfe dieser Grössen erhält man

$$r'=ae\varepsilon'\sin\varepsilon=\frac{r^2}{p}ef'\sin f$$
$$\varrho=\frac{a^2n}{r}e\sin\varepsilon=\sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin f \tag{5}$$

und durch Substitution in (1)

$$\varrho=\frac{a^2n}{r}e\sin\varepsilon=ae\varepsilon'\sin\varepsilon\left\{1+\frac{\mu}{c^2a}\left(\frac{a}{r}-\frac{\mu\alpha}{2a\varrho^2}+\frac{\mu a\beta}{2r^2\varrho^2}\right)\right\}$$

nebst

$$\varrho=\sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin f=\frac{r^2e}{p}f'\sin f\left\{1+\frac{\mu}{c^2p}\left(\frac{p}{r}-\frac{\mu p\alpha}{2a^2\varrho^2}+\frac{\mu p\beta}{2r^2\varrho^2}\right)\right\}.$$

Diese Gleichungen ergeben

$$ndt = \left\{\frac{r}{a} + \frac{\mu}{c^2 a}\left(1 - \frac{\mu r \alpha}{2a^2\varrho^2} + \frac{\mu\beta}{2r\varrho^2}\right)\right\} d\varepsilon$$

und

$$\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}\left(1 + \frac{\mu\beta}{2c^2 p}\right) dt = dv = \left\{1 + \frac{\mu}{c^2 p}\left(\frac{p}{r} - \frac{\mu p \alpha}{2a^2\varrho^2} + \frac{\mu p \beta}{2r^2\varrho^2} + \frac{\beta}{2}\right)\right\} df.$$

Drückt man die rechten Seiten dieser Differentialformeln durch ε und resp. f aus, so folgt

$$(6) \quad ndt = d\varepsilon\left\{1 - e\cos\varepsilon + \frac{\mu}{c^2 a}\left(1 - (1 - e\cos\varepsilon)\frac{(1 - e\cos\varepsilon)^2\alpha - \beta}{2e^2\sin^2\varepsilon}\right)\right\}$$

$$(7) \quad dv = df\left\{1 + \frac{\mu}{c^2 p}\left(1 + e\cos f - \frac{(1-e^2)^2\alpha - (1 + e\cos f)^2\beta}{2e^2\sin^2 f} + \frac{1}{2}\beta\right)\right\}.$$

Wollte man in W das Glied $-\frac{2\mu r'^2}{c^2 r}$ beibehalten, so würde auf der rechten Seite in (1) das Glied $r'\frac{2\mu\varrho}{c^2 r}$, mithin

in (6) $$d\varepsilon \frac{2\mu a n e \sin\varepsilon}{c^2 r} = \frac{2\mu n}{c^2 r} dr,$$

in (7) $$df \frac{2\mu a n e \sin f}{c^2 r\sqrt{1-e^2}} = \frac{2\mu a^2 n\sqrt{1-e^2}}{c^2 r^2} dr$$

hinzutreten.

6.

Der Integration der Gleichungen (6) und (7) stehen keine Schwierigkeiten im Wege. Wählt man als neue Integrationsconstanten ϖ und τ die Werthe von v und t im Perihel, für welche ε und f verschwinden, und setzt die mittlere Anomalie

$$(8) \quad g = n(t - \tau) = l - \varpi,$$

wo demnach l die mittlere Länge, ϖ die Länge des Perihels und τ die Perihelzeit bedeuten, so ergibt sich

$$g = \varepsilon - e\sin\varepsilon + \frac{\mu}{c^2 a}(\varepsilon - A\alpha - B\beta)$$

$$v - \varpi = f + \frac{\mu}{c^2 p}(f + e\sin f - A_1\alpha - B_1\beta).$$

Um $AB\,A_1B_1$ als Functionen von ε und f zu bestimmen, *welche im Perihel verschwinden*, müssen die durch $\sin^2\varepsilon$ resp. $\sin^2 f$ dividirten Glieder wegfallen. Diess erreicht man für

$$\beta = (1 - e)^2\alpha$$

und erhält

$$A\alpha + B\beta = \frac{\alpha}{2e}\int_0^\varepsilon \frac{(1-e)(1-e\cos\varepsilon)+(1-e\cos\varepsilon)^2}{1+\cos\varepsilon}\,d\varepsilon$$

$$= \frac{\alpha}{2e}\int_0^\varepsilon \left\{\frac{2(1+e)}{1+\cos\varepsilon} - 3e + e^2\cos\varepsilon\right\} d\varepsilon$$

$$= -\tfrac{3}{2}\alpha\varepsilon + \tfrac{1}{2}\alpha e\sin\varepsilon + \alpha\frac{1+e}{e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon$$

$$A_1\alpha + B_1\beta = \frac{(1-e)^2}{e}\alpha\int_0^f \frac{df}{1+\cos f} = \alpha\frac{(1-e)^2}{e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}f.$$

Damit wird

$$g = l - \varpi = \varepsilon - e\sin\varepsilon + \frac{\mu}{c^2 a}\left\{\varepsilon + \tfrac{3}{2}\alpha\varepsilon - \tfrac{1}{2}\alpha e\sin\varepsilon - \alpha\frac{1+e}{e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon\right\}$$

und

$$v - \varpi = f + \frac{\mu}{c^2 p}\left\{f + e\sin f - \alpha\frac{(1-e)^2}{e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}f\right\}.$$

Für $\alpha = \beta = 0$ ergibt sich einfach

$$\left.\begin{aligned} g &= \varepsilon - e\sin\varepsilon + \frac{\mu\varepsilon}{c^2 a} \\ v &= f + \varpi + \frac{\mu}{c^2 p}(f + e\sin f). \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Es könnte aber wünschenswerth sein, das Säcularglied

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2 a} = \frac{\mu}{c^2 a}(g + e\sin\varepsilon)$$

aus g zu entfernen, weil dasselbe einer Aenderung von n um $\frac{\mu n}{c^2 a}$ entspricht, und bei der Ermittelung des Werthes der mittleren Bewegung n aus den Beobachtungen dieses constante Increment von selbst mit eingeht. Der Wegfall des Säculargliedes lässt sich erreichen, wenn man

$$\alpha = -\tfrac{2}{3}$$

einführt. Alsdann erhält man

$$\left.\begin{aligned} g = n(t-\tau) &= \varepsilon - e\sin\varepsilon + \frac{\mu}{3c^2 a}\left\{e\sin\varepsilon + 2\frac{1+e}{e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon\right\} \\ v &= f + \varpi + \frac{\mu}{c^2 p}\left\{f + e\sin f + \tfrac{2}{3}\frac{(1-e)^2}{e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}f\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Zu diesen Werthen würden eventuell die Glieder dritter Ordnung

$$\frac{2\mu n}{c^3} \lg \frac{r}{a(1-e)} \quad \text{und resp.} \quad \frac{\mu n \sqrt{1-e^2}}{c^3} \left(\frac{1}{(1-e)^2} - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

hinzutreten. Die Gleichungen (9) oder (10) reichen in Verbindung mit (1) (2) (4) aus, um die Polarcoordinaten r und v und ihre Differentialquotienten als Functionen von t zu bestimmen. Wir werden der Kürze halber bei der folgenden Rechnung uns auf die Form des Weber'schen Gesetzes beschränken und die durch c^3 dividirten Glieder weglassen.

7.

Die Differentialgleichungen unseres Problems können wir in der Form schreiben

$$rv'' + 2r'v' = 0$$

und

$$\left(1 + \frac{2\mu}{c^2 r}\right) r'' + \frac{\mu}{r^2}\left(1 - \frac{r'^2}{c^2}\right) = rv'^2.$$

Diese Gleichungen werden, unter Vernachlässigung von $\frac{1}{c^4}$, ebenso durch die Gleichungen (9), wie durch die Gleichungen (10) — selbstverständlich in Verbindung mit (3) und (4) — erfüllt, es sind mithin beides gleichberechtigte Formen der vollständigen Integralgleichungen mit den vier unabhängigen Constanten $a\ e\ \varpi$ und τ. Ihre Verschiedenheit kann mithin nur darin begründet sein, dass die Integrationsconstanten in beiden Fällen verschiedene Werthe haben. Man sieht leicht ein, dass der Uebergang von (9) zu (10) durch Hinzufügung der Incremente

$$\Delta a = -\frac{2\mu}{3c^2}, \quad \Delta e = -\frac{2\mu}{3c^2 a}(1-e), \quad \Delta\varpi = \Delta\tau = 0$$

vermittelt wird, wenn man berücksichtigt, dass damit nicht allein

$$\Delta n = \frac{\mu n}{c^2 a} \quad \text{und} \quad \Delta p = -\frac{2\mu}{3c^2}(1-e)^2$$

folgen, sondern auch

$$\Delta f = \frac{2\mu}{3c^2 ae} \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} f, \quad \Delta\varepsilon = \frac{2\mu}{3c^2 ae} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

und

$$\Delta g = \frac{\mu}{c^2 a} g$$

zu setzen sind, weil die Anomalieen f, ε, g von den constanten Elementen und deren Incrementen abhängen, während die Werthe von r, v und t ungeändert bleiben.

Die Form (10) hat das Eigenthümliche, dass infolge der Beseitigung des Säculargliedes bei der mittleren Anomalie, die Berechnung von g und v in der Nähe des Aphels illusorisch wird, weil daselbst $\operatorname{tg}\frac{1}{2}f$ und $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon$ nebst Δf und $\Delta\varepsilon$ über alle Grenzen wachsen, also schliesslich die Grösse des Divisors c^2 compensiren. Dann ist aber die Vernachlässigung der durch c^4 dividirten Glieder nicht mehr statthaft. Wenn ich gleichwohl die betreffenden Formeln nebst den anschliessenden Folgerungen nicht unterdrückt habe, so ist diess geschehen, weil mir die befolgte Methode an sich ein gewisses Interesse zu haben schien, auch abgesehen von der Möglichkeit einer Anwendung auf *Theile* der gestörten Bahn (ich erinnere an Hansen's *partielle* Anomalieen), resp. im Falle der hyperbolischen Bewegung.

8.

Bedenkt man, dass die Gleichungen (9) und (10) für $c = \infty$ in die gewöhnlichen Formeln der elliptischen Bewegung übergehen, so kann man die durch c^2 dividirten Glieder

$$-\frac{\mu}{3c^2a}\left\{e\sin\varepsilon + 2\frac{1+e}{e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon\right\}$$

und

$$-\frac{\mu}{c^2p}\left\{f + e\sin f + \tfrac{3}{8}\frac{(1-e)^2}{e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}f\right\}$$

als die *Störungen* auffassen, welche die Differenzen

$$g - \varepsilon + e\sin\varepsilon \quad \text{und} \quad v - f - \varpi$$

beim Uebergange von dem ungestörten (Newton'schen) zum gestörten (Weber'schen) Probleme erfahren.

Bezeichnet man jetzt *diese* Störungen durch ein vorgesetztes Δ, so erhält man aus den Gleichungen (10)

$$\frac{r}{a}\Delta\varepsilon - \Delta g = \frac{\mu}{3c^2a}\left\{e\sin\varepsilon + 2\frac{1+e}{e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon\right\}$$
$$= \frac{\mu\sqrt{1-e^2}}{3c^2a}\left\{\frac{r}{p}e\sin f + \frac{2}{e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}f\right\}$$

und

$$\Delta f - \Delta v = \frac{\mu}{c^2p}\left\{f + e\sin f + \tfrac{3}{8}\frac{(1-e)^2}{e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}f\right\}.$$

Da aber vermöge (5)

$$\Delta r = ae\sin\varepsilon\,\Delta\varepsilon = \frac{r^2}{p}e\sin f\,\Delta f,$$

so ergibt die Elimination von $\Delta\varepsilon$ und Δf

$$\Delta r - \frac{ae\sin f}{\sqrt{1-e^2}}\Delta g = \frac{\mu}{3c^2}\left\{\frac{r}{p}e^2\sin^2 f + 4\sin^2\tfrac{1}{2}f\right\}$$

und

$$\left(\frac{p}{r}\right)^2\Delta r - pe\sin f\,\Delta v = \frac{\mu}{c^2}\{(f+e\sin f)e\sin f + \tfrac{1}{2}(1-e)^2\sin^2\tfrac{1}{2}f\}.$$

Eliminirt man Δr, so folgt

$$\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\Delta g - \Delta v = \frac{\mu}{c^2p}\left\{f+e\sin f - \tfrac{3}{2}\left(1-e+\left(1+\tfrac{1}{2}e\right)\frac{p}{r}\right)\sin f\right\}.$$

Hier kann man einen der Störungswerthe $\Delta r\ \Delta v\ \Delta g$ beliebig annehmen, also z. B.

$$\Delta_1 v = -\frac{\mu}{c^2p}\{f+e\sin f\}$$

setzen, wodurch

$$\Delta_1 g = -\frac{2\mu}{3c^2a}\sqrt{1-e^2}\left(\frac{r}{p}\right)^2\sin f\left\{1-e+\left(1+\tfrac{1}{2}e\right)\frac{p}{r}\right\}$$

$$\Delta_1 r = \frac{4\mu}{3c^2}(1-e)^2\left(\frac{r}{p}\right)^2\sin^2\tfrac{1}{2}f.$$

Oder man mache [1])

$$\Delta_2 r = \frac{\mu}{c^2}\frac{r}{p}e^2\sin^2 f$$

und erhält

$$\Delta_2 g = -\frac{2\mu}{3c^2a}\sqrt{1-e^2}\left\{\frac{1}{e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}f - \frac{r}{p}e\sin f\right\}$$

$$= -\frac{2\mu}{3c^2a}\left\{\frac{1+e}{e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon - e\sin\varepsilon\right\}$$

$$\Delta_2 v = -\frac{\mu}{c^2p}\left\{f - e^2\sin f\cos f + \frac{3}{2}\frac{(1-e)^2}{e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}f\right\}.$$

---

1) Man kann bemerken, dass der Werth $\Delta r = \frac{\mu}{c^2}\frac{r}{p}e^2\sin^2 f$ den Störungswerth repräsentirt, welcher sich ergeben würde, wenn man das Weber'sche Potential als den *gestörten* Werth des Newton'schen Potentials auffassen wollte. Denn aus

$$\Delta\frac{1}{r} = -\frac{r'\,r'}{c^2r} \qquad \text{folgt} \qquad \Delta r = \frac{\varrho^2 r}{c^2} = \frac{\mu}{c^2}\frac{r}{p}e^2\sin^2 f.$$

Wir untersuchen noch die Fälle

$$\Delta_3 g = 0\,, \quad \Delta_4 v = 0 \text{ und } \Delta_5 r = 0\,,$$

von denen der erste der gewöhnlichen Voraussetzung entspricht, dass die unabhängige Variable t keinen Störungen unterworfen sein soll, während der zweite mit der Einführung von

$$\Delta_4 g = n\Delta t = n\delta z = \delta\gamma$$

durch Hansen übereinkommt, da die ideale Anomalie v ungeändert bleiben soll[1]). Man findet leicht

$$\Delta_3 v = -\frac{\mu}{c^2 p}\left\{f + e\sin f - \tfrac{3}{2}\left(1 - e + (1 + \tfrac{1}{2}e)\frac{p}{r}\right)\sin f\right\}$$

$$\Delta_3 r = \frac{\mu}{3c^2}\left\{\frac{r}{p}\, e^2 \sin^2 f + 4\sin^2 \tfrac{1}{2}f\right\}$$

$$\Delta_4 g = \frac{\mu\sqrt{1-e^2}}{c^2 a}\left(\frac{r}{p}\right)^2\left\{f + e\sin f - \tfrac{3}{2}\left(1 - e + (1 + \tfrac{1}{2}e)\frac{p}{r}\right)\sin f\right\}$$

$$\Delta_4 r = \frac{\mu}{c^2}\left(\frac{r}{p}\right)^2\left\{(f + e\sin f)\, e\sin f + \tfrac{4}{3}(1-e)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}f\right\}$$

$$\Delta_5 g = -\frac{\mu\sqrt{1-e^2}}{3c^2 a}\left\{\frac{r}{p}\, e\sin f + \frac{2}{e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}f\right\}$$

$$\Delta_5 v = -\frac{\mu}{c^2 p}\left\{f + e\sin f + \tfrac{2}{3}\frac{(1-e)^2}{e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}f\right\}.$$

9.

Wenn man hingegen α und β verschwinden lässt, so ergeben die Gleichungen (9) in analoger Weise

$$\frac{r}{a}\Delta s - \Delta g = \frac{\mu s}{c^2 a} = \frac{\mu}{c^2 a}\left(g + e\sqrt{1-e^2}\,\frac{r}{p}\sin f\right)$$

und

$$\Delta f - \Delta v = \frac{\mu}{c^2 p}(f + e\sin f)$$

und damit

$$\sqrt{1-e^2}\,\Delta r - ae\sin f\,\Delta g = \frac{\mu}{c^2} e\sin f\left\{g + \sqrt{1-e^2}\,\frac{r}{p}\, e\sin f\right\}$$

$$\left(\frac{p}{r}\right)^2 \Delta r - pe\sin f\,\Delta v = \frac{\mu}{c^2} e\sin f\{f + e\sin f\}$$

$$\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \Delta g - \Delta v = \frac{\mu}{c^2 p}\left\{f - \tfrac{1}{2}e^2\sin 2f - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{p}{r}\right)^2 g\right\}.$$

---

1) Vergl. S. 432 des gegenwärtigen Jahrgangs der Berichte.

Die Untersuchung der oben betrachteten fünf Fälle liefert jetzt die Ausdrücke

$$\Delta_1 v = -\frac{\mu}{c^2 p}(f + e\sin f)$$

$$\Delta_1 r = \Delta_5 r = 0$$

$$\Delta_1 g = -\frac{\mu}{c^2 a}(g + \sqrt{1-e^2}\,\frac{r}{p}\,e\sin f)$$

$$\Delta_2 r = \frac{\mu}{c^2}\,\frac{r}{p}\,e^2\sin^2 f$$

$$\Delta_2 g = -\frac{\mu g}{c^2 a}$$

$$\Delta_2 v = -\frac{\mu}{c^2 p}\{f - \tfrac{1}{2}e^2\sin 2f\}$$

$$\Delta_3 g = 0$$

$$\Delta_3 v = -\frac{\mu}{c^2 p}\{f - \tfrac{1}{2}e^2\sin 2f - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{p}{r}\right)^2 g\}$$

$$\Delta_3 r = \frac{\mu}{c^2}\,\frac{e\sin f}{\sqrt{1-e^2}}\{g + \sqrt{1-e^2}\,\frac{r}{p}\,e\sin f\}$$

$$\Delta_4 v = 0$$

$$\Delta_4 g = -\frac{\mu}{c^2 a}\{g - \sqrt{1-e^2}\left(\frac{r}{p}\right)^2 (f - \tfrac{1}{2}e^2\sin 2f)\}$$

$$\Delta_4 r = \frac{\mu}{c^2}\left(\frac{r}{p}\right)^2 e\sin f(f + e\sin f),$$

so dass der fünfte und der erste Fall zusammentreffen.

10.

Anstatt wie bisher die *Störungen der Polarcoordinaten* r und v, resp. der mittleren Anomalie g zu berechnen, kann man sich die Aufgabe stellen, der Methode der Variation der arbiträren Constanten gemäss, die *constanten* Elemente a e ϖ und τ um die *variabeln* Incremente δa δe $\delta\varpi$ und $\delta\tau$ zu vermehren. Es kommt dann darauf an, die Werthe dieser Incremente oder *Störungen der elliptischen Elemente* zu entwickeln. Die Ausdrücke der Coordinaten r und v *nebst ihren ersten Differentialquotienten*

sollen in der gestörten und ungestörten Bewegung die nämliche Form behalten, mit anderen Worten, ihre Störungen — beim Uebergang vom ungestörten zum gestörten Problem — sollen auf die Elemente übertragen, also durch deren Störungen ersetzt werden. Das Gleiche gilt jedoch nicht von den eingeführten Hülfsgrössen $\varrho\ \varepsilon\ f$ und g resp. l, welche durch die Gleichungen (4) und (8), in denen die elliptischen Elemente explicite vorkommen, abhängig gemacht worden sind. Variirt man letztere, so erleiden demnach auch $\varrho\ \varepsilon\ f\ g\ l$ Störungen, die durch $\delta\varrho\ \delta\varepsilon\ \delta f\ \delta g$ und δl bezeichnet werden sollen, und ähnlich wie δn und δp von den Störungen der vier unabhängigen Elemente abhängen müssen.

Es wird sich sogar empfehlen, da wegen $g = n(t-\tau)$

$$\delta\tau = \frac{g}{n^2}\delta n - \frac{1}{n}\delta g,$$

der einfacheren Rechnung halber δg an Stelle von $\delta\tau$ zu benutzen, also gewissermassen g die Stelle eines elliptischen Elements vertreten zu lassen, was unbedenklich erscheint, da jetzt die Variable t nebst den Coordinaten und ihren Differentialquotienten keinen Störungen unterworfen worden ist.

Man erhält nun leicht aus (1) und (2):

$$\delta\varrho = -\frac{\mu}{c^2}\left\{\frac{\varrho}{r} - \frac{\mu\alpha}{2a^2\varrho} + \frac{\mu\beta}{2r^2\varrho}\right\} = -\frac{\mu}{c^2}\left\{\frac{\varrho}{r} + \frac{\mu}{3a^2\varrho} - \frac{\mu(1-e)^2}{3r^2\varrho}\right\}$$

$$\delta p = \frac{\mu\beta}{c^2} = -\frac{2\mu}{3c^2}(1-e)^2$$

sowie aus (10):

$$\delta g = \delta l - \delta\varpi = \frac{r}{a}\delta\varepsilon - \sin\varepsilon\,\delta e - \frac{\mu}{3c^2a}\left\{e\sin\varepsilon + 2\frac{1+e}{e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon\right\}$$

$$= \frac{g}{n}\delta n - n\delta\tau = \frac{r}{a\sqrt{1-e^2}}\left\{\frac{r}{a}\delta f - \left(1+\frac{r}{p}\right)\sin f\,\delta e\right\}$$

$$-\frac{\mu\sqrt{1-e^2}}{3c^2a}\left\{\frac{r}{p}\,e\sin f + \frac{2}{e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}f\right\}$$

und

$$\delta\varpi = -\delta f + \frac{\mu}{c^2p}\left\{f + e\sin f + \frac{2}{3}\frac{(1-e)^2}{e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}f\right\}.$$

Vermöge (3) und (4) aber finden zwischen den Incrementen der Grössen $a\ e\ n\ p\ \varrho\ f\ \varepsilon$ die Relationen statt:

$$\delta p = (1 - e^2)\,\delta a - 2ae\,\delta e$$

$$0 = 3\frac{\delta a}{a} + 2\frac{\delta n}{n}$$

$$2\varrho\,\delta\varrho = \mu\left(\frac{\delta a}{a^2} - \frac{\delta p}{r^2}\right)$$

$$\frac{\delta p}{r} = \cos f\,\delta e - e\sin f\,\delta f$$

$$\frac{r\,\delta a}{a^2} = \cos\varepsilon\,\delta e - e\sin\varepsilon\,\delta\varepsilon .$$

Durch Ausführung der erforderlichen Eliminationen ergeben sich die gesuchten Störungswerthe.

11.

Man findet ohne Schwierigkeit:

$$\delta p = -\frac{2\mu}{3c^3}(1 - e)^2$$

$$\delta e = -\frac{\mu}{c^2 r}\left\{e\sin^2 f + \frac{3}{2}(1 - e)\frac{r}{a}\right\}$$

$$\delta a = -\frac{2\mu}{3c^3}\left\{1 + 3\frac{a}{r}\frac{e^2\sin^2 f}{1 - e^2}\right\}$$

$$\delta n = \frac{\mu n}{c^2 a}\left\{1 + 3\frac{a}{r}\frac{e^2\sin^2 f}{1 - e^2}\right\}$$

$$\delta f = \frac{\mu}{c^2 p}\left\{\frac{2(1 - e)^2}{3e}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}f - \frac{p}{r}\sin f\cos f\right\}$$

$$\delta\varepsilon = \frac{\mu}{c^2 r}\left\{\frac{2r}{3ae}\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}f - \frac{\sin f}{\sqrt{1 - e^2}}(\cos f - e)\right\}$$

$$\delta\varpi = \frac{\mu}{c^2 p}\left\{f + \left(\frac{p}{r}\cos f + e\right)\sin f\right\}$$

$$\delta g = \frac{\mu}{c^2 a}\frac{\sin f}{\sqrt{1 - e^2}}\left\{2e - \frac{p}{r}\cos f - \frac{r}{a}e\right\}$$

$$\delta\tau = \frac{g}{n^2}\delta n - \frac{1}{n}\delta g .$$

Man kann von den Störungen der *Elemente* mittelst des Taylor'schen Satzes zu den *Störungen des elliptischen Ortes*, resp. der *Coordinaten* r und v oder γ übergehen, wenn man mit Beschränkung auf die Glieder erster Ordnung setzt:

$$\delta r = \frac{\partial r}{\partial g}\delta g + \frac{\partial r}{\partial a}\delta a + \frac{\partial r}{\partial e}\delta e$$
$$= \frac{ae\sin f}{\sqrt{1-e^2}}\delta g + \frac{r}{a}\delta a - a\cos f\,\delta e$$
$$\delta v = \frac{\partial v}{\partial g}\delta g + \frac{\partial v}{\partial \varpi}\delta\varpi + \frac{\partial v}{\partial e}\delta e$$
$$= \left(\frac{a}{r}\right)^2\sqrt{1-e^2}\,\delta g + \delta\varpi + \left(1+\frac{p}{r}\right)\frac{\sin f}{1-e^2}\delta e$$
$$\delta\gamma = \left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\delta v\,.$$ [1])

Damit verificirt man, wie bereits oben angedeutet, die Relationen

$$\delta r = -\Delta_3 r\,,\quad \delta v = -\Delta_3 v\,,\quad \delta\gamma = \Delta_4 g\,.$$

Die Gleichungen (9) führen zu den analogen Störungswerthen

$$\delta\varrho = -\frac{\mu\varrho}{c^2 r} = -\frac{\mu}{c^2}\frac{a^2 n}{r^2}e\sin\varepsilon = -\frac{\mu}{c^2}\frac{an}{r}\frac{e\sin f}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$\delta p = 0$$

$$\delta e = -\frac{\mu a p}{c^2 r^3}e\sin^2\varepsilon = -\frac{\mu}{c^2 r}e\sin^2 f$$

$$\delta a = -\frac{2\mu}{c^2}\left(\frac{a}{r}\right)^3 e^2\sin^2\varepsilon = -\frac{2\mu}{c^2}\frac{a}{r}\frac{e^2\sin^2 f}{1-e^2}$$

$$\delta n = \frac{3\mu}{c^2}\frac{a^2 n}{r^3}e^2\sin^2\varepsilon = \frac{3\mu}{c^2}\frac{n}{r}\frac{e^2\sin^2 f}{1-e^2}$$

$$\delta f = -\frac{\mu}{c^2}\frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}\sin\varepsilon(\cos\varepsilon - e) = -\frac{\mu}{c^2 r}\sin f\cos f$$

$$\delta\varepsilon = \frac{\mu a}{c^2 r^2}\sin\varepsilon\left(2e - \frac{p}{r}\cos\varepsilon\right) = \frac{\mu}{c^2 r}\frac{e-\cos f}{\sqrt{1-e^2}}\sin f$$

$$\delta\varpi = \frac{\mu}{c^2 p}\left\{f + \left(\frac{p}{r}\cos f + e\right)\sin f\right\}$$

$$\delta g = \delta l - \delta\varpi = -\frac{\mu g}{c^2 a} + \frac{\mu}{c^2 r}\sin\varepsilon\left\{2e - \frac{ap}{r^2}(\cos\varepsilon - e) - \frac{r}{a}e\right\}$$
$$= \frac{g}{n}\delta n - n\,\delta\tau = -\frac{\mu g}{c^2 a} + \frac{\mu}{c^2 a}\frac{\sin f}{\sqrt{1-e^2}}\left\{2e - \frac{p}{r}\cos f - \frac{r}{a}e\right\}.$$

In diesen Ausdrücken erscheinen die beiden Säcularglieder

$$\frac{\mu}{c^2 p}f \quad\text{und}\quad -\frac{\mu}{c^2 a}g\,.$$

1) Vergl. die Differentialformeln in der Abhandlung S. 98 u. 133 dieses Bandes.

Da, wie bereits Art. 6 erwähnt, das letztere einer Aenderung von n um $-\frac{\mu n}{c^2 a}$ entspricht, also bei der Ermittelung des Werthes der mittleren Bewegung aus den Beobachtungen nicht gesondert zu bestimmen ist, so bleibt nur das Säcularglied in $\delta\varpi$ in Betracht zu ziehen, für welches wir schreiben können

$$\delta\varpi = \frac{\mu n}{c^2 p} t = \left(\frac{an}{c}\right)^2 \frac{nt}{1-e^2} = \left(\frac{an}{c\cos\varphi}\right)^2 nt,$$

weil die Entwickelung der Differenz $f - g$ nur periodische Glieder enthält.

12.[1])

Wenn es sich darum handelt, numerische Anwendungen von den entwickelten Störungsformeln zu machen, so ist vor Allem der Werth der Weber'schen Geschwindigkeit

$$c = 439450 \frac{\text{Kilometer}}{\text{Secunde}}, \quad \lg c = 5.64291$$

auf die gebräuchlichen astronomischen Einheiten des mittleren Tages und des mittleren Abstandes A der Erde von der Sonne zu reduciren. Hierzu bemerke ich, dass Hansen, mit Zugrundelegung des von ihm aus der Mondtheorie[2]) abgeleiteten Werthes der Erdmasse

$$m = \frac{\odot}{319455}$$

die mittlere Aequatorealhorizontalparallaxe der Sonne zu

$$P = 8''9459$$

bestimmt hat. Dabei ist nach Bessel[3]) der Logarithmus des in Kilometern ausgedrückten Aequatorealhalbmessers der Erde

$$\lg D = 3.8046271$$

angenommen.

---

1) Ich bemerke, dass ich die numerische Rechnung meinen früheren Papieren entlehne, obgleich die Werthe der eingehenden Constanten jetzt durch neuere ersetzt werden könnten. Da aber die Endresultate dadurch nicht wesentlich alterirt werden (vergl. z. B. S. 74 der Abhandlung von Harzer über *die säcularen Veränderungen der grossen Planeten*), so habe ich vorgezogen, den Text meiner Betrachtungen aus dem Jahre 1869 in den Artt. 12, 13, 14 einfach zu reproduciren.

2) *Darlegung der theoretischen Berechnung der Mondstörungen*, in den Abhandlungen der K. S. Gesellschaft d. Wissenschaften Bd. XI, S. 272.

3) Die Bessel'schen Werthe in den *Astron. Nachrichten* Nr. 438 führen auf

$$\lg D = 3.8046435 .$$

Da nun

$$D = A \sin P,$$

und der mittlere Tag 86400 Secunden enthält, so hat man den Weber'schen Werth von c durch

$$\frac{86400}{A} = \frac{86400}{D} \sin P$$

zu multipliciren und erhält damit

$$\lg c = 2.41054 .$$

In den Störungen erscheint der Factor $\left(\frac{an}{c}\right)^2$, *für die Erde* wird mithin

$$\lg an = \lg k = 8.23558 - 10$$

$$\lg \frac{an}{c} = 5.82504 - 10 .$$

Die mittlere Bewegung der Erde in *hundert julianischen Jahren* oder 36525 mittleren Tagen beträgt in Secunden

$$n = 129597744'', \qquad \lg n = 8.112597 ,$$

während für die Excentricität

$$e = 0.01677120 , \qquad \log \cos \varphi = 9.999939 .$$

Damit wird für die hundertjährige Säcularstörung des *Erdperihels* gefunden

$$\delta \varpi = 0''57916\, t .$$

Für einen anderen Planeten ist nach dem dritten Kepler-schen Gesetze

$$a'n' = an \sqrt[3]{\frac{n'}{n} \cdot \frac{1+m'}{1+m}} ,$$

also für *Mercur* (nach Leverrier)

$$n' = 538101063'' \qquad \lg n' = 8.730864$$
$$e' = 0.20560478 \qquad \lg \cos \varphi' = 9.990621$$
$$m' = \frac{1}{3000000} \qquad \lg \frac{a'n'}{c} = 6.03113 ,$$

für *Venus* (Hansen und Leverrier)

$$n' = 210664142'' \qquad \lg n' = 8.323591$$
$$e' = 0.00684331 \qquad \lg \cos \varphi' = 9.999990$$
$$m' = \frac{1}{408184} \qquad \lg \frac{a'n'}{c} = 5.89537 ,$$

während für den *Mond* (nach Hansen)

$$a'n' = an\sqrt[3]{\frac{n'}{n}\cdot\frac{84}{80}\cdot\frac{m}{1+m}}$$

$$n' = 1717915837'' \qquad \log n' = 9.235002$$

$$e' = 0.05490807 \qquad \lg\cos\varphi' = 9.999344$$

$$m' = \frac{m}{80} \qquad \lg\frac{a'n'}{c} = 4.36647\,.$$

Hiernach erhält man schliesslich

für den *Mercur*[1])

$$\delta\varpi = 6''4846\,t\,,$$

für die *Venus*

$$\delta\varpi = 1''3012\,t\,,$$

für den *Mond*.

$$\delta\varpi = 0''009304\,t\,.$$

13.

Wollte man statt der elektrischen Geschwindigkeit c die Geschwindigkeit α des Lichtes zur Rechnung benutzen, so würde für die Erde der Quotient

$$\frac{an}{\alpha} = \sin Q$$

durch den Sinus des Aberrationswinkels Q gegeben sein, mithin für

$$Q = 20''4451\ [2])$$

$$\lg\frac{an}{\alpha} = 5.99616 - 10\,, \qquad \lg\alpha = 2.23942\,.$$

Man hat darauf aufmerksam gemacht, dass die Werthe von c und α nahezu im Verhältniss von $\sqrt{2} : 1$ stehen. Da die Differenz der beiden berechneten Logarithmen 0.17112 beträgt, während $\lg\sqrt{2} = 0.15051$ ist, so müsste, falls jenes Verhältniss theoretisch begründet sein sollte, die Unsicherheit in den von uns zu Grunde gelegten Daten gross genug sein, um die bedeutende Abweichung beider Logarithmen zu erklären.

---

1) Den von Zöllner mitgetheilten Werth von 6″78 habe ich in meinen damaligen Papieren nicht wiedergefunden.

2) *Astron. Nachrichten* Nr. 484. Struve leitet daraus den Werth der Lichtzeit 497″78 für das Durchlaufen der Entfernungseinheit A ab, dem obigen Werth von α entsprechen 497″84.

In einer aus Riemann's Nachlass publicirten Arbeit[1]), welche von ihrem Verfasser im Februar 1858 der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vorgelegt, später aber wieder zurückgezogen wurde, ist auf diejenigen Bestimmungen der Lichtgeschwindigkeit Bezug genommen, welche Busch aus Bradley's Aberrationsbeobachtungen und Fizeau durch directe Messungen abgeleitet haben. Busch findet die Aberrationsconstante

$$Q = 20''2116 \pm 0''0383\ ^2),$$

mit dem Delambre'schen Werthe 20″255 (aus den Verfinsterungen der Jupiterstrabanten berechnet) nahe übereinstimmend; die oben adoptirte Struve'sche Bestimmung mit dem wahrscheinlichen Fehler ± 0.0111 ist gegenwärtig für genauer zu achten. Fizeau dagegen gibt sein Resultat zu 70000 lieues = 42000 geogr. Meilen in der Secunde an, und man darf aus dieser runden Zahl wohl schliessen, dass er seine Versuche noch nicht als definitive betrachtet hat.

In der That hat später Foucault[3]) die directe Messung der Lichtgeschwindigkeit wiederholt und dafür 298000 Kilometer gefunden, welche Zahl etwa 40160 geogr. Meilen entspricht. Foucault's eigener Schätzung zufolge kann man sich soweit auf die Genauigkeit dieser Zahl verlassen, dass ihm die Berichtigungen, welche sie etwa erleiden möchte, nicht über 500 Kilometer (67 Meilen) hinauszugehen scheinen.

14.

Da indess über die Werthe der zu Grunde gelegten Beobachtungen nichts Näheres bekannt geworden ist, so wird man die Zuverlässigkeit dieses in neuerer Zeit von Physikern und

---

1) Poggendorff's *Annalen der Physik und Chemie*, Bd. 131, S. 243 heisst es: »Nach den Bestimmungen von Weber und Kohlrausch ist »$c = 439450$ Kilometer, woraus sich $\alpha = \frac{c}{\sqrt{2}}$ zu 41949 geogr. Meilen in »der Secunde ergiebt, während für die Lichtgeschwindigkeit von Busch »aus Bradley's Aberrationsbeobachtungen 41994 Meilen und von Fizeau »durch directe Messung 41882 Meilen gefunden worden sind.«

Man vergl. auch Humboldt's *Kosmos* Bd. III, S. 93 u. 128, nebst dem Druckfehlerverzeichniss S. 645.

2) *Astron. Nachrichten* Nr. 309.

3) *Comptes rendus* Bd. 55, S. 501 u. 792; Humboldt setzt 1 lieue = 4452 Meter, 1 geogr. Meile = 7419 Meter (*Kosmos* III, S. 93 u. 128).

Astronomen mit Vorliebe citirten Resultates nach der Beschaffenheit des daraus folgenden Werthes der Sonnenparallaxe, oder vielmehr des Productes aus der Parallaxe P in die Aberrationsconstante Q beurtheilen können.

In der That erhält man, vermöge

$$D = A \sin P, \qquad An = \alpha \sin Q,$$

wenn man A eliminirt und die Sinus mit den Bogen vertauscht,

$$PQ = (206265)^2 \frac{Dn}{\alpha},$$

wo auf eine Zeitsecunde bezogen

$$\lg n = 3.299068 - 10$$

zu setzen ist. Damit wird

$$\lg P + \log Q = 2.258345.$$

Der Hansen'sche Werth von P würde hiernach auf eine Aberration von 20″3320, der Struve'sche Werth von Q auf eine Parallaxe von 8″8666 führen. Foucault selbst berechnet mittelst der

$$\text{Aberration } Q = 20''45 \text{ die Parallaxe } P = 8''86,$$

und Powalky hat nachgewiesen, dass dieser Werth mit den Beobachtungen der Venusdurchgänge des vorigen Jahrhunderts, aus deren Discussion Encke die Sonnenparallaxe von 8″57 hergeleitet hatte, sehr wohl in Einklang gebracht werden kann, wenn man über die geringere Sicherheit der damaligen Beobachtungen nicht unwahrscheinliche Voraussetzungen macht.

Ich habe es nicht für überflüssig gehalten, die vorstehenden Bemerkungen zusammenzustellen, weil die in der Riemann'schen Abhandlung unter Busch's und Fizeau's Namen vorkommenden numerischen Werthe von resp. 41994 und 41882 Meilen kaum eine hinlängliche Zuverlässigkeit zu besitzen scheinen.

Dagegen wollen wir auf Grund der Werthe

$$P = 8''8666\,^{1}), \qquad Q = 20''4451$$

$$\lg \alpha = 2.23942, \qquad c = \alpha\sqrt{2}, \qquad \lg c = 2.38993$$

---

1) Da die Masse der Erde der dritten Potenz der Sonnenparallaxe proportional ist (vgl. Hansen a. a. O. S. 271), so hat eine Verminderung der letzteren eine Verkleinerung der Hansen'schen Erdmasse mittelst des Factors $\left(\frac{8.8666}{8.9459}\right)^3$ zur Folge, wobei caeteris paribus $m = \frac{\odot}{324848}$ wird.

die Correction des Weber-Kohlrausch'schen Werthes von c berechnen, indem wir durch den Factor $\frac{86400}{D} \sin P$ des Art. 12 dividiren. Man erhält

$$\lg c = 5.62474\,, \quad \text{also } c = 421450 \text{ Kilometer}\,,$$

und es würde von wesentlichem Interesse sein, durch directe Neubestimmung dieser Constante zu ermitteln, ob eine derartige Correction zulässig ist. Unter der letzteren Voraussetzung würden sich für die Säcularstörung des Perihels, resp. Perigäums $\delta\varpi$ die folgenden Werthe ergeben:

Erde	$\log\frac{an}{c} = 5.84565$	$\delta\varpi = 0''63683\,t$
Mercur	$\log\frac{a'n'}{c} = 6.05174$	$= 7''1302\,t$
Venus	$= 5.91598$	$= 1''4308\,t$
Mond	$= 4.38435$	$= 0''01012\,t$.

Druckfehler und Berichtigungen zu der Abhandlung über die gestörte elliptische Bewegung und Hansen's ideale Coordinaten, S. 85—171 dieses Bandes.

S. 89 Z. 1 v. u. fehlt »n die mittlere Bewegung«.
S. 90 Z. 8 v. o. lies »Anomalie f«.
S. 108 Z. 4 v. o. lies »Function der Zeit, der Coordinaten« u. s. w.
» Z. 2 v. u. lies Ist statt ist.
*)S. 108 Z. 3 u. 10 v. u. lies $\delta\Sigma$ statt $\delta\mathfrak{S}$.
S. 123 Z. 3 v. u. lies $\delta n'$ statt $\partial n'$.
*)S. 124 Z. 6 v. u. lies 15 statt 17.
*)S. 129 Z. 3 v. u. lies δe statt δs.
S. 131 Z. 13 v. u. lies ∂x_0^2 statt δx_0^2.
S. 133 Z. 7 v. u. lies $\partial^2 t$ statt ∂t^2.
S. 135 Z. 2 v. o. lies »δg nicht allein der Zeit proportionale Glieder liefert, sondern auch mehrfache« u. s. w.

*) In einem Theile der Exemplare.

S. 137 Z. 15 v. o. als Anm. 2) hinzuzufügen: »Es könnte auffallen, dass die beiden Grössen δw und δw_0 durch *eine* Gleichung definirt werden sollen, die gegebene Construction zeigt aber, dass δw und δw_0 auf diesem Wege die Eigenschaft von *Elementen* erhalten. Wollte man eine *beliebige* zweite Bedingungsgleichung hinzufügen, so würde Letzteres nicht der Fall zu sein brauchen.«

S. 138 Z. 12 v. o. lies $\delta\omega$ statt δw.

S. 139 Z. 9 v. u. fehlt »zur Kettenbruchsentwickelung geeignet«.

S. 140 Z. 7 v. o. lies i_0 statt u_0.

*)S. 144 Z. 1 v. u. lies 799 statt 399.

*)S. 148 Z. 5 v. o. lies $\delta\alpha''$ statt $\delta\alpha$.

S. 154 Z. 10 v. u. lies $\delta\alpha \frac{d\delta\gamma}{dg_0} \cdots\Big)$.

S. 160 Z. 11 v. o. ist das Folgende einzuschalten:

»Uebrigens ergibt die directe Differentiation der Gleichung

$$\delta P = \delta R + \frac{\partial \delta R}{\partial g_0}\delta\gamma + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 \delta R}{\partial g_0^2}\delta\gamma^2 \cdots,$$

da δP und $\delta\gamma$ ideale Coordinaten sind:

$$\delta P' = \gamma'\left\{\frac{\partial \delta R}{\partial g_0} + \frac{\partial^2 \delta R}{\partial g_0^2}\delta\gamma + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^3 \delta R}{\partial g_0^3}\delta\gamma^2 \cdots\right\},$$

woraus die von HANSEN (Störungen der kleinen Planeten, I, S. 103) zur Rechnungscontrole empfohlene Formel entspringt:

$$\delta P = \int\left\{\frac{\partial \delta R}{\partial g_0} + \frac{\partial^2 \delta R}{\partial g_0^2}\delta\gamma + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^3 \delta R}{\partial g_0^3}\delta\gamma^2 \cdots\right\}\left(1 + \frac{d\delta\gamma}{dg_0}\right) dg_0 .«$$

S. 160 Z. 1 v. u. fehlt »oder $\delta\omega = \frac{\cos i}{\Delta}\int r \sin(\bar{f} - f)\,\delta U\, d\bar{t}$.«

S. 161 Z. 8 v. u. lies $2e_0$ statt $2e_0^2$.

S. 166 Z. 5 v. u. lies $-\frac{1}{2}e\frac{\partial \Omega}{\partial e}\Big)$.

S. 168 Z. 8 v. u. lies r, f und g statt r und f.

» Z. 4 v. u. lies ϱ, φ und γ statt ϱ und φ.

*)S. 169 Z. 2 und 4 v. u. lies $\left(1 + \frac{p}{2r_0}\right)$ statt $\left(1 \pm \frac{r_0}{2p}\right)$.

*)S. 170 Z. 2 v. o. lies 31 statt 32.

*)S. 170 Z. 3 v. o. lies $\left(1 + \frac{p}{2r_0}\right)$ statt $\left(1 + \frac{r_0}{2p}\right)$.

Friedrich Engel, *Die Zerlegung einer ganzen Function einer Veränderlichen in Factoren ohne vielfache Wurzeln.*

Ist $G(x)$ eine ganze rationale Function einer Veränderlichen, die mit ihrer Ableitung den grössten gemeinschaftlichen Theiler $\varphi(x)$ hat, so ist:

$$(1) \qquad G(x) = \varphi(x) \,.\, G_1(x) \,, \quad G'(x) = \varphi(x) \,.\, G_2(x) \,,$$

wo $G_1(x)$ und $G_2(x)$ theilerfremd sind. Setzt man nun den Fundamentalsatz der Algebra voraus, so ist klar, dass $G_1(x)$ für jede Wurzel der Gleichung $G(x) = 0$ verschwindet, aber nur einfach, und dass $G(x)$ und $G_2(x)$ theilerfremd sind. Mir ist aber kein Beweis für diese Sätze bekannt, der sich blos auf den Begriff der ganzen Function stützte, ohne von dem Fundamentalsatze der Algebra Gebrauch zu machen; nur Gauss sagt in einer Anmerkung zu seinem zweiten Beweise für den Fundamentalsatz (s. die ges. Werke III, S. 44 oder »Die vier Gaussschen Beweise u. s. w.«, Ostwalds Klassiker Nr. 14, S. 48), dass eigentlich blos der gemeinsame Theiler $\varphi(x)$ die Determinante Null haben könne, dass aber der Beweis dieses Satzes hier auf gewisse Umwege (in quasdam ambages) führen würde. Es scheint mir daher gerechtfertigt, wenn ich den folgenden Beweis veröffentliche.

Zunächst schicke ich zwei Hülfssätze voraus, deren Beweis auf der Hand liegt, die ausdrücklich aufzustellen aber doch von Nutzen ist.

Hülfssatz 1. *Sind $G(x)$ und $G'(x)$ theilerfremd und ist $g(x)$ ein Theiler von $G(x)$, so sind auch $g(x)$ und $g'(x)$ theilerfremd.*

Hülfssatz 2. *Sind $G(x)$ und $G'(x)$ theilerfremd und ist $G(x)$ durch das Product der beiden ganzen Functionen $f(x)$ und $g(x)$ theilbar, so sind $f(x)$ und $g(x)$ theilerfremd.*

Es sei jetzt wieder $\varphi(x)$ der, nicht constante, grösste gemeinschaftliche Theiler von $G(x)$ und $G'(x)$ und es bestehen also die

Gleichungen (1), wo G_1 und G_2 theilerfremd sind. Hätten dann $G_1(x)$ und $G_1'(x)$ einen nicht constanten grössten gemeinschaftlichen Theiler $\varrho(x)$, wären also:

$$(2) \qquad G_1(x) = \varrho(x) \cdot \gamma_1(x) \quad G_1'(x) = \varrho(x) \cdot \gamma_2(x),$$

$\gamma_1(x)$ und $\gamma_2(x)$ theilerfremd, so wäre auch $\varphi(x)$ durch $\varrho(x)$ theilbar, wie die aus (1) folgende Gleichung:

$$(3) \qquad \varphi G_1' + G_1 \varphi' = \varphi G_2$$

sofort zeigt, denn ϱ und G_2 sind ja theilerfremd. Da $\varphi(x)$ eine ganze rationale Function ist, so giebt es sicher eine positive ganze Zahl $m \geqq 1$, dass φ zwar durch ϱ^m, nicht aber durch ϱ^{m+1} theilbar ist; es sei also: $\varphi = \varrho^m \cdot \psi$, wo ψ nicht durch ϱ theilbar ist. Dann ergiebt sich aus (3) durch Benutzung von (2):

$$\varrho^{m+1} \psi \gamma_2 + \varrho^m \gamma_1 (\varrho \psi' + m \psi \varrho') = \varrho^m \psi G_2$$

und aus (2) überdies:

$$\varrho \gamma_1' + \gamma_1 \varrho' = \varrho \gamma_2,$$

so dass also $\gamma_1 \varrho'$ und mithin auch ψ durch ϱ theilbar ist. Dieser Widerspruch kann nur daraus folgen, dass ϱ als nicht constant angenommen war, demnach ist ϱ constant und $G_1(x)$ *und* $G_1'(x)$ *sind nothwendig theilerfremd.*

Um jetzt noch zu beweisen, dass G_2 und G oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass G_2 und φ theilerfremd sind, müssen wir φ und G_1 weiter zerlegen. Dazu dient uns der

Hülfssatz 3. *Ist*

$$G(x) = \{g(x)\}^m \cdot \psi(x) \cdot \gamma_1(x), \quad G'(x) = \{g(x)\}^{m-1} \cdot \psi \cdot \gamma_2,$$

wo die ganzen Functionen ψ und γ_1 theilerfremd sind, so haben $g(x)$ und $\psi(x)$ einen nicht constanten gemeinsamen Theiler.

Der Beweis ergiebt sich sofort, wenn man $G'(x)$ aus dem Ausdrucke für $G(x)$ berechnet, denn es wird:

$$g^m(\psi \gamma_1' + \gamma_1 \psi') + m g^{m-1} \psi \gamma_1 g' = g^{m-1} \cdot \psi \cdot \gamma_2,$$

daraus folgt aber, dass $g \gamma_1 \psi'$ und also auch $g \psi'$ durch ψ theilbar ist, was nur eintreten kann, wenn g und ψ einen nicht constanten gemeinsamen Theiler haben.

Auf den Fall der Gleichungen

$$(4) \qquad G(x) = \varphi(x) G_1(x), \quad G'(x) = \varphi(x) G_2(x),$$

wo $\varphi(x)$ nicht constant ist und G_1 und G_2 theilerfremd sind, lässt sich der Hülfssatz 3 unmittelbar anwenden; wir brauchen ja nur $m = 1$, $g(x) = G_1(x)$, $\psi(x) = \varphi(x)$, $\gamma_1(x) = 1$ und $\gamma_2(x) = G_2(x)$ zu setzen. Demnach haben $G_1(x)$ und $\varphi(x)$ einen nicht constanten gemeinsamen Theiler und es ist:

$$G_1(x) = \lambda_1(x) \cdot g_1(x), \quad \varphi(x) = \lambda_1(x) \cdot \varphi_1(x),$$

wo $\lambda_1(x)$ nicht constant ist, wo g_1 und φ_1 theilerfremd und wo endlich nach Hülfssatz 1 und 2 λ_1 und λ_1', g_1 und g_1', λ_1 und g_1 theilerfremd sind. Dabei kann es allerdings vorkommen, dass sich g_1 auf eine Constante reducirt.

Nunmehr wird:

$$G(x) = \lambda_1^2 \cdot \varphi_1 \cdot g_1, \quad G'(x) = \lambda_1 \cdot \varphi_1 \cdot G_2,$$

wo φ_1 und g_1 theilerfremd sind, also haben φ_1 und λ_1 nach Hülfssatz 3 einen nicht constanten grössten gemeinschaftlichen Theiler λ_2 und es ergiebt sich:

$$\varphi_1 = \lambda_2 \cdot \varphi_2, \quad \lambda_1 = \lambda_2 \cdot g_2, \quad G_1 = \lambda_2 \cdot g_1 \cdot g_2,$$
$$G = \lambda_2^2 \cdot \varphi_2 \cdot g_1 g_2^2, \quad G' = \lambda_2^2 \cdot \varphi_2 \cdot g_2 G_2,$$

wo g_2 und φ_2, g_1 und λ_2, g_2 und λ_2, g_1 und g_2, g_1 und g_1', g_2 und g_2' theilerfremd sind und also auch φ_2 und $g_1 g_2^2$. Folglich kann man wieder den Hülfssatz 3 anwenden. Fährt man so fort und ist $G(x)$ etwa vom Grade n, so muss man spätestens beim $(n-1)$-ten Schnitte auf ein φ_{n-1} stossen, das sich auf eine Constante c reducirt. Schreibt man dann g_n für λ_{n-1}, für $c \cdot g_1$ wieder g_1 und für $c \cdot G_1$, $c \cdot G_2$ wieder G_1, G_2, so hat man:

$$(4) \quad \begin{cases} G(x) = g_1 \cdot g_2^2 \cdot g_3^3 \cdots g_n^n, & G_1(x) = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdots g_n, \\ G'(x) = g_2 \cdot g_3^2 \cdots g_n^{n-1} \cdot G_2, \end{cases}$$

wo g_i und g_i' und g_i und g_k $(i \neq k)$ stets theilerfremd sind und wo sich selbstverständlich gewisse unter den g_i auf Constanten reduciren müssen. Da überdies G_1 und G_2 theilerfremd sind, so ist es jetzt unmittelbar klar, dass auch $G(x)$ und $G_2(x)$ theilerfremd sind.

Damit ist also, einzig und allein auf Grund der Eigenschaften der ganzen rationalen Functionen, der Satz bewiesen:

Hat die ganze rationale Function $G(x)$ mit ihrer Ableitung $G'(x)$ den grössten gemeinschaftlichen Theiler $\varphi(x)$ und ist also

$$G(x) = \varphi(x) \cdot G_1(x), \quad G'(x) = \varphi(x) \cdot G_2(x),$$

wo G_1 *und* G_2 *theilerfremd sind, so sind* $G_1(x)$ *und* $G_1'(x)$ *und ebenso* $G_2(x)$ *und* $G(x)$ *theilerfremd.*

Zugleich ist durch die vorstehenden Betrachtungen die ganze Function $G(x)$ auf rationalem Wege in ein Product ganzer Functionen zerlegt, von denen jede zu ihrer Ableitung theilerfremd ist. Selbstverständlich ist diese Zerlegung im Wesentlichen nur auf eine Weise möglich, das heisst, wenn man die Zerlegung auf irgend einem andern Wege vornimmt, so findet man stets die ganzen Functionen $g_1, \cdots g_n$ wieder, abgesehen von constanten Factoren.

Prof. **Lange** in Berlin, *Ein elementarer Beweis des Reciprocitätsgesetzes.* Fortsetzung des Aufsatzes vom December 1896, Seite 629. Vorgelegt von C. NEUMANN, o. M.

§ 3.

Andere Methoden zum Beweise des Satzes.

Wenn $p = 2n + 1$ eine Primzahl, und z eine beliebige durch p nicht theilbare Zahl ist, und wenn in der Reihe der n kleinsten positiven Reste der Producte

$$1z, 2z, 3z, \cdots nz \pmod p$$

u die Anzahl der ungeraden Zahlen auf den geraden Stellen und v die Anzahl der geraden Zahlen auf den ungeraden Stellen bezeichnet, so ist z quadratischer Rest oder Nichtrest von p, je nachdem die Zahl $u + v$ gerade oder ungerade ist, oder

$$\left(\frac{z}{p}\right) = (-1)^{u+v}.$$

Denn da die Reste von αz und $(p - \alpha)z$ sich zu p ergänzen, so ist $u + v$ auch die Anzahl w der ungeraden Zahlen in der Reihe der kleinsten positiven Reste der n Producte $2z, 4z, 6z, \cdots 2nz \pmod p$; ersetzt man aber diese ungeraden Zahlen durch ihre Ergänzungen zu p, so muss man wieder alle n geraden Zahlen von 2 bis $2n$, nur in anderer Ordnung, haben, und es ergiebt sich sogleich, dass $z^n \equiv (-1)^w \pmod p$ ist, wodurch mit Berufung auf das EULER'sche Kriterium der obige Satz begründet ist.

Es seien nun $p = 2n + 1$ und $q = 2m + 1$ zwei Primzahlen, und p grösser als q, also auch n grösser als m. Bezeichnet man die m kleinsten positiven Reste der Producte

$$1p, 2p, 3p, \cdots mp \pmod q$$

mit $r_1, r_2, r_3 \cdots r_m$, so gehört zu jedem derselben eine der m Gleichungen von der Form

$$kp = a_k q + r_k, \tag{1}$$

wo k eine der Zahlen von 1 bis m, und jeder Rest kleiner als q ist. Die m Quotienten a sind alle unter sich verschieden, weil p grösser als q ist und daher jeder folgende Quotient mindestens um 1 grösser sein muss. Die Quotienten müssen aber sämmtlich kleiner als n sein, weil $mp = nq - (n - m)$ ist. Die Zahl $u + v$ ist nach der obigen Definition auch die Anzahl der Fälle, in welchen von den Zahlen k und r_k die eine gerade, die andere ungerade ist; und da q ungerade ist, so ist $u + v$ auch die Anzahl der Fälle, in welchen a_k eine ungerade Zahl ist. Es ist also auch $\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^s$, wenn s die Anzahl der ungeraden Quotienten in den m Gleichungen (1) bezeichnet.

Benennt man die n kleinsten positiven Reste der Producte

$$1q,\ 2q,\ 3q,\ \cdots nq \pmod p$$

mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \cdots \varrho_n$, so gehört zu jedem derselben eine der n Gleichungen von der Form

$$\varkappa q = \alpha_\varkappa p + \varrho_\varkappa, \tag{2}$$

wo $\varkappa$ eine der Zahlen von 1 bis n ist und die Stelle von $\varrho_\varkappa$ in der ganzen Restreihe anzeigt. Die Quotienten α dieser Reihe sind nichts Anderes als die $m + 1$ Zahlen von 0 bis m. Denn da $nq = mp + n - m$, so können die Quotienten nicht $> m$ sein; es müssen aber auch alle Zahlen von 0 bis m unter ihnen mindestens einmal vertreten sein, weil q kleiner als p ist, und also der nächste Quotient höchstens um eine Einheit wachsen kann. Von den Resten ist der letzte $n - m$, da $nq = mp + n - m$; die übrigen lassen sich in zwei Klassen sondern. Jeder dieser anderen Reste unterscheidet sich von dem zunächst folgenden entweder um eine ungerade Zahl, wenn in der nächstfolgenden Gleichung (2) nur $\varkappa$ um eine Einheit zunimmt; oder um eine gerade Zahl, wenn $\varkappa$ und α gleichzeitig um 1 wachsen; da dies m mal zutrifft, so giebt es m Reste dieser zweiten Klasse, welche zum Unterschied von den übrigen ϱ mit ϱ' bezeichnet werden sollen. Theilt man nun alle n Reste, vom ersten anfangend, der Reihe nach in Gruppen zu je zwei ab und nimmt vorerst n gerade, also eine *ganze* Anzahl von Paaren an, so sind bei der Ermittelung der Zahl $u + v$ für die Reihe (2) alle Paare auszuscheiden, in welchen auf der ersten Stelle des Paares ein ϱ steht.

Denn da diese Paare eine ungerade und eine gerade Zahl enthalten, so zählt entweder keine der beiden Zahlen, oder es zählen beide, die eine für u, die andere für v, so dass $u+v$ zwei Einheiten gewinnt, was die Entscheidung nicht beeinflusst. Dagegen giebt jedes Paar, auf dessen erster Stelle ein ϱ' steht, das also aus zwei ungeraden oder zwei geraden Zahlen besteht, das erstere für u, das letztere für v eine Einheit ab, so dass $u+v$ durch jedes dieser Paare eine, aber *nur eine* Einheit gewinnt. Daher ist für $u+v$ nur so oft eine Einheit zu zählen, so oft einer der Reste ϱ' auf der ersten Stelle eines Paares, also auf einer ungeraden Stelle der ganzen Reihe steht. Die Stelle der Reste ϱ' in der ganzen Restreihe wird aber durch die Gleichungen (1) angezeigt. Denn da die Quotienten a dieser Gleichungen sämmtlich kleiner als n sind, während $\varkappa$ bis n geht, so müssen sich alle m Gleichungen (1) unter den n Gleichungen (2) vorfinden, wenn man jenen die Form giebt: $a_k q = kp - r_k$. Dies ist also die a_k^{te} der Gleichungen (2), und die $(a_k+1)^{\text{te}}$ ist daher: $(a_k+1)q = kp - r_k + q$. Die zwei aufeinander folgenden kleinsten positiven Reste sind also $p - r_k$ und $q - r_k$, welche sich um die gerade Zahl $p - q$ unterscheiden. Daher gehört der a_k^{te} Rest zur Klasse der ϱ', und da das Nämliche von allen m Gleichungen (1) gilt, so werden die Stellen der m Reste ϱ' in der Reihe (2) durch die m Zahlen $a_1, a_2, a_3, \cdots a_m$ der Reihe (1) angezeigt, und ein ϱ' steht so oft auf einer ungeraden Stelle der ganzen Reihe, also auch auf der ersten Stelle eines Paares, als sich unter den Quotienten a ungerade Zahlen befinden, also s mal, und mithin ist $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)$. Bisher war n gerade vorausgesetzt. Ist n ungerade, so ist noch der einzelne letzte Rest $n-m$ in Betracht zu ziehen. Da dieser nun auf einer ungeraden Stelle steht, so zählt er nicht mit, wenn $n-m$ auch ungerade, also m gerade ist, und es bleibt dann also bei der bisherigen Entscheidung. Ist aber $n-m$ gerade, also m auch ungerade, so zählt v und also auch $u+v$ eine Einheit mehr, und die Entscheidung geht in die entgegengesetzte über. Dies Resultat lässt sich daher in der Gleichung zusammenfassen: $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{mn}$, welches der Inhalt des Reciprocitätssatzes ist.

Die Kategorien, nach denen man die zahlreichen Beweise dieses Satzes geordnet hat, könnten vielleicht noch um die eine

solcher Beweise vermehrt werden, welche sich, abgesehen von dem EULER'schen Kriterium, nur auf die zwischen den Gleichungen (1) und (2) bestehenden elementaren Beziehungen stützen, in welchen doch schliesslich immer der Grund auch für die im Reciprocitätssatz ausgesprochenen Beziehungen der beiden Primzahlen zu einander zu finden sein muss, und welche sich aus der einfachen Darlegung ergeben, dass die k^{te} der Gleichungen (1) sich als die $a_k{}^{te}$ der Gleichungen (2) wiederfinden muss.

So kann man z. B. den Beweis auch führen, indem man statt der Reste nur die Quotienten in Betracht zieht. Dann hat man also nur die Anzahl s' der ungeraden Quotienten in den Gleichungen (2) mit s zu vergleichen. Nun ist $a_k q = (k-1)p + p - r_k$ die $a_k{}^{te}$ der Gleichungen (2) und die $(a_k+1)^{te}$ ist $(a_k+1)q = kp + q - r_k$. Daher ist die $a_k{}^{te}$ Gleichung die letzte mit dem Quotienten $k-1$ und die $(a_k+1)^{te}$ ist die erste mit dem Quotienten k. Ebenso ist die $a_{k+1}{}^{te}$ Gleichung die letzte mit dem Quotienten k, und der Quotient k kommt daher $(a_{k+1} - a_k)$-mal vor; der Quotient 1 also $(a_2 - a_1)$-mal, der Quotient 3 kommt $(a_4 - a_3)$-mal vor, u. s. f. Daher ist, wenn vorerst m gerade angenommen wird, die Anzahl der ungeraden Quotienten in (2): $s' = a_2 - a_1 + a_4 - a_3 + a_6 - a_5 + \cdots + a_m - a_{m-1}$, welches sich nur um die gerade Zahl $2(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{m-1})$ von der Summe aller Quotienten in (1), also auch von der Summe der ungeraden Quotienten und also auch von deren Anzahl s um eine gerade Zahl unterscheidet. Ist m dagegen ungerade, so hat man für s' zunächst nur $a_2 - a_1 + a_4 - a_3 + \cdots + a_{m-1} - a_{m-2}$, was dann aber noch um die Anzahl der Gleichungen mit dem ungeraden Quotienten m zu vermehren ist, welche $n - a_m$ beträgt, weil die letzte Gleichung die n^{te} ist; und jetzt unterscheidet sich s' von s um eine gerade oder eine ungerade Zahl, je nachdem n gerade oder ungerade ist, so dass wieder das Resultat $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{mn}$ erreicht ist.

Ebenso ergiebt sich leicht eine Herleitung, wenn man in Betracht zieht, dass die Restreihe (2) in $m+1$ Theilreihen zerfällt, und wenn man dann die ersten Reste dieser Theilreihen mit den Resten r der Reihe (1) in eine nahe liegende Beziehung bringt.

C. Neumann, o. M., *Die Anwendung des Hamilton'schen Princips in der Hydrodynamik und Aërodynamik.*

Im Allgemeinen ist man der Ansicht, dass in den berühmten Faraday'schen Arbeiten eine gewisse Abneigung gegen *transcendente* (d. i. nicht weiter erklärbare) Vorstellungen, so z. B. namentlich gegen die *Kräfte in distans* sich kundgebe. In verstärktem Maasse finden wir diese Abneigung bei Maxwell. In der That construirte Maxwell für die Elektrodynamik ein theoretisches Gebäude, in welchem Kräfte in distans völlig vermieden sein sollten.

Aber wohl Mancher hat, wie Hertz bemerkt, das Studium dieses theoretischen Gebäudes mit grossem Eifer unternommen, und hat dennoch (ohne übrigens auf ungewöhnliche mathematische Schwierigkeiten zu stossen) darauf verzichten müssen, von diesem Gebäude in allen seinen einzelnen Theilen ein deutliches und widerspruchsloses Bild zu gewinnen. [Vgl. Hertz' Ges. Werke, Bd. 2, Seite 22.] Hertz *fügt hinzu, ihm selber sei es nicht besser gegangen.* Bei der grössten Bewunderung für die »mathematischen Beziehungen« der Maxwell'schen Theorie sei er doch, hinsichtlich der physikalischen Bedeutung der in jener Theorie aufgestellten Behauptungen, nicht immer vollständig sicher gewesen, Maxwell's wahre Meinung »errathen« zu haben. Auch bemerkt Hertz an einer anderen Stelle [a. a. O. Seite 21], die Maxwell'sche Theorie habe die ihr entgegenstehenden Theorien nicht vollständig verdrängen können, weil sie sich nur auf die Wahrscheinlichkeit ihrer Endergebnisse, nicht aber auf die Sicherheit ihrer Voraussetzungen berufen konnte.

Schliesslich sah sich Hertz veranlasst, das eigentliche Fundament und die unteren Stockwerke jenes von Maxwell in der Elektrodynamik aufgeführten theoretischen Gebäudes ganz aufzugeben, und nur allein das oberste Stockwerk beizubehalten.

$$(IV)\quad \begin{cases} \delta\alpha = \frac{\partial\,\delta x}{\partial t} + \left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\,\delta x}{\partial y}\beta + \frac{\partial\,\delta x}{\partial z}\gamma\right) - \left(\frac{\partial\,\alpha}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\,\alpha}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\,\alpha}{\partial z}\delta z\right. \\ \delta\beta = \frac{\partial\,\delta y}{\partial t} + \left(\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\,\delta y}{\partial y}\beta + \frac{\partial\,\delta y}{\partial z}\gamma\right) - \left(\frac{\partial\,\beta}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\,\beta}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\,\beta}{\partial z}\delta z\right. \\ \delta\gamma = \frac{\partial\,\delta z}{\partial t} + \left(\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\beta + \frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\gamma\right) - \left(\frac{\partial\,\gamma}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\,\gamma}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\,\gamma}{\partial z}\delta z\right. \end{cases}$$

wie solches von mir in einer ausführlicheren Publication in baldiger Zeit näher dargelegt werden soll. [C. NEUMANN, *Die elektrischen Kräfte. Zweiter Theil. Leipzig, bei Teubner.*]

Ebenso wie also die Formeln (4) *der Lagrange'schen Vorstellungsart entsprechen, in genau derselben Weise beziehen sich die Formeln* (IV) *auf die Euler'sche Vorstellungsart.* Noch sei bemerkt, dass man die erste der Formeln (IV) auch so schreiben kann:

$$\delta\alpha = \frac{\partial\,\delta x}{\partial t} + \left(\frac{\partial(\alpha\,\delta x)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta\,\delta x)}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma\,\delta x)}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial(\alpha\,\delta x)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha\,\delta y)}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha\,\delta z}{\partial z}\right.$$
$$- \left(\frac{\partial\,\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\,\beta}{\partial y} + \frac{\partial\,\gamma}{\partial z}\right)\delta x + \alpha\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right);$$

und hieraus ergiebt sich sofort:

$$(IVa)\qquad \delta\alpha = \frac{\partial\,\delta x}{\partial t} + \alpha\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right) + \delta\alpha_0,$$

wo alsdann $\delta\alpha_0$ die Bedeutung hat:

$$(IVb)\quad \delta\alpha_0 = \frac{\partial(\beta\,\delta x - \alpha\,\delta y)}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma\,\delta x - \alpha\,\delta z)}{\partial z} - \left(\frac{\partial\,\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\,\beta}{\partial y} + \frac{\partial\,\gamma}{\partial z}\right)\delta x.$$

Diese wichtigen Formeln (IVa, b) *verdanken wir Helmholtz. Sie sind im Jahre 1892 von Helmholtz, gelegentlich seiner elektrodynamischen Untersuchungen, auf einem weiten Umwege gefunden worden, auf einem höchst merkwürdigen Wege, den ich aber mehr als eine Divination, denn als eine wirklich legitime Ableitung bezeichnen möchte.* Ich möchte hinzufügen, dass mir eine gewisse Stelle dieses HELMHOLTZ'schen Weges bis zum heutigen Tage trotz mancher Bemühung nicht hinreichend deutlich geworden ist, so dass ich den betreffenden Formeln erst Zutrauen schenken konnte, nachdem ich sie auf *meinem eigenen Wege* (der vorhin angedeutet wurde) abgeleitet hatte. Man findet die Formeln (IVa, b) in HELMHOLTZ' Wiss. Abh., Bd. 3, Seite 497. Die Buchstaben sind dort genau dieselben wie hier, nur mit dem Unter-

schiede, dass die Variationen δx, δy, δz dort mit $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ bezeichnet sind.

Helmholtz selber hat darauf aufmerksam gemacht [a. a. O. Seite 497, Note], dass man, mittelst der Ausdrücke (IV) oder (IVa, b), *Euler's Gleichungen der Aërodynamik aus dem Hamilton-schen Princip abzuleiten vermag*, was bisher noch nicht geschehen sein dürfte. In der That ist diese Ableitung, auf Grund jener Ausdrücke, leicht zu bewerkstelligen, und Weiteres hierüber beizufügen überflüssig.

W. Ahrens in Magdeburg, *Ueber eine besondere Klasse von Substitutionengruppen.* Vorgelegt von S. Lie, o. M.

Durch Einführung des wichtigen Begriffs »infinitesimale Transformation« erreichte Lie es, eine Gruppe unendlich vieler continuirlicher Transformationen darzustellen durch discontinuirliche Elemente in endlicher Anzahl, wodurch die Gruppentheorie den in der Analysis des Discontinuirlichen gebräuchlichen, den algebraisch-zahlentheoretischen Methoden zugänglich wurde. Die Gruppe von ∞^r continuirlichen Transformationen wurde repräsentirt durch r discrete infinitesimale Transformationen, und bei dieser Auffassung mussten zugleich die Analogien zwischen diesen Gruppen und den discontinuirlichen zu Tage treten. Berücksichtigt man, dass, während die Theorie der discontinuirlichen Gruppen von der multiplicativen Zahlentheorie beherrscht wird, für die der continuirlichen Gruppen eine additive Zahlentheorie ausschlaggebend ist, so sind Analogien zwischen beiden Theorien in vielen Fällen leicht erkennbar und viele Begriffe der einen Theorie auf die andere übertragbar.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich nun zunächst mit der Uebertragung des wichtigen Lie'schen Begriffs »adjungirte Gruppe« auf Substitutionengruppen und giebt insbesondere die analogen Untersuchungen zu Betrachtungen, welche ich vor Kurzem über continuirliche Gruppen anstellte[1]).

Dort wurde ich auf eine besondere Klasse continuirlicher Gruppen geführt, welche zuerst von Herrn Killing untersucht und als »Gruppen vom Range Null« bezeichnet waren. Das Studium der analogen Substitutionengruppen, welche für sich vielleicht einiges Interesse beanspruchen dürften, von denen bisher aber wohl nur specielle Formen in der Literatur auf-

1) »Zur Theorie der adjungirten Gruppe«. Diese Ber. 1897, pag. 358 (Im Folgenden mag diese Arbeit kurz mit »A« bezeichnet werden.)

getreten sind (s. darüber den Schluss dieser Arbeit), bildet den Hauptinhalt der vorliegenden Note, bei der ich mir gestatten werde, durch Anmerkungen auf die entsprechenden Untersuchungen aus der Theorie der continuirlichen Gruppen hinzuweisen.

§ 1.

Sind S_1, $S_2 \ldots S_r$ die Substitutionen einer Gruppe, so mögen dieselben durch die Substitutionen dieser Gruppe der Reihe nach transformirt werden, d. h. wir bilden $S_1^{-1} S_i S_1$, $i = 1 \ldots r$, sodann $S_2^{-1} S_i S_2$, $i = 1 \ldots r$ u. s. f. Hierdurch werden die Substitutionen der Gruppe jedesmal unter sich vertauscht und es geht also S_i in S_i' über, so dass eine solche Transformation aller Substitutionen durch eine sich durch eine Substitution $\begin{pmatrix} S_1 S_2 \ldots S_r \\ S_1' S_2' \ldots S_r' \end{pmatrix}$ darstellt. Wir erhalten so r Substitutionen von r Elementen, und zwar bilden dieselben eine Gruppe, denn die Ausführung der Transformationen $S_a^{-1} S_i S_a$ und $S_b^{-1} S_i S_b$ nach einander ist offenbar äquivalent mit der Ausführung der Transformation $(S_a S_b)^{-1} . S_i . (S_a S_b)$, und da die S unter sich eine Gruppe bilden, so auch diese r Substitutionen. Zugleich sieht man, dass diese Gruppe mit der ursprünglichen isomorph ist[1]). Wir nennen sie die zu der ursprünglichen »adjungirte Gruppe«[2]).

Unter diesen r Substitutionen ist nun, da jede Substitution S wenigstens mit sich selbst und der identischen vertauschbar ist, keine, welche alle r Elemente umsetzt, und die adjungirte Gruppe ist daher intransitiv[3]), da eine transitive Gruppe bekanntlich stets solche Substitutionen, welche alle r Elemente umsetzen, enthält[4]).

Es entsteht nun zunächst die Frage, ob diese r Substitutionen der adjungirten Gruppe verschieden sind. Angenommen, es

---

1) Vgl. Lie, Theorie d. Transformationsgruppen. I, pag. 294, Theorem 54. (Im Folgenden citiren wir dies Werk kurz »Trfgr.«.)

2) Lie, Archiv for Math. Bd. 1. Christiania 1876.

3) Vgl. Trfgr. III, pag. 673.

4) C. Jordan, »Recherches sur les substitutions«. Journal de Liouville, 2ième série, XVII, pag. 352.

wären zwei derselben gleich, so müsste also $S_a^{-1} S_i S_a = S_b^{-1} S_i S_b$, $i = 1, 2 \ldots r$ sein, woraus folgen würde:

$$(1) \qquad (S_a S_b^{-1})^{-1} S_i (S_a S_b^{-1}) = S_i, \quad i = 1 \ldots r,$$

d. h. in der ursprünglichen Gruppe müsste es alsdann eine Substitution $S_a S_b^{-1}$ geben, welche mit allen Substitutionen der Gruppe vertauschbar oder, wie man sagt, »ausgezeichnet« ist. Umgekehrt, wenn in der Gruppe eine ausgezeichnete Substitution S vorkommt, so ist die zu dieser zugehörige Substitution der adjungirten Gruppe, welche durch die Transformation $S^{-1} S_i S = S_i$ charakterisirt ist, die Identität; wenn diese Substitution S aber von der identischen verschieden ist, so enthält die adjungirte Gruppe jedenfalls weniger als r von einander verschiedene Substitutionen[1]). Man sieht weiter, dass, wenn die ursprüngliche Gruppe keine ausgezeichnete Substitution ausser der identischen enthält, ihre adjungirte Gruppe holoedrisch isomorph zu ihr ist, anderenfalls dagegen meroedrisch isomorph[2]).

Es seien nun $s_1, s_2 \ldots s_{r'}$ die in der ursprünglichen Gruppe ausgezeichneten Substitutionen. Dieselben bilden offenbar eine Untergruppe und die ganze Gruppe lässt sich in der Form

$$(2) \qquad \begin{matrix} s_1, & s_2 & \ldots & s_{r'} \\ \sigma_1 s_1, & \sigma_1 s_2 & \ldots & \sigma_1 s_{r'} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sigma_t s_1, & \sigma_t s_2 & \ldots & \sigma_t s_{r'} \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} s_1, & s_2 & \ldots & s_{r'} \\ s_1 \sigma_1, & s_2 \sigma_1 & \ldots & s_{r'} \sigma_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ s_1 \sigma_t, & s_2 \sigma_t & \ldots & s_{r'} \sigma_t \end{matrix}$$

darstellen, wo $(t+1) r' = r$ ist.

Dabei sind die Substitutionen der ersten Horizontalreihe mit allen Substitutionen der Gruppe, die jeder der übrigen Reihen ausser mit denen der ersten Reihe auch je unter sich vertauschbar.

Die adjungirte Gruppe besteht alsdann gerade aus $t+1 = \frac{r}{r'}$ Substitutionen, denn die Transformation der Substitutionen der Gruppe durch zwei Substitutionen derselben Horizontalen von (2) verursacht dieselben Vertauschungen der Substitutionen unter sich, da offenbar

---

1) Vgl. Trfgr. I, pag. 277, Theorem 49.
2) Vgl. Trfgr. I, pag. 294, Theorem 54.

$$(\sigma_j s_k)^{-1} S_i (\sigma_j s_k) = (\sigma_j s_l)^{-1} S_i (\sigma_j s_l) ,$$

wenn S, wie auch stets weiterhin, die allgemeine Substitution der Gruppe bezeichnen soll, während s und σ die in dem Schema (2) angegebenen Bedeutungen haben. Andererseits ergeben aber auch die Transformationen mit zwei Substitutionen verschiedener Zeilen stets verschiedene Vertauschungen der Substitutionen unter sich; denn wenn durch Transformation mit S_a dieselben Vertauschungen eintreten wie durch die mit S_b, so muss die Substitution $S_a S_b^{-1}$ nach (1) mit allen Substitutionen der Gruppe vertauschbar, mithin in der ersten Horizontalen von (2) enthalten sein, also etwa $S_a S_b^{-1} = s_k$, d. h. $S_a = s_k S_b$ oder S_a und S_b gehören derselben Horizontalen in (2) an.

Wir fassen die vorstehenden Entwickelungen folgendermassen zusammen:

Satz 1. »Werden die Substitutionen einer Gruppe der Reihe nach durch alle Substitutionen der Gruppe transformirt, so werden bei jeder dieser Transformationen die Substitutionen der Gruppe unter sich vertauscht, so zwar, dass dieseVertauschungen eine intransitive Gruppe bilden, welche zu der ursprünglichen isomorph ist, und zwar holoedrisch isomorph, wenn die ursprüngliche Gruppe ausser der identischen keine ausgezeichneten Substitutionen enthält; dagegen ist sie von der Ordnung $\frac{r}{r'}$ und meroedrisch (r'-stufig) isomorph zu der ursprünglichen Gruppe, wenn diese unter r Substitutionen r' ausgezeichnete enthält.«

§ 2.

Wir fragen uns jetzt nach der Form der adjungirten Gruppe von der adjungirten Gruppe, der »zweiten adjungirten Gruppe«, sowie der der successiven weiteren adjungirten Gruppen. Besitzt die ursprüngliche Gruppe keine ausgezeichnete Substitution, so sind ihre successiven adjungirten Gruppen alle unter sich identisch und von derselben Ordnung wie die Gruppe selbst. Besitzt die letztere jedoch r' ausgezeichnete Substitutionen unter r, die erste adjungirte Gruppe jedoch keine, so ist die zweite und alle folgenden, wie die erste, von der Ordnung $\frac{r}{r'}$, jedoch sind die

erste und zweite, wenn auch holoedrisch isomorph, doch — als Substitutionsgruppen betrachtet — nicht identisch (die erste vertauscht $r - r'$, die zweite $\frac{r}{r'} - 1$ Elemente), sondern erst die zweite und alle folgenden.

Besitzt nun aber die erste adjungirte Gruppe ausgezeichnete Substitutionen, ist also unter ihren $t+1$ Substitutionen $s_0', s_1' \ldots s_t'$ — welche so angeordnet sein mögen, dass s_i' den Substitutionen $\sigma_i s_k$, $k = 1 \ldots r'$, in der isomorphen ursprünglichen Gruppe (2) entspricht ($\sigma_0 = 1$) — wenigstens eine ausser der identischen s_0' mit allen vertauschbar, etwa s_1', so muss also

$$s_1'^{-1} s_i' s_1' = s_i' , \quad i = 1, 2 \ldots t ,$$

sein und wegen des Isomorphismus offenbar eine Beziehung von der Form

$$(\sigma_1 s_k)^{-1} S_i (\sigma_1 s_m) = S_i s_n$$

bestehen, welche sich stets auf die Form

$$(\sigma_1 s_k)^{-1} S_i (\sigma_1 s_k) = S_i s_l \tag{3}$$

bringen lässt.

Eine solche Relation gilt dann nicht nur für die Transformationen mit einem $\sigma_1 s_k$, sondern für die mit allen Substitutionen derselben Horizontalen von (2). Sollen also in der ersten adjungirten Gruppe eine oder mehrere Substitutionen ausgezeichnet sein, so müssen in (2) ausser der ersten eine oder mehrere Horizontalreihen von Substitutionen so beschaffen sein, dass sie eine beliebige Substitution zwar nicht in sich, aber doch in eine derselben Horizontalen transformiren. Da eine Relation von der Form (3) für beliebiges S_i besteht, so ist auch

$$\begin{aligned} (\sigma_1 s_k)^{-1} S_i^{-1} (\sigma_1 s_k) &= S_i^{-1} s_\lambda \\ &= s_\lambda S_i^{-1} , \end{aligned}$$

also

$$S_i^{-1} (\sigma_1 s_k) S_i = (\sigma_1 s_k) s_\lambda = \sigma_1 s_m ,$$

die Substitutionen der erwähnten Art gehen also selbst bei Transformation mit irgend einer Substitution in Substitutionen ihrer Horizontalen über. Indem wir die Gleichung (3) in den Formen

$$S_i \,.\, (\sigma_1 s_k) = (\sigma_1 s_k) \,.\, S_i \,.\, s_l$$

oder

$$(\sigma_1 s_k) \,.\, S_i = S_i \,.\, (\sigma_1 s_k) \,.\, s_l^{-1}$$

schreiben, wollen wir sagen: der Commutator [1]) der Substitutionen $\sigma_i s_k$, $k = 1 \ldots r'$, mit einer beliebigen Substitution ist eine der ausgezeichneten Substitutionen.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die erste adjungirte Gruppe r'' ausgezeichnete Substitutionen (einschliesslich der identischen) besitzt, ist also die, dass die Substitutionen von $r'' - 1$ Zeilen in (2) ausser der ersten zu Commutatoren mit beliebigen Substitutionen stets Substitutionen der ersten Zeile haben. Alsdann ist die zweite adjungirte Gruppe von der Ordnung $\frac{r}{r' r''}$.

Damit nun die dritte adjungirte Gruppe wieder von niederer Ordnung $\left(\frac{r}{r' r'' r'''}\right)$ als die zweite ist, muss die letztere ausgezeichnete Substitutionen (r''' einschliesslich der identischen) besitzen, die erste adjungirte Gruppe muss also ausser den in ihr ausgezeichneten r'' Substitutionen $r''(r''' - 1)$ Substitutionen besitzen, welche zu Commutatoren mit beliebigen Substitutionen die in ihr ausgezeichneten Substitutionen besitzen, mithin die ursprüngliche Gruppe ausser ihren r' ausgezeichneten und den $r'(r'' - 1)$ Substitutionen, welche nur ausgezeichnete Substitutionen zu Commutatoren haben, noch $r' r''(r''' - 1)$ Substitutionen, welche nur Substitutionen aus den beiden zuvor genannten Kategorien zu Commutatoren haben, und in derselben Weise geht dies fort, so dass wir schliesslich sagen können:

Satz 2. »Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Ordnungen der successiven adjungirten Gruppen einer Gruppe beständig abnehmen bis zur identischen Substitution ist die, dass sich eine solche Anordnung in der Gruppe treffen lässt, dass eine letzte Klasse alle r' in der Gruppe ausgezeichneten Substitutionen enthält, eine vorletzte alle $r'(r'' - 1)$ Substitutionen, deren Commutatoren mit beliebigen Substitutio-

---

1) Diese Bezeichnung entnehme ich einer Arbeit des Herrn Dedekind, Mathem. Ann. Bd. 48, pag. 558. — Es sei beiläufig bemerkt, dass alle Substitutionen, welche als Commutatoren für irgend zwei Substitutionen der Gruppe auftreten können, für sich eine Untergruppe der gegebenen Gruppe bilden, und zwar entspricht diese Untergruppe der »derivirten Gruppe« Lie's. Sie ist u. U. gleich der Gruppe selbst, und zwar bei einer Kategorie von Gruppen, welche die einfachen Gruppen als speciellere Klasse enthalten und welche man vielleicht als die der »autoderivirten« Gruppen bezeichnen könnte.

nen der letzten Klasse angehören, eine drittletzte alle $r'r''(r'''-1)$, deren Commutatoren mit beliebigen Substitutionen einer der späteren (schon erwähnten) Klassen angehören u. s. w. Alsdann sind die successiven adjungirten Gruppen bezw. von den Ordnungen $\frac{r}{r'}$, $\frac{r}{r'r''}$, $\frac{r}{r'r''r'''}$ u. s. f.[1]).

Es ist ersichtlich, dass, wenn $s_1, s_2 \dots s_{r'}$ die ausgezeichneten Substitutionen, also die der letzten Klasse sind, die der beiden letzten in der Form $s''_{i_2} \cdot s_{i_1}$; $\begin{matrix} i_2 = 1, 2 \dots r''' \\ i_1 = 1, 2 \dots r' \end{matrix}$ $(s_1 = s'_1 = 1)$ darstellbar sind, die der drei letzten in der Form:

$$\begin{matrix} s'''_{i_3} \cdot s'_{i_2} \cdot s_{i_1}; & i_3 = 1, 2 \dots r''' \\ & i_2 = 1, 2 \dots r'' \\ & i_1 = 1, 2 \dots r' \end{matrix} \qquad (s_1 = s'_1 = s''_1 = 1) \text{ u. s. f.,}$$

schliesslich die ganze Gruppe in der Form:

$$(4) \qquad \begin{matrix} s^{(\varrho-1)}_{i_\varrho} s^{(\varrho-2)}_{i_{\varrho-1}} \dots s''_{i_3} \cdot s'_{i_2} \cdot s_{i_1}; & i_k = 1, 2 \dots r^{(k)} \\ & k = 1, 2 \dots \varrho \end{matrix}$$
$$s_1 = s'_1 = s''_1 \cdots = s_1^{(\varrho-1)} = 1; \quad r = \prod_{k=1\dots\varrho} r^{(k)}.$$

Eine Substitution gehört dann der k-letzten Klasse an, wenn in dieser Form (4) dargestellt die erste (von links gerechnet) von 1 verschiedene Substitution s in ihr den oberen Index $k-1$ hat, und ihr Commutator mit einer beliebigen Substitution ist also stets eine Substitution der $(k+1)^{\text{ten}}$ oder einer späteren Klasse, andererseits giebt es aber auch mindestens eine Substitution, mit der sie einen Commutator aus der $(k+1)^{\text{ten}}$ und nicht aus einer späteren Klasse hat, da sie sonst selbst einer späteren als der k^{ten} Klasse angehörte.

Es ist ersichtlich, dass die Potenzen einer Substitution derselben oder einer späteren Klasse als diese angehören, da, wenn man sie auf die Form (4) bringt, durch die Umstellungen immer nur Commutatoren hinzutreten, welche späteren Klassen angehören, als die darin vorkommende Substitution niedrigster Klasse.

---

1) Vgl. »A« pag. 362—363.

Der Einfachheit halber bezeichnen wir jetzt Gruppen von der betrachteten Art als Gruppen von der Form (4) und betrachten jetzt wieder eine solche Gruppe und eine beliebige Untergruppe von ihr. Ist nun s eine Substitution der Untergruppe, so zwar, dass keine Substitution der Untergruppe in der ganzen Gruppe (4) einer späteren Klasse als s angehört, und ist S eine beliebige Substitution der Untergruppe, so gehört auch $s^{-1}Ss$ der Untergruppe an; andererseits ist $s^{-1}Ss = S\bar{s}$, wo $\bar{s}$ einer späteren Klasse als s in der ganzen Gruppe angehört. Da dann aber auch $\bar{s}$ der Untergruppe angehören muss, so hätten wir einen Widerspruch mit der über s gemachten Annahme, wenn nicht $\bar{s} = 1$ ist. Es ist somit s in der Untergruppe ausgezeichnet, und dasselbe gilt offenbar von allen in der Untergruppe vorkommenden Substitutionen aus derselben Klasse wie s. Ist nun s' eine Substitution aus der nächst der Klasse von s letzten in der Untergruppe vertretenen Klasse und S wieder eine beliebige Substitution der Untergruppe, so gehört $s'^{-1}Ss' = S\bar{s}'$ der Untergruppe an und damit auch $\bar{s}'$. Da dies andererseits einer späteren Klasse als s' angehört, so muss es entweder $= 1$ und s' auch in der Untergruppe ausgezeichnet sein, oder $\bar{s}'$ ist eine der in der Untergruppe ausgezeichneten, schon vorher erwähnten Substitutionen aus der Klasse von s, und s' ein Repräsentant einer vorletzten Klasse in der Untergruppe, deren Substitutionen zu Commutatoren mit beliebigen Substitutionen der Untergruppe die in der Untergruppe ausgezeichneten Substitutionen haben. In dieser Weise sieht man, dass sich auch in der Untergruppe eine solche Anordnung der Substitutionen in Klassen nach denselben Principien wie in der ganzen Gruppe durchführen lässt, und wir dürfen daher sagen:

Satz 3. »Nehmen die Ordnungen der successiven adjungirten Gruppen einer Gruppe beständig ab bis zur identischen Substitution, so gilt dies auch für die successiven adjungirten Gruppen jeder ihrer Untergruppen« [1]).

Dies gilt insbesondere auch für die Untergruppen von der Ordnung pq ($p \gtrless q$, beides Primzahlen), und es kann daher von den beiden an sich für eine solche Gruppe möglichen Typen [2]) nur

---

1) Vgl. »A« pag. 364, Satz 1.

2) Hölder, Mathem. Ann. 43, pag. 312.

der eine vorkommen, nämlich der, bei dem alle Substitutionen der Gruppe mit einander vertauschbar sind. Bei den Gruppen von der Ordnung p^2 (p Primzahl) sind stets alle Substitutionen mit einander vertauschbar [1]) und es besitzen daher die Gruppen von der Form (4) nur solche Untergruppen von der Ordnung $p \cdot q$ ($p \gtrless q$ und beides Primzahlen), deren Substitutionen vertauschbar sind. Diese Eigenschaft entspricht offenbar der der ihnen analogen continuirlichen »Gruppen vom Range Null«, nur zweigliedrige Untergruppen mit vertauschbaren Transformationen zu besitzen [2]).

§ 3.

Zum Schluss mag noch der Nachweis geführt werden, dass die im vorigen Paragraphen betrachteten Gruppen von der Form (4) zu den auflösbaren gehören [3]). Es sei

$$(4') \qquad \sigma_1 , \sigma_2 \ldots \sigma_{r(\varrho)}$$

die letzte, von der identischen Substitution verschiedene adjungirte Gruppe einer solchen Gruppe (4). Ist $r(\varrho)$ eine zusammengesetzte Zahl und etwa durch die Primzahl p theilbar, so giebt es nach einem bekannten Satze von Cauchy in dieser Gruppe eine Untergruppe von der Ordnung p

$$(5') \qquad \sigma_1 , \sigma_2 \ldots \sigma_p .$$

Da nun die Gruppe (4') zu der ursprünglichen Gruppe isomorph ist, so ist (5') zu einer Untergruppe von (4) isomorph, und zwar zu

$$(5) \qquad s_{i_\varrho}^{(\varrho-1)} s_{i_{\varrho-1}}^{(\varrho-2)} \ldots\ldots s_{i_3}'' s_{i_2}' s_{i_1} ; \quad \begin{matrix} i_k = 1, 2 \ldots r^{(k)} \\ k = 1, 2 \ldots \varrho-1 \\ i_\varrho = 1, 2 \ldots p \end{matrix} ,$$

einer Gruppe von der Ordnung $\frac{r}{r^{(\varrho)}} \cdot p$. Diese Gruppe (5) ist nun in der ganzen (4) invariant [4]), da irgend eine Substitution

---

1) Hölder, l. c. pag. 303.

2) Killing, Math. Ann. 31.

3) Vgl. »A« pag. 364.

4) Bei der schwankenden Terminologie bemerke ich, dass ich — der in diesem Punkte jedenfalls wohl älteren und zweckmässigeren Bezeichnungsweise Lie's folgend — unter »invarianter Untergruppe« das verstehe, was z. B. in der »Substitutionentheorie« von Netto (pag. 85) »ausgezeichnete Untergruppe« genannt ist.

sich bei Transformationen multiplicirt mit Substitutionen der zweiten oder späterer Klassen und (5) ja alle Klassen ausser der ersten vollzählig enthält. Es enthält also die Gruppe (4) nicht nur die ja natürlich in ihr invariante Untergruppe

$$(4'') \qquad s_{i_{\varrho-1}}^{(\varrho-1)} \ldots\ldots s''_{i_3} s'_{i_2} s_{i_1}; \quad \begin{matrix} i_k = 1, 2 \ldots r^{(k)} \\ k = 1, 2 \ldots \varrho - 1 \end{matrix}$$

von der Ordnung $\frac{r}{r^{(\varrho)}}$, sondern auch eine (4'') enthaltende invariante Untergruppe (5) von der Ordnung $p \cdot \frac{r}{r^{(\varrho)}}$, und zwar ist offenbar auch (4'') in (5) invariant. Wegen der Existenz einer in der Gruppe (4) invarianten Untergruppe von der Ordnung $p \cdot \frac{r}{r^{(\varrho)}}$ giebt es eine zu (4) isomorphe Gruppe (6) von der Ordnung $\frac{r^{(\varrho)}}{p}$. Ist nun $\frac{r^{(\varrho)}}{p}$ noch eine zusammengesetzte Zahl und etwa durch die Primzahl q ($\gtrless p$) theilbar, so lässt sich in (6) eine Untergruppe von der Ordnung q angeben, welche offenbar zu einer Untergruppe von (4) von der Ordnung $\frac{r}{r^{(\varrho)}} \cdot p \cdot q$ isomorph ist. Diese letztere Untergruppe enthält die Untergruppe (5), und zwar als invariante, und ist selbst in (4) invariant. In dieser Weise können wir offenbar fortfahren, und wir sehen, dass es so gelingt, zwischen die ursprüngliche Gruppe und die in ihr invariante Untergruppe von der Ordnung $\frac{r}{r^{(\varrho)}}$, welche der identischen Substitution der ihr meroedrisch isomorphen letzten adjungirten Gruppe von der Ordnung $r^{(\varrho)} > 1$ entspricht, eine Reihe von Gruppen so einzuschieben, dass jede als invariante Untergruppe in allen vorhergehenden enthalten ist und die Factoren der Zusammensetzung für diese Reihe Primzahlen sind. Wenn dies Verfahren aber zwischen diesen beiden Gruppen ausführbar ist, so muss es auch zwischen der einen von beiden (4'') und der Untergruppe von (4)

$$(7) \qquad s_{i_{\varrho-2}}^{(\varrho-2)} \ldots\ldots s''_{i_3} s'_{i_2} s_{i_1}; \quad \begin{matrix} i_k = 1, 2 \ldots r^{(k)} \\ k = 1, 2 \ldots \varrho - 2 \end{matrix}$$

möglich sein, welche der identischen Substitution der der adjungirten Gruppe (4') nächst vorhergehenden adjungirten Gruppe bei deren isomorpher Beziehung auf (4) entspricht; brauchen wir

uns doch nur vorzustellen, (4″) sei die ursprüngliche Gruppe, dann ist (7) die der identischen Substitution ihrer letzten zu ihr isomorphen adjungirten Gruppe von der Ordnung $r^{(\varrho-1)} > 1$ entsprechende Untergruppe und nimmt dieselbe Stelle ein wie zuvor (4″), da (4″) nach Satz 3 (§ 2) als Untergruppe einer Gruppe von der Form (4), auch von der Form (4) ist. Man erkennt so, dass, wie behauptet war, die Gruppen von der Form (4) auflösbar sind.

Einen speciellen, wenn auch trivialen Fall der betrachteten Gruppen bilden die Abel'schen Gruppen; einen weiteren Specialfall bilden nach den Untersuchungen von Herrn Sylow[1]) die Gruppen, deren Ordnung die Potenz einer Primzahl p ist, für diesen Fall werden unsere Zahlen r', r'' .... alle $= p$. Weiter gehören hierher die Hamilton'schen Gruppen des Herrn Dedekind[2]), welche — in unserer Terminologie gesprochen — aus zwei Klassen — gegenüber den Abel'schen Gruppen als einklassigen — bestehen. Diese Gruppen sind, wie Herr Dedekind l. c. zeigt, ausser den Abel'schen Gruppen die einzigsten, deren sämmtliche Untergruppen invariant sind. Es sei hier noch die Bemerkung gestattet, dass der Forderung, alle Untergruppen seien invariante, in der Theorie der continuirlichen Gruppen natürlich nur die Abel'schen Gruppen genügen; dass jedoch, wenn man von dieser Forderung die eingliedrigen Untergruppen ausnimmt, sich ausserdem nur noch die nicht Abel'sche dreigliedrige Gruppe vom Range Null ergiebt, worauf ich gelegentlich näher eingehen werde.

Rostock, den 9. Juli 1897.

---

1) Math. Ann. 5, pag. 588, Théorème III.

2) »Ueber Gruppen, deren sämmtliche Theiler Normaltheiler sind«. Math. Ann. 48, pag. 548—561.

K. Rohn, *Ueber den Zusammenhang der von Flächen beliebiger Ordnung auf einer Raumcurve ausgeschnittenen Punktgruppen mit denen ihrer Restcurven.*

Bei der Untersuchung der Raumcurven spielen in erster Linie die auf denselben liegenden Punktgruppen eine Rolle. Zur Erzeugung der allgemeinsten Schaaren von solchen Punktgruppen dienen die zur Raumcurve adjungirten Flächen. Zu ihnen gelangt man, indem man durch die Raumcurve R_n^p von der Ordnung n und dem Geschlecht p irgend zwei beliebige Flächen F_λ und F_μ von der Ordnung λ resp. μ legt. Diese schneiden sich noch in einer weiteren Curve R' von der Ordnung n' und dem Geschlechte p', wobei $n + n' = \lambda\mu$ ist, und jede durch R' gehende Fläche heisst dann adjungirt. R' selbst heisst Restcurve von R. Im Speciellen schneiden die adjungirten Flächen von der Ordnung $(\lambda + \mu - 4)$ auf der R die Specialgruppen und Specialschaaren aus. Bezeichnen wir allgemein jede durch R' gehende Fläche mit Φ und jede durch R gehende Fläche mit Ψ, so giebt es p linear unabhängige Flächen $\Phi_{\lambda+\mu-4}$ (abgesehen von den Flächen, die gleichzeitig R und R' enthalten); sie schneiden die R in Specialgruppen von je $(2p - 2)$ Punkten. Wir wollen ferner annehmen, dass es ϱ_1 linear unabhängige Flächen $\Phi_{\lambda+\mu-5}$ und allgemein ϱ_i linear unabhängige Flächen $\Phi_{\lambda+\mu-4-i}$ gäbe, wobei immer die Flächen ausser Betracht bleiben, die gleichzeitig durch R und R' gehen. Die Reihe der Zahlen ϱ_i wird an einer gewissen Stelle ϱ_k abbrechen, so dass alle ϱ_i gleich Null zu nehmen sind, für die $i > k$ ist.

Die Flächen $\Phi_{\lambda+\mu-5}$ schneiden auf R eine Specialschaar von der Mannigfaltigkeit $\varrho_1 - 1$ aus, deren Gruppen je $2p - 2 - n$ Punkte enthalten. Nach dem Riemann-Roch'schen Satze existirt zu ihr eine Restschaar von Gruppen von je n Punkten, die ebenfalls eine Specialschaar und zwar eine solche vom Index ϱ_1 ist; d. h. durch jede dieser Gruppen gehen ϱ_1 linear unabhängige

Flächen $\Phi_{\lambda+\mu-4}$. Die Mannigfaltigkeit der letzteren Schaar ist $(n-p+\varrho_1)$. Analog schneiden die Flächen $\Phi_{\lambda+\mu-4-i}$ auf R eine Specialschaar von der Mannigfaltigkeit $\varrho_i - 1$ aus, deren Gruppen je $(2p-2-ni)$ Punkte enthalten. Zu ihr giebt es eine Restschaar von Gruppen von je ni Punkten, welche eine Specialschaar vom Index ϱ_i darstellt, so dass ihre Mannigfaltigkeit gleich $(in-p+\varrho_i)$ wird.

Wählt man die Curve R' als Ausgangscurve und schneidet sie mit den zu ihr adjungirten Flächen, die also dann durch R gehen, so kann man ganz die gleichen Betrachtungen anstellen. Es werden dann die Flächen $\Psi_{\lambda+\mu-4-j}$ auf der R' eine Specialschaar von der Mannigfaltigkeit $\varrho_j' - 1$ ausschneiden; sie führt dann nach dem Riemann-Roch'schen Satze auf R' zu einer Specialschaar von Gruppen von je jn' Punkten, deren Index ϱ_j' ist, so dass dieselbe die Mannigfaltigkeit $(jn'-p'+\varrho_j')$ besitzt. Auch die Reihe der Zahlen ϱ_j' wird an einer bestimmten Stelle ϱ_l' abbrechen, dann sind alle ϱ_j', für die $j>l$ ist, gleich Null zu nehmen.

Eine beliebige Ebene schneide nun die Curven R und R' in den Gruppen G_n und $G'_{n'}$; ferner seien $2G_n$, $3G_n$, ... iG_n und $2G'_{n'}$, $3G'_{n'}$, $iG'_{n'}$ die zweifach, dreifach, ..., i-fach gezählten Gruppen G_n resp. $G'_{n'}$. Die Schaar *aller* zu G_n resp. $G'_{n'}$ corresidualen Gruppen mag mit g_n resp. $g'_{n'}$ bezeichnet werden; analog sollen g_{in} und $g'_{in'}$, die Schaaren *aller* zu iG_n resp. $iG'_{n'}$ corresidualen Gruppen sein. Dann ist g_{in} die oben genannte, auf R liegende Schaar, welche die Restschaar zu der von den Flächen $\Phi_{\lambda+\mu-4-i}$ auf R ausgeschnittenen Schaar bildet; die gleiche Rolle spielt die Schaar $g'_{jn'}$ für die Curve R'.

Die Schaar g_{in} — mag sie nun Specialschaar sein oder nicht — wird entweder *ganz* oder *theilweise* von Flächen i^{ter} Ord. auf der Curve R ausgeschnitten. Wir bezeichnen die von den Flächen i^{ter} Ord. auf R ausgeschnittene Schaar mit γ_{in}; die Mannigfaltigkeit der Theil- oder Vollschaar γ_{in} sei Z_i $(Z_i \leqq in-p+\varrho_i)$. Die entsprechende Bedeutung sollen $\gamma'_{jn'}$ und Z_j' für die bezügliche Schaar auf R' haben.

Es gilt nun der fundamentale Satz: *Zerfällt die Schnittcurve zweier Flächen F_λ und F_μ in zwei Theile R und R', und sind i und j zwei Zahlen, für welche die Beziehung $i+j=\lambda+\mu-4$ gilt, so ist die Mannigfaltigkeit der von den Flächen i^{ter} Ord. auf R ausgeschnittenen Schaar um ebenso viel kleiner als die der*

zugehörigen Vollschaar, wie die Mannigfaltigkeit der von den Flächen j^{ter} Ord. auf R' ausgeschnittenen Schaar kleiner ist als die der ihr zugehörigen Vollschaar. Schneiden speciell die Flächen i^{ter} Ord. auf R eine Vollschaar aus, so thun dieses auch die Flächen j^{ter} Ord. auf R'.

Die Mannigfaltigkeiten der genannten Vollschaaren g_{in} und $g'_{jn'}$ sind:

$$in-p+\varrho_i \text{ und } jn'-p'+\varrho_j',\ i+j=\lambda+\mu-1,\ n+n'=\lambda\mu.$$

Für $i>k$ ist $\varrho_i=0$, für $j>l$ ist $\varrho_j'=0$ zu nehmen.

Die Mannigfaltigkeit der auf der Curve R liegenden Schaar γ_{in} ist:

$$Z_i=N_i-1-[N_{i-\lambda}]-[N_{i-\mu}]-\varrho_j',$$

und die der auf der Curve R' liegenden Schaar $\gamma'_{jn'}$ ist:

$$Z_j'=N_{j-1}-[N_{j-\lambda}]-[N_{j-\mu}]-\varrho_i,$$

wenn N_τ den Werth: $\frac{1}{6}(\tau+1)(\tau+2)(\tau+3)$ bedeutet.

Denn N_i ist die Zahl aller linear unabhängigen Flächen i^{ter} Ord. überhaupt und ϱ_j' ist die der Flächen i^{ter} Ord., welche durch R gehen, aber R' nicht enthalten. Zugleich ist:

$$[N_{i-\lambda}]+[N_{i-\mu}]-[N_{i-\lambda-\mu}]$$

die Zahl aller linear unabhängigen Flächen i^{ter} Ord. durch die beiden Curven R und R', wobei für $[N_\tau]$ der Werth $\frac{1}{6}(\tau+1)(\tau+2)(\tau+3)$ oder 0 zu setzen ist, je nachdem $\tau\geqq 0$ oder $\tau<0$ ist. Im vorliegenden Falle ist aber $i\leqq\lambda+\mu-1$, also $[N_{i-\lambda-\mu}]=0$.

Nach dem obigen Satze müsste sonach:

$$in-p+\varrho_i-Z_i=jn-p'+\varrho_j'-Z_j', \text{ oder:}$$

$$in-p-N_i+[N_{i-\lambda}]+[N_{i-\mu}]=jn'-p'-N_j+[N_{j-\lambda}]+[N_{j-\mu}]$$

sein.

Dass dieses nun in der That der Fall ist, sieht man leicht ein, wenn man bedenkt, dass nach einem bekannten Satze für irgend zwei Curven, die den vollen Schnitt zweier Flächen F_λ und F_μ bilden, die Beziehung besteht:

$$2p-2p'=(n-n')(\lambda+\mu-1)=(n-n')(i+j),$$

oder: $in-jn'-p+p'=in'-jn-p'+p=\frac{1}{2}(i-j)(n+n')$.

Dadurch geht nämlich jene Gleichung über in:

$$\tfrac{1}{2}(i-j)(n+n') = N_i - N_j - [N_{i-\lambda}] + [N_{j-\lambda}] - [N_{i-\mu}] + [N_{j-\mu}],$$

oder: $$\tfrac{1}{2}(i-j)(n+n') = N_i - N_j - N_{i-\lambda} - N_{i-\mu}.$$

Es ist nämlich $[N_{j-\mu}] = [N_{\lambda-i-4}] = -\{N_{i-\lambda}\}$, wenn $\{N_\tau\}$ den Werth $\frac{1}{6}(\tau+1)(\tau+2)(\tau+3)$ oder 0 bedeutet, je nachdem $\tau < 0$ oder $\tau \geqq 0$ ist. Demnach wird:

$$[N_{i-\lambda}] - [N_{j-\mu}] = N_{i-\lambda} \text{ und ebenso } [N_{i-\mu}] - [N_{j-\mu}] = N_{i-\mu}.$$

Durch eine einfache Ausrechnung erhält man endlich für beide Seiten jener Gleichung den Werth: $\frac{\lambda\mu}{2}(i-j)$, und hiermit ist der Beweis unseres Satzes erbracht.

Bei der Beweisführung ist allerdings vorausgesetzt, dass die Raumcurve R eine irreducible Restcurve R' besitze. Die Giltigkeit jenes Satzes lässt sich jedoch unschwer auch auf den Fall einer reduciblen Restcurve R' ausdehnen.

Ist R' nicht reducibel, so schneiden die Flächen von der Ordnung $(\lambda+\mu-4)$ auf R eine Vollschaar aus, und in Folge dessen thun dieses auch alle Flächen von höherer als der $(\lambda+\mu-4)^{\text{ten}}$ Ordnung. In der That geht der Ausdruck $in - p + \varrho_i - Z_i$ für $i = \lambda+\mu-4$ über in: $n(\lambda+\mu-4) - p - N_{\lambda+\mu-4} + 1 + N_{\mu-4} + N_{\lambda-4} - p'$ und dessen Werth ist gleich Null.

Zum Schluss mag noch erwähnt werden, dass man zu der Curve R' eine neue Restcurve R'', zu dieser abermals eine neue Restcurve R''' u. s. w. bilden kann, und dass der obige Satz auch die Punktgruppen der Curve R mit denen der Curven R'', R''' u. s. w. verknüpft.

K. Rohn, *Die Raumcurven auf den Flächen IV^{ter} Ordnung.*

In der Sitzung vom 5. Februar 1894 hat der Verfasser eine Arbeit vorgelegt, welche die Raumcurven auf den Flächen dritter Ordnung behandelt und eine vollständige Eintheilung solcher Raumcurven von gegebener Ordnung und gegebenem Geschlechte in einzelne Familien und die Aufzählung dieser Familien ermöglicht. Es zeigt sich, wie die Zahl dieser Familien bedeutend wächst, wenn die Ordnung der zugehörigen Curven zunimmt; so ergab sich, dass z. B. die Curven von der Ord. 30 und dem Geschlecht 78 bereits 20 verschiedene Familien bilden. Dabei wurde gefunden, dass die zu den einzelnen Raumcurven gehörigen Restcurven niedrigster Ordnung fast immer reducibel sind und mehrfach zählende Geraden als Bestandtheile enthalten [1]).

Bei den Raumcurven auf den Flächen 4ter Ord. ist die Sachlage eine ganz andere. Es wird sich zeigen, dass bei gegebener Ordnung und gegebenem Geschlechte stets nur eine einzige Familie existirt, deren Restcurve niedrigster Ordnung irreducibel ist. Daneben kann es noch Familien geben, deren Restcurve niedrigster Ordnung reducibel ist. In diesem Falle besteht die Restcurve entweder aus mehreren *äquivalenten* Raumcurven vom Geschlechte 1 oder aus einer einzigen mehrfach zählenden Raumcurve vom Geschlechte 0. Am Schlusse dieses Aufsatzes befindet

---

1) Die Anmerkung auf Seite 101 in der citirten Arbeit bedarf einer kleinen Berichtigung. Die rationalen Raumcurven 6ter Ord. mit 24 Constanten, die zu $a_1^2 b_1^2 a_3^2$ äquivalent sind, und die Curven 6ter Ord. mit 23 Constanten, die zu $a_1^2 b_2^3 a_3$ äquivalent sind, sind als zwei verschiedene Curvenfamilien aufgezählt. Das ist nur berechtigt, wenn man diese Curven auf den Flächen 3ter Ord. betrachtet; dagegen wird man diese Curven im gewöhnlichen Sinne zu einer einzigen Familie rechnen müssen, da man hierbei von den Flächen 3ter Ord. als Träger dieser Curven absieht.

sich eine Tabelle aller Curven bis zur 24ten Ord.; ausserdem sind Tabellen für die Curven 40ster bis 43ster Ord. beigefügt.

Auch hier sei nochmals auf die beiden mit dem Steinerpreise gekrönten Arbeiten von Noether: »Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven, Abhandl. der Acad. der Wissensch. zu Berlin 1883«, und Halphen: »Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques, Journ. de l'école polytechn.«, hingewiesen.

1. Aequivalente Raumcurven auf der F_4.

Es sei R_n^p eine beliebige irreducible Raumcurve von der Ordnung n und dem Geschlechte p auf einer Fläche 4ter Ord. F_4; die Zahl ihrer scheinbaren Doppelpunkte ist dann: $h = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - p$. Ferner möge R' von der Ordnung n', dem Geschlechte p' und $h' = \frac{1}{2}(n'-1)(n'-2) - p'$ scheinbaren Doppelpunkten eine irreducible Restcurve ohne *wirkliche* Doppelpunkte sein. Beide Curven zusammen werden den vollständigen Schnitt der F_4 mit einer Fläche F_λ ausmachen. Die obige Voraussetzung über die Curve R' lässt sich offenbar stets erfüllen, wenn man die Ordnung λ der Fläche F_λ genügend gross wählt. Zwischen den Zahlen n, p, h und n', p', h' bestehen die bekannten Relationen

$$h - h' = \tfrac{1}{2}(n-n')(\lambda-1), \quad n + n' = 4\lambda,$$
$$p - p' = \tfrac{1}{2}(n-n')\lambda,$$
$$s = n\lambda - 2(p-1) = n'\lambda - 2(p'-1),$$

wo s die Anzahl der Schnittpunkte von R und R' bedeutet.

Die Flächen durch die Restcurve R' schneiden auf der R_n^p die Schaaren von Punktgruppen aus, deren entsprechende Schaaren auf der Projection der R_n^p von den adjungirten Curven ausgeschnitten werden. Speciell liefern die Flächen λ^{ter} Ord durch R' auf der R_n^p die ∞^{p-1}-Schaar von Gruppen von je $2(p-1)$ Punkten; diese entsprechen auf der Projection unserer Raumcurve den Gruppen, die auf den adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ord. liegen. Ausser der F_λ, welche unsere R_n^p ausschneidet, giebt es also durch die Restcurve R' noch ∞^{p-1} Flächen λ^{ter} Ord. modulo F_4, d. h. durch R' giebt es ∞^{p-1} Flächen λ^{ter} Ord., wenn man von allen Flächen absieht, die in die F_4 und eine Fläche $(\lambda-4)^{\text{ter}}$ Ord. zerfallen. Im Ganzen

gehen also modulo F_4 durch R' noch ∞^p Flächen λ^{ter} Ord., *welche die F_4 in ∞^p Raumcurven schneiden, die zu R_n^p äquivalent sind.* Unter äquivalenten Curven sind dabei solche verstanden, die von der gleichen Ordnung wie R_n^p sind und durch die nämliche Restcurve zu einem vollen Schnitt ergänzt werden. Ganz in der gleichen Weise erkennt man, *dass es p'-fach unendlich viele Curven giebt, die zu R' äquivalent sind.*

Die Mannigfaltigkeit der Flächen λ^{ter} Ord. modulo F_4 ist:

$$\tfrac{1}{6}(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)-1-\tfrac{1}{6}(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1)=2\lambda^2+1.$$

Da nun durch die R_n^p noch p'-fach unendlich viele von diesen Flächen hindurchgehen, so schneiden alle Flächen λ^{ter} Ord. auf der R_n^p eine Schaar von Gruppen von je $n\lambda$ Punkten aus, deren Mannigfaltigkeit $(2\lambda^2-p')$ beträgt. Nun ist aber $2\lambda^2-p'=n\lambda-p$; die Flächen λ^{ter} Ord. liefern also auf R_n^p eine $\infty^{n\lambda-p}$-Schaar von Gruppen $G_{n\lambda}$. Die vorliegende Schaar ist aber keine Specialschaar, denn alle Specialgruppen liegen auf Flächen λ^{ter} Ord., die R' enthalten; demnach bilden *alle* zu einer Gruppe $G_{n\lambda}$ coresidualen Gruppen eine $\infty^{n\lambda-p}$-Schaar. Die Flächen λ^{ter} Ord. schneiden somit *alle* zu einander coresidualen Gruppen einer Schaar, also eine Vollschaar aus. Wir erhalten so den Satz: *Ist R_n^p eine auf einer F_4 liegende Raumcurve, so wird sie von den Flächen einer beliebigen Ordnung λ in einer Vollschaar geschnitten, sobald es unter diesen Flächen eine giebt, die jene Curve enthält und die F_4 ausserdem in einer irreducibeln Restcurve schneidet.*

Zunächst ist dieser Satz allerdings nur für den Fall einer Restcurve R' bewiesen, die nicht nur irreducibel, sondern auch frei von Doppelpunkten vorausgesetzt wurde. Falls aber auf der F_4 eine irreducible Curve mit Doppelpunkten existirt, so ist die allgemeine dazu äquivalente Curve frei von solchen. Zum Beweise dieser Behauptung nehmen wir einen Augenblick an, die Curve R' besitze δ' Doppelpunkte; dann ist ihr Geschlecht $p'=\frac{1}{2}(n'-1)(n'-2)-h'-\delta'$ und es besteht die Relation: $p-(p'+\delta')=\frac{1}{2}\lambda(n-n')$. Geht nun eine F_λ durch $(n\lambda-p+1)$ Punkte der R_n^p, so enthält sie diese Curve ganz. Die Flächen F_λ durch die R_n^p bilden deshalb mindestens eine Mannigfaltigkeit von der Grösse $(2\lambda^2-n\lambda+p)=p'+\delta'$; eine gleiche Mannigfaltigkeit bilden auch alle zu R' äquivalenten Curven. Aber diese kann auch nicht grösser als $p'+\delta'$ sein, da die R' von allen

äquivalenten Curven durch ihre δ' Doppelpunkte nur noch in einer $(p'-1)$-fach unendlichen Schaar geschnitten werden kann. Die Curve R' bestimmt jedoch mit irgend einer äquivalenten Curve, die keinen der δ' Doppelpunkte besitzt, einen Büschel, dessen Curven — abgesehen von einzelnen Curven — frei von Doppelpunkten sind. Das beweist die obige Behauptung.

Wir wollen nun die äquivalenten Curven zu einer reduciblen Curve $R' = R_1 + R_2$ näher untersuchen. Dabei mögen diese Curven die Geschlechtszahlen p_1 und p_2 besitzen, sich gegenseitig in δ' Punkten schneiden und mit R_n^p zusammen den vollen Schnitt der F_4 mit einer F_λ bilden. Genau wie vorher folgert man, dass die Flächen F_λ durch die R_n^p mindestens eine Mannigfaltigkeit von der Grösse $(2\lambda^2 - n\lambda + p) = (p' + \delta') = (p_1 + p_2 - 1 + \delta')$ ausmachen. Die Mannigfaltigkeit aller zu $R' = R_1 + R_2$ äquivalenten Curven ist also mindestens $(p_1 + p_2 - 1 + \delta')$, während die Curven unter ihnen, die in ähnlicher Weise wie R' zerfallen, offenbar eine Mannigfaltigkeit von der Grösse $(p_1 + p_2)$ bilden. Daraus geht hervor, dass zu $R_1 + R_2$ äquivalente, irreducible Curven existiren, sobald sich R_1 und R_2 in zwei oder mehr Punkten schneiden. Das Geschlecht dieser irreduciblen, äquivalenten Curven ist $(p_1 + p_2 - 1 + \delta')$, und die Zahl giebt nach dem Vorausgehenden auch *genau* die Mannigfaltigkeit dieser Curven an. Wir erkennen also, dass eine R_n^p von den Flächen F_λ auch dann noch in einer Vollschaar geschnitten wird, wenn eine durch R_n^p gelegte Fläche F_λ die Fläche 4ter Ord. in einer reduciblen Restcurve $R_1 + R_2$ schneidet, deren Theile mindestens zwei Punkte gemein haben.

Besitzt jede der beiden Curven R_1 und R_2 ein Geschlecht, das von Null verschieden ist, so haben sie — abgesehen von einer einzigen Ausnahme — mindestens zwei Punkte gemein und es giebt zu $R_1 + R_2$ äquivalente Curven, die irreducibel sind. Denn durch jeden Punkt der F_4 geht alsdann mindestens eine zu R_1 äquivalente Curve und auch eine zu R_2 äquivalente Curve; jede der ersteren Curven hat also mit jeder von den letzteren mindestens einen Punkt gemein. Es werden so auf jeder zu R_2 äquivalenten Curve Punktgruppen mit mindestens einem beweglichen Punkte ausgeschnitten; da aber diese Curven nicht rational sind, so müssen jene Punktgruppen mindestens zwei bewegliche Punkte enthalten. Damit ist aber der voranstehende Satz bewiesen.

Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn durch jeden Punkt der F_4 nicht zwei verschiedene Curven gehen, deren eine zu R_1 und deren andere zu R_2 äquivalent ist. Dann müssen also R_1 und R_2 selbst äquivalente Curven vom Geschlechte 1 sein, da es nur in diesem Falle durch jeden Punkt der F_4 eine einzige, zu beiden gleichzeitig äquivalente Curve giebt. In diesem speciellen Falle schneiden R_1 und R_2 sich überhaupt nicht. Hier gehen durch die R_n^p noch doppelt unendlich viele Flächen F_λ; sie schneiden die F_4 in je zwei zu R_1 äquivalenten Curven. Deshalb bestimmen die F_λ auf der R_n^p eine $(2\lambda^2-2)$-fach unendliche Schaar von Gruppen $G_{n\lambda}$. Diese ist jetzt nur eine Theilschaar, da die Vollschaar die Mannigfaltigkeit $n\lambda - p = n\lambda - \frac{1}{2}(n-n')\lambda - p' - \delta' = 2\lambda^2 - p' - \delta' = 2\lambda^2 - 1$ besitzt $(p'=1,\ \delta'=0)$. Das Resultat lässt sich leicht ausdehnen auf Restcurven, die aus mehreren äquivalenten Theilen bestehen, und man kann den Satz aussprechen: *Liegt die Raumcurve R_n^p auf einer F_4 und schneiden die sie enthaltenden Flächen λ^{ter} Ord. die letztere noch in ε äquivalenten Curven vom Geschlechte 1, so schneidet die Gesammtheit aller Flächen λ^{ter} Ord. die R_n^p in einer Theilschaar, deren Mannigfaltigkeit um $(\varepsilon - 1)$ geringer ist als die der Vollschaar.*

Gehen wir nun wieder zu der reduciblen Restcurve $R_1 + R_2$ zurück und nehmen jetzt an, dass eine derselben, etwa R_2, rational sei, während die andere ein beliebiges Geschlecht p_1 besitze. Haben beide Curven nur einen Punkt gemein und bilden sie mit R_n^p zusammen den vollen Schnitt zweier Flächen F_4 und F_λ, so giebt es nach dem allgemeinen Resultat hier mindestens p_1-fach unendlich viele zu $R_1 + R_2$ äquivalente Curven. Aber die Zahl dieser Curven kann auch nicht grösser sein, da alle zu $R_1 + R_2$ äquivalente Curven in R_2 und eine zu R_1 äquivalente Curve zerfallen müssen. Gäbe es nämlich unter jenen äquivalenten Curven eine irreducible, so wäre ihr Geschlecht ebenfalls p_1; da aber die äquivalenten Curven schon p_1-fach unendlich viele reducible Curven enthalten, so wäre die Gesammtheit der äquivalenten Curven mindestens (p_1+1)-fach unendlich. Das ist jedoch nach Früherem unmöglich, denn zu einer irreduciblen Curve vom Geschlechte p_1 giebt es nur p_1-fach unendlich viele äquivalente Curven. Aus dieser Betrachtung geht also hervor, dass ein System äquivalenter Curven entweder keine Curve enthält, die in einen rationalen Theil und einen

weiteren, diesen nur einmal schneidenden Theil zerfällt, oder dass es aus lauter reduciblen Curven besteht mit dem nämlichen rationalen Bestandtheil.

Enthält endlich die reducible Restcurve $R_1 + R_2$ einen rationalen Theil R_2, der den anderen überhaupt nicht schneidet, so zerfallen alle dazu äquivalenten Curven in den Theil R_2 und einen zu R_1 äquivalenten Theil, sie bilden also eine p_1-fach unendliche Mannigfaltigkeit. Die Flächen λ^{ter} Ord. schneiden deshalb auf der R_n^p eine $(2\lambda^2 - p_1)$-fach unendliche Schaar von Punktgruppen aus. Diese Zahl $(2\lambda^2 - p_1)$ ist aber um eine Einheit kleiner als die Mannigfaltigkeit $(n\lambda - p)$ der Vollschaar, denn hier ist: $p = \frac{1}{2}\lambda(n - n_1 - n_2) + p_1 - 1$. Mit einer sofort einleuchtenden Verallgemeinerung erhalten wir den Satz: *Ist R_n^p der theilweise Schnitt zweier Flächen F_λ und F_λ und haben diese noch eine reducible Restcurve gemein, deren ε Theile sich nirgends gegenseitig schneiden und entweder alle oder doch bis auf einen rational sind, so schneiden die Flächen λ^{ter} Ord. aus R_n^p eine Theilschaar, deren Mannigfaltigkeit um $(\varepsilon - 1)$ kleiner ist als die der betreffenden Vollschaar.*

Hierbei ist in keiner Weise festgestellt, ob auf einer Fläche 4ter Ord. solche reducible Curven bestehen können, deren Theile sich nirgends begegnen. Wir werden weiterhin sehen, dass derartige Restcurven zu Raumcurven R_n^p gehören, die nicht mehr die allgemeinsten Curven einer Familie darstellen, während hier nur die Aufstellung der allgemeinsten Curven einer Familie geplant ist. Gleichwohl mögen einige Andeutungen über jene reduciblen Curven ohne Doppelpunkte gemacht werden. Liegt auf einer F_4 eine rationale Curve R_2 von der Ordnung n_2, so hat jede Curve R_1 vom Geschlechte p_1 und einer Ordnung n_1, die $\leqq n_2$ ist, mindestens p_1 Punkte mit R_2 gemein. Denn wäre dem nicht so, so könnte man doch immer einer zu R_1 äquivalenten Curve vorschreiben, durch p_1 Punkte von R_2 zu gehen, was nur so möglich wäre, dass diese Curve die R_2 als Bestandtheil enthielte; das widerspricht aber der Voraussetzung $n_1 \leqq n_2$. Ist dagegen $n_1 > n_2$ und schneiden sich R_1 und R_2 nicht gegenseitig, dann genügt eine Bedingung, um die zu R_1 äquivalenten Curven in die rationale Curve R_2 und einen weiteren Theil R_3 zerfallen zu lassen, dessen Geschlecht $p_3 = (p_1 - 1)$ und dessen Ordnung $n_3 = (n_1 - n_2)$ ist, und der mit R_2 zwei Punkte gemein hat. Dass R_3 sich wiederum in die Curve R_2 und einen weiteren Theil R_4

spaltet, verlangt drei Bedingungen; dabei wird die Ordnung dieser letzteren Curve $n_4 = n_1 - 2n_2$ und ihr Geschlecht $p_4 = p_1 - 4$, sie schneidet R_2 in vier Punkten. Ist also $n_1 \leqq 2n_2$, so muss $p_1 \leqq 4$ sein, sonst können nicht R_1 und R_2 ohne gemeinsame Punkte sein, u. s. w. (siehe Seite 644).

Wir können die hauptsächlichsten Resultate kurz wie folgt zusammenfassen. Eine beliebige Raumcurve R_n^p auf einer Fläche 4ter Ord. besitzt als *allgemeinste* Restcurve von jeder möglichen Ordnung entweder eine irreducible oder eine aus mehreren Theilen bestehende Curve von besonderer Beschaffenheit. Die Theile der letzteren sind entweder alle rational oder es ist ein irrationaler Theil darunter, oder mehrere Theile sind äquivalente Curven vom Geschlechte 1; immer aber muss die Zahl dieser Theile grösser als die Zahl der wirklichen Doppelpunkte der reduciblen Curve sein. Enthält die Restcurve mehrere äquivalente Curven vom Geschlechte 1 oder mehrere rationale Curven, die sich nicht schneiden, und liegt dieselbe mit der R_n^p auf einer Fläche F_λ, so schneidet die Gesammtheit der Flächen F_λ auf der R_n^p nur eine Theilschaar aus. Hierbei wurde zunächst noch von Restcurven mit mehrfach zählenden Theilen abgesehen.

2. Corresiduale Raumcurven auf der F_4.

Unsere Absicht ist zunächst, den Zusammenhang zwischen den Restcurven verschiedener Ordnung darzulegen. Dazu benutzen wir den Satz: Zerfällt eine Restcurve unserer R_n^p in eine ebene Curve 4ter Ord. und einen weiteren reduciblen oder irreduciblen Theil, so stellt der letztere Theil für sich allein ebenfalls eine Restcurve dar, er bildet also mit R_n^p zusammen einen vollen Schnitt. Ist nämlich $F_\lambda = 0$ eine Fläche durch R_n^p, welche die ursprüngliche Restcurve ausschneidet und demgemäss die ebene Curve 4ter Ord. und eine in der gleichen Ebene liegende Curve $(\lambda - 4)^{ter}$ Ord. enthält, so lege man durch diese letztere eine beliebige Fläche $F_{\lambda-4} = 0$. In dem Büschel: $F_\lambda - \varrho F_4 \cdot F_{\lambda-4} = 0$ ist dann eine Fläche enthalten, die in eine Ebene und eine Fläche $(\lambda - 4)^{ter}$ Ord. zerfällt; diese schneidet die F_4 in der R_n^p und einer um die ebene Curve 4ter Ord. verminderten Restcurve. Wollen wir demnach von irgend einer Restcurve zu einer solchen mit einer um 4 niedrigeren Ordnung übergehen, so suchen wir zu der ersteren eine äquivalente Curve, die eine ebene Curve 4ter Ord. als Bestandtheil enthält, und lassen diesen einfach weg.

Als Ausgangspunkt auf der F_4 diene eine irreducible Curve R' von der Ordnung n' und dem Geschlechte p', für welche die Ungleichung $p' > n' - 3$ gilt. Alle zu R' äquivalenten Curven, mögen sie irreducibel sein oder nicht, besitzen $h' = \frac{1}{2}(n'-1)(n'-2) - p'$ scheinbare Doppelpunkte. Zerfällt also eine solche Curve in eine ebene Curve 4ter Ord. C_4 und eine weitere irreducible Curve R'' von der Ord. $n'' = n' - 4$, so muss ihr Geschlecht $p'' = p' - n' + 2$ sein. Denn die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte der Curve $R'' + C_4$ ist: $\frac{1}{2}(n'-5)(n'-6) - p'' + 3(n'-4) = h'$. Die Mannigfaltigkeit der äquivalenten Curven zu R' ist p', die der äquivalenten Curven zu R'' ist $(p' - n' + 2)$; es erfordert also $(n'-2)$ Bedingungen, damit eine zu R' äquivalente Curve in eine ebene Curve C_4 und eine irreducible Curve R'' zerfalle. Betrachten wir jetzt die Flächen F_λ, die durch die R_n^p hindurchgehen und die äquivalenten Curven zu R' ausschneiden. Eine beliebige Ebene schneidet die Fläche F_4 in einer C_4 und die Flächen F_λ in Curven C_λ, die durch n feste Punkte der C_4 hindurchgehen, nämlich die n Schnittpunkte der Ebene mit der R_n^p. Hier sind nun zwei ganz wesentlich verschiedene Möglichkeiten zu unterscheiden. Einmal können die Curven C_λ alle Curven von der Ord. λ durch die n festen Punkte darstellen, so dass also jede Curve von der Ord. λ durch die n festen Punkte mit der Raumcurve R_n^p auf einer Fläche λ^{ter} Ord. liegt. Zum anderen kann die Mannigfaltigkeit aller Curven λ^{ter} Ord. durch jene n festen Punkte um eine Zahl ε grösser sein als die der Curven C_λ; dann liegt also nicht jede Curve λ^{ter} Ord. durch die n festen Punkte mit der R_n^p auf einer Fläche λ^{ter} Ord. Nehmen wir den *ersten* Fall an, so schneiden die Flächen F_λ die C_4 in je n' Punkten (abgesehen von den festen Punkten), die eine Vollschaar, also eine $(n'-3)$-fach unendliche Schaar bilden. Legt man somit eine Fläche F_λ durch $(n'-2)$ beliebige Punkte der C_4, so enthält sie die C_4 ganz und schneidet die F_4 noch in einer Curve von der Ordnung $(n'-4)$, die man als corresiduale Curve zu R' bezeichnet. Die Mannigfaltigkeit aller zu R' corresidualen Curven $(n'-4)^{\text{ter}}$ Ord. ist hier $(p' - n' + 2)$. Nach den Resultaten des vorigen Paragraphen tritt das aber nur ein, wenn die allgemeinste unter den Curven $(n'-4)^{\text{ter}}$ Ord. entweder irreducibel ist oder, falls sie aus ε Theilen besteht, wenn sich diese in $(\varepsilon - 1)$ Punkten schneiden, wobei auf jedem Theile ein Schnittpunkt liegen muss.

Betrachten wir dagegen den *zweiten* Fall, so schneiden die Flächen F_λ die C_4 in je n' Punkten, die eine Theilschaar, und zwar eine $(n'-3-\varepsilon)$-fach unendliche Schaar bilden. Damit eine Fläche F_λ die C_4 ganz enthalte, brauchen wir sie jetzt nur durch $(n'-2-\varepsilon)$ Punkte auf derselben zu legen; die Mannigfaltigkeit aller zu R' corresidualen Curven $(n'-4)^{\text{ter}}$ Ord. wird demnach in diesem Falle $(p'-n'+2+\varepsilon)$. Der Inhalt des vorigen Paragraphen lehrt uns, dass hier diese corresidualen Curven aus je $(\varepsilon+1)$ Theilen bestehen müssen, von denen keiner den anderen schneidet. In der That, besteht die corresiduale Curve $(n'-4)^{\text{ter}}$ Ord. aus ε rationalen Curven und einer Curve vom Geschlechte $(p'-n'+2+\varepsilon)$, dann ist das Geschlecht der Gesammtcurve $(p'-n'+2)$ und die Zahl ihrer scheinbaren Doppelpunkte $\frac{1}{2}(n'-5)(n'-6)-(p'-n'+2)$, falls sich die einzelnen Curventheile nicht gegenseitig schneiden. So viele scheinbare Doppelpunkte muss aber die zu R' corresiduale Curve $(n'-4)^{\text{ter}}$ Ord. gerade besitzen. Besteht dagegen diese Curve aus $(\varepsilon+1)$ sich nicht schneidenden Theilen, die zum Theil rational und zum Theil vom Geschlechte 1 und unter sich äquivalent sind, so muss die Zahl der rationalen Theile gleich $n'-1-p'$ und die der übrigen gleich $p'-n'+2+\varepsilon$ sein, damit das Geschlecht der Gesammtcurve wieder $(p'-n'+2)$ werde. Dieser letztgenannte Fall kann offenbar nur eintreten, wenn $p' \leqq n'-1$ ist.

Durch wiederholte Anwendung der soeben durchgeführten Betrachtungen gelangen wir zu den nachstehenden Folgerungen. Zu einer irreduciblen Curve R' von der Ordnung n' und dem Geschlechte p' giebt es auf der Fläche 4ter Ord. stets corresiduale Curven R'' von der Ordnung $n''=n'-4$, falls $p'>n'-3$ ist. Ebenso existiren corresiduale Curven R''' von der Ordnung $n'''=n'-8$, falls $p'>2n'-9$, ferner corresiduale Curven R^{IV} von der Ordnung $n^{\text{IV}}=n'-12$, falls $p'>3n'-19$ etc., bis man so zu den Curven niedrigster Ordnung $n^{(i)}$ gelangt, die zu R' corresidual sind, für welche $p^{(i)} \leqq n^{(i)}-3$ ist. Von den Curven niedrigster Ordnung abgesehen, sind die allgemeinen zu R' corresidualen Curven aller übrigen Ordnungen irreducibel[1]).

1) Eine Ausnahme bilden nur die Curven 5ter Ord., die zu einer Geraden corresidual sind; sie zerfallen alle in die Gerade und eine ebene Curve 4ter Ord. In der That wird in diesem Falle der obige Beweis ungültig. Zerfallen also die corresidualen Curven niedrigster Ordnung in eine

Denn besässe eine solche Curve neben dem irrationalen Theile noch einen rationalen Theil, so könnte der erstere durch eine äquivalente Curve ersetzt werden, die in eine ebene Curve 4ter Ord. und einen weiteren Theil zerfiele. Der irrationale und der rationale Theil jener Curve würden sich also in mehreren Punkten schneiden, nämlich in ebenso vielen Punkten wie der rationale Theil und die zu dem irrationalen äquivalente Curve, es gäbe somit eine zu jener Curve äquivalente irreducible Curve. Die corresidualen Curven niedrigster Ordnung können allerdings in den oben geschilderten Weisen in Curven zerfallen, die sich gegenseitig nicht schneiden. Lässt sich also eine Raumcurve R_n^p aus einer Fläche 4ter Ord. durch eine Fläche von der Ord. λ, aber nicht mehr durch eine von der Ord. $(\lambda - 1)$ ausschneiden, so schneiden alle Flächen, deren Ordnung grösser als λ ist, die R_n^p in Vollschaaren. Mit anderen Worten: *Geht durch die auf einer F_4 liegende R_n^p eine F_λ, aber keine $F_{\lambda-1}$, so erfordert es für eine F_μ, wo $\mu > \lambda$ ist, genau $(n\mu - p + 1)$ Bedingungen, wenn sie durch die R_n^p gehen soll. Soll eine F_λ die R_n^p enthalten, so erfordert es dagegen $(n\lambda - p + 2 - \varepsilon)$ Bedingungen, falls die Restcurve von der Ord. $(4\lambda - n)$ in ε sich gegenseitig nicht schneidende Curven zerfällt.* Dieses Resultat gilt auch dann, wenn R_n^p eine specielle Curve ist; dagegen gilt hier die Voraussetzung, dass die Restcurve nicht einen mehrfach zählenden Theil besitzt.

3. Die Constantenzahl der R_n^p.

Die Restcurve niedrigster Ordnung zu einer gegebenen Raumcurve R_n^p besitzt keinen Bestandtheil, dessen Geschlecht grösser wäre als seine um 3 verminderte Ordnung. Deshalb genügt es, die Constantenzahl einer Curve R' von der Ordnung n' und dem Geschlechte p', für welche $p' \leqq n' - 3$ ist, zu eruiren, um daraus auf die Constantenzahl jeder beliebigen auf einer F_4 liegenden Raumcurve zu schliessen. Nun hat eine ebene Curve C' von der Ordnung n' und dem Geschlechte p' noch $(3n' - 1 + p')$ Constanten, da jeder Doppelpunkt die Zahl der Constanten der allgemeinen Curve um eine Einheit vermindert. Damit diese

---

Gerade und einen sie nicht schneidenden Theil, so zerfallen auch die corresidualen Curven von der nächst höheren Ordnung in diese Gerade und einen sie einmal schneidenden Theil.

ebene Curve die Projection einer auf einer F_4 liegenden Raumcurve R' sei, muss sie einer Anzahl Bedingungen genügen, die man wie folgt erhält. Die Schnittpunkte der C' mit einer beliebigen Geraden bilden eine Gruppe, die einer $(n'-p')$-fach unendlichen Schaar angehört, da die Gruppe keine Specialgruppe ist. Es müsste sonst durch die Doppelpunkte der C' eine adjungirte Curve $(n'-4)^{\text{ter}}$ Ord. gehen, was bei der Voraussetzung $p' \leqq n'-3$ nicht der Fall ist. Um die Schaar aus C' auszuschneiden, wählen wir irgend eine adjungirte Curve $(n'-3)^{\text{te}}$ Ord. $\varphi = 0$ und legen durch ihre Schnittpunkte mit der C' alle adjungirten Curven $(n'-2)^{\text{ter}}$ Ord. $\psi = 0$, deren es also $(n'-p'+1)$ linear unabhängige giebt. Durch die Gleichungen: $x_1 = x_1$, $x_2 = x_2$, $x_3 = x_3$, $x_4 = \frac{\psi}{\varphi}$ wird der Uebergang von der Curve C' zu einer Raumcurve R' vermittelt, und da in ψ noch $(n'-p'+1)$ willkürliche Constanten vorkommen, besitzt R' gerade $4n'$ Constanten. Diese Curve R' liegt jedoch im allgemeinen nicht auf einer Fläche 4ter Ord. Soll dieses der Fall sein, so muss zwischen den von 35 linear unabhängigen Flächen 4ter Ord. auf R' ausgeschnittenen Punktgruppen eine lineare Relation bestehen. Alle diese Gruppen gehören einer $(4n'-p')$-fach unendlichen Vollschaar an; es besteht demgemäss erst zwischen $(4n'-p'+2)$ beliebigen Gruppen der Schaar eine lineare Relation, d. h. zwischen jenen 35 Gruppen und noch $(4n'-p'-33)$ weiteren Gruppen. Werden in der Relation die Coëfficienten dieser letzteren Gruppen gleich Null, so liegt die R' auf einer F_4; es verlangt das die Erfüllung von $(4n'-p'-33)$ Bedingungen. Eine Raumcurve R', die auf einer Fläche 4ter Ord. liegt und deren Geschlecht $p' \leqq n'-3$ ist, besitzt demnach $(p'+33)$ Constanten, wenn $4n' \geqq p'+33$ ist.

Ist dagegen $4n' < p'+33$, etwa $4n'-p' = 33-\zeta$, wo ζ eine positive Zahl ist, so bilden die Schnittpunkte der R' mit den Flächen 4ter Ord. Punktgruppen, die einer $(33-\zeta)$-fach unendlichen Schaar angehören. Die Raumcurve R' liegt folglich auf $(\zeta+1)$ linear unabhängigen Flächen 4ter Ord. und hängt von $4n'$ Constanten ab. Nun ist aber: $4n' = p'+33-\zeta$; wir können deshalb allgemein den Satz aussprechen: *Die allgemeine auf einer Fläche 4ter Ord. liegende Raumcurve R', für die $p' \leqq n'-3$ ist, weist $p'+33$ oder $p'+33-\zeta$ Constanten auf, je nachdem sie auf einer oder auf ∞^{ζ} Flächen 4ter Ord. liegt.* Daraus schliessen

wir weiter: *Auf einer ganz beliebigen Fläche 4ter Ord. existiren nur Curven, die den vollen Schnitt mit einer anderen Fläche ausmachen. Dagegen gilt es für eine Fläche 4ter Ord. stets als eine einzige Bedingung, wenn sie überhaupt Raumcurven R' von gegebener Ordnung n' und gegebenem Geschlechte p' enthalten soll, die nicht volle Schnitte sind.* Denn auf einer Fläche 4ter Ord. giebt es entweder keine oder stets p'-fach unendlich viele solcher Curven, und da die Mannigfaltigkeit dieser Curven überhaupt $(p'+33)$ ist, falls $4n' \geqq p'+33$ ist, so ist in diesem Falle die Richtigkeit des Satzes evident. Im anderen Falle, wo $4n' = p' + 33 - \zeta$ ist, ist die Mannigfaltigkeit der Curven überhaupt gleich $(p'+33-\zeta)$. Durch jede dieser Curven gehen $\infty^{\cdot}$ Flächen 4ter Ord., während auf jeder solchen Fläche p'-fach unendlich viele derartige Curven liegen. Es giebt also ∞^{33} Flächen 4ter Ord., die überhaupt Curven von der verlangten Art enthalten. Hiermit ist die Richtigkeit des Satzes für alle Curven bewiesen, deren Geschlecht höchstens gleich ihrer um 3 verminderten Ordnung ist und welche die allgemeinsten Curven dieser Art sind. Da aber für jede Ordnung und jedes Geschlecht Raumcurven existiren, die auf einer F_4 liegen und als Restcurven niedrigster Ordnung eine irreducible Curve besitzen — man kann ja umgekehrt von der Restcurve ausgehen und auf jene schliessen —, so erkennt man auch die Gültigkeit jenes Satzes für die allgemeinsten Curven von beliebigem Geschlechte. *Die Raumcurve R_n^p mit irreducibler Restcurve niedrigster Ordnung hängt noch von $(p+33-\zeta)$ Constanten ab, wenn sie auf $\infty^{\cdot}$ Flächen 4ter Ord. liegt. Die Raumcurven R_n^p, die einen vollen Schnitt bilden, besitzen dagegen $(p+34-\zeta)$ Constanten.*

Eine Raumcurve R_n^p indessen, deren niedrigste Restcurve reducibel ist, hat weniger als $p+33$ Constanten, denn jede Theilcurve legt der Fläche 4ter Ord., auf der eine R_n^p liegen soll, eine Bedingung auf. Hierbei giebt es allerdings eine Ausnahme, wenn mehrere Theile der reduciblen Restcurve äquivalent sind. Solche äquivalente Theile der Restcurve müssen vom Geschlechte 1 sein, wie wir gesehen haben, denn sonst können alle zusammen durch eine irreducible Curve ersetzt werden. *Eine Raumcurve R_n^p, deren niedrigste Restcurve in lauter äquivalente Curven vom Geschlechte 1 zerfällt, hängt ebenso von $(p+33)$ Constanten ab, wie die R_n^p, deren niedrigste Restcurve eine irreducible Curve vom Geschlechte 1 ist. Liegt die R_n^p auf $\infty^{\cdot}$*

Flächen von der 4ten Ord., so ist die Zahl ihrer Constanten $(p + 33 - \zeta)$.

4. Mehrfach zählende Restcurven.

In unseren Betrachtungen wurde bislang abgesehen von solchen Raumcurven, deren Restcurven mehrfach zählende Theile enthalten; wir wollen jetzt gerade diese Curven uns etwas näher ansehen. Zunächst ist klar, dass man bloss mehrfach zählende Curven vom Geschlechte 0 in Betracht zu ziehen hat. Denn zu jeder anderen Curve giebt es äquivalente Curven und die α-fach zählende Curve kann durch α äquivalente Curven ersetzt werden. Sind diese letzteren Curven vom Geschlechte 1, so schneiden sie sich nicht gegenseitig und wir haben den zuletzt behandelten Fall vor uns; sind sie dagegen von höherem Geschlechte, so können diese α Curven durch eine einzige äquivalente Curve ersetzt werden.

Gehen wir jetzt von einer rationalen Curve R_1 auf der Fläche 4ter Ord. aus und nehmen auf dieser eine Curve R_n^p an, welche als Restcurve die doppelt gezählte R_1 besitzt. Dabei ist es gleichgültig, ob die Fläche, welche die R_n^p aus der F_4 ausschneidet, diese längs R_1 berührt oder die R_1 zur Doppelcurve hat. Welches ist nun die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte der doppelt gezählten R_1? Die einfach gezählte R_1 von der Ord. n_1 hat $\frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_1 - 2)$ scheinbare Doppelpunkte. Die R_1 weist mit der unendlich nahen Curve zunächst $(n_1 - 1)(n_1 - 2)$ scheinbare Schnittpunkte auf, nämlich je zwei in der Nachbarschaft eines jeden der genannten Doppelpunkte von R_1. Ausserdem haben R_1 und die Nachbarcurve von einem Punkte O aus projicirt noch $3n_1$ scheinbare Schnittpunkte gemein, nämlich je einen an allen den Stellen, welche den Berührungspunkten ihrer Projection mit dem scheinbaren Umriss der Fläche 4ter Ord. entsprechen. Es sind das die Punkte von R_1, deren Tangentialebenen durch O gehen, also die Schnittpunkte der R_1 mit der ersten Polarfläche des Punktes O in Bezug auf die F_4. Die doppelt gezählte Curve R_1 besitzt demnach $2(n_1 - 1)(n_1 - 2) + 3n_1 = \frac{1}{2}(2n_1 - 1)(2n_1 - 2) + 3$ scheinbare Doppelpunkte. Zwei rationale Raumcurven von der Ordnung n_1, die einander nicht unendlich nahe sind, besitzen zusammen, falls sie sich nicht schneiden, jedoch nur $\frac{1}{2}(2n_1 - 1)(2n_1 - 2) + 1$ scheinbare Doppelpunkte, also um

zwei weniger als jene Curve. Nun ist die Summe der wahren und scheinbaren Schnittpunkte zweier Curven n_1^{ter} Ord. für jede gegenseitige Lage constant, nämlich gleich n_1^2. Lässt man dieses auch noch für benachbarte Curven gelten und bedenkt, dass nach dem Voranstehenden die auf einer F_4 liegende Curve R_1 und ihre Nachbarcurve $(n_1-1)(n_1-2)+3n_1$ scheinbare Schnittpunkte besitzen, so muss man annehmen, dass R_1 und ihre Nachbarcurve (-2) wirkliche Schnittpunkte haben. Es ist das freilich nur eine Redeweise, ebenso wie das negative Geschlecht bei reduciblen Curven, aber alle Formeln, die für beliebige Curven auf der F_4 gelten, bleiben auch für benachbarte Curven richtig, falls man diese Annahme macht. Wir sagen deshalb: *Eine rationale Curve R_1 auf einer Fläche 4ter Ord. und ihre Nachbarcurve haben (n_1^2+2) scheinbare und (-2) wirkliche Schnittpunkte.*

Wir wollen die Sache noch etwas weiter verfolgen. Alle äquivalenten Curven auf einer Fläche 4ter Ord. weisen die gleiche Anzahl scheinbarer Doppelpunkte auf. Sei R' von der Ordnung n' und dem Geschlechte p' eine Curve der F_4, sei ferner R_1 von der Ordnung n_1 eine rationale Curve auf ihr. Nehmen wir an, R' und R_1 schneiden sich nicht, so erfordert es eine Bedingung, dass die zu R' äquivalenten Curven in die R_1 und eine weitere Curve R_2 zerfallen. Demnach existiren $(p'-1)$-fach unendlich viele zu R_2 äquivalente Curven, das Geschlecht von R_2 ist also $(p'-1)$. Die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte von R' ist $\frac{1}{2}(n'-1)(n'-2)-p'$, die von R_1+R_2 ist, falls sich diese Curven in σ Punkten schneiden: $\frac{1}{2}(n_1-1)(n_1-2)+\frac{1}{2}(n_2-1)(n_2-2)-p'+1+n_1n_2-\sigma$. Damit beide Zahlen übereinstimmen, müssen R_2 und R_1 zwei gemeinsame Punkte haben. Auch die Zahl der wirklichen Schnittpunkte einer Curve mit äquivalenten Curven muss constant sein. So müssen R_1 und R' ebenso viel Punkte gemein haben wie R_1 und R_1+R_2; diese Zahl ist aber im ersten Falle gleich Null, so dass R_1 die unendlich nahe Curve in (-2) Punkten schneiden muss.

Aehnlich beweist man den allgemeinen Satz: *Wird die rationale Curve R_1 von einer Curve R' in σ Punkten geschnitten und ist $p'>\sigma$, so erfordert es genau $\sigma+1$ Bedingungen, damit eine zu R' äquivalente Curve in R_1 und eine weitere Curve R_2 zerfalle. Diese besitzt das Geschlecht $p_2=(p'-1-\sigma)$ und schneidet die R_1 in $(\sigma+2)$ Punkten.* Die äquivalenten Curven R' und

$R_1 + R_2$ schneiden sich nämlich in $2p' - 2$ Punkten, und da sich R' und R_1 in σ Punkten schneiden, besitzen R' und R_2 $(2p' - 2 - \sigma)$ gemeinsame Punkte. Ebenso viele Punkte hat R' mit einer zu R_2 äquivalenten Curve R_3 gemein, oder auch $R_1 + R_2$ mit R_3; wir erhalten demnach die Gleichung: $2p' - 2 - \sigma = 2p_2 - 2 + \tau$, wo τ die Zahl der Schnittpunkte von R_1 und R_3 oder R_1 und R_2 ist. Die zu $R_1 + R_2$ äquivalenten irreduciblen Curven besitzen aber nach Früherem das Geschlecht $(p_2 - 1 + \tau)$, und diese Zahl muss gleich dem Geschlechte p' von R' sein. Aus beiden Beziehungen folgt: $\tau = \sigma + 2$ und $p_2 = p' - 1 - \sigma$.

Diese Resultate zeigen uns wieder, dass die Zahl der Schnittpunkte von R_1 mit einer unendlich nahen Curve mit (-2) zu bewerthen ist, damit die Zahl der gemeinsamen Punkte von R_1 und $R_1 + R_2$ ebenso wie die von R_1 und R' gleich σ werde. Hieraus kann man auch wieder auf die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte der doppelt gezählten Curve R_1 schliessen.

Durch Wiederholung der angestellten Betrachtungen erhält man, wie leicht ersichtlich, das allgemeine Resultat: *Eine auf einer Fläche 4ter Ord. liegende, α-fach zählende, rationale Curve von der Ordnung n_1 ist als mit $-\alpha \cdot (\alpha - 1)$ wirklichen und mit $\frac{1}{2}\alpha(n_1^2\alpha + 2\alpha - 3n_1)$ scheinbaren Doppelpunkten behaftet anzusehen.*

Da es für eine Fläche 4ter Ord. eine einzige Bedingung erfordert, wenn auf ihr eine rationale Curve von gegebener Ordnung liegen soll, *so besitzt eine Raumcurve R_n^p, deren Rest aus einer mehrfach gezählten rationalen Curve besteht, ebenfalls $(p + 33)$ Constanten.* Diese Zahl erniedrigt sich ebenso wie früher um ζ, falls die R_n^p auf ∞^ζ Flächen 4ter Ord. liegt.

Es erübrigt uns noch den Zusammenhang der Ordnungszahlen n, n', Geschlechtszahlen p, p' und Zahlen der scheinbaren Doppelpunkte h, h' für eine Raumcurve R und ihre Restcurve R' zu studiren, falls R' eine α-fache rationale Curve R_2 ist. Das Geschlecht von α beliebig liegenden rationalen Raumcurven n_2^{ter} Ord. ist $(1 - \alpha)$, dabei kommt es auf die wirklichen und scheinbaren Doppelpunkte nicht an. Es wird deshalb auch $p' = 1 - \alpha$ sein. Ferner gilt im allgemeinen die Relation: $h' = \frac{1}{2}(n' - 1)(n' - 2) - p' - \delta'$, wo δ' die Zahl der wirklichen Doppelpunkte von R' bezeichnet. Diese Relation gilt auch noch für die vorliegende Curve R', wie man erkennt, wenn man

$h'=\frac{1}{2}\alpha(n_2^2\alpha+2\alpha-3n_2)$, $n'=\alpha n_2$, $p'=1-\alpha$ und $\delta'=\alpha(1-\alpha)$ setzt.

Statt der Curve R betrachten wir zunächst α äquivalente Curven R_1, deren jede mit R_2 den vollen Schnitt der F_4 mit einer Fläche μ^{ter} Ord. ausmacht. R mag dann eine der Curven (ohne Doppelpunkt) sein, die zu der Summe jener α Curven äquivalent ist. Wir erhalten jetzt $h=\alpha h_1+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(n_1^2-2p_1+2)$, wo $(n_1^2-2p_1+2)$ die Zahl der scheinbaren Schnittpunkte zweier zu R_1 äquivalenten Curven darstellt. Daraus folgt:

$$h=\frac{\alpha}{2}(n_1-1)(n_1-2)-\alpha p_1+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(n_1^2-2p_1+2)$$
$$=\frac{\alpha^2}{2}(n_1^2-2p_1+2)-\frac{3\alpha}{2}n_1,$$

und somit: $h-h'=\frac{\alpha^2}{2}(n_1^2-n_2^2-2p_1)-\frac{3\alpha}{2}(n_1-n_2)$, und da $n_1+n_2=4\mu$ und $p_1=\frac{1}{2}(n_1-n_2)\mu$ ist, ergiebt sich endlich:

$$h-h'=\frac{3\alpha}{2}(n_1-n_2)(\alpha\mu-1)=\frac{3}{2}(n-n')(\lambda-1),$$

wenn $\lambda=\alpha\mu$ ist.

Die frühere Relation: $h-h'=\frac{3}{2}(n-n')(\lambda-1)$ zwischen den Charakteren zweier Curven, die den vollen Schnitt der F_4 mit einer Fläche F_λ bilden, gilt also auch noch, wenn die eine derselben eine α-fache Curve ist. Allerdings ist bei dem Beweise zunächst vorausgesetzt, dass $\lambda=\alpha\mu$ ist; aber indem man die Curve R_n^p zerfallen lässt in eine ebene Curve 4ter Ord. und eine solche von der $(n-4)^{\text{ten}}$ Ord., ergiebt sich die Richtigkeit jener Relation auch für die letztere Curve. Durch Wiederholung dieses Processes kann man so zu jeder Curve gelangen, welche die α-fache Curve R_1 zu einem vollen Schnitt ergänzt.

Endlich besteht für eine Raumcurve R, deren Restcurve R_1 eine α-fache rationale Curve R_2 ist, auch die Beziehung: $p-(p'+\delta')=\frac{1}{2}(n-n')\lambda$. Wir zeigen wieder die Richtigkeit der Behauptung für eine Curve R, die äquivalent ist zu der Summe von α äquivalenten Curven R_1, wobei wie vorher R_1+R_2 den vollen Schnitt zweier Flächen F_4 und F_μ darstellt. Dann wird:

$$p=\alpha p_1-\alpha+1+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(2p_1-2)=\alpha^2p_1-\alpha^2+1$$
$$=\tfrac{1}{2}(n-n')\lambda+p'+\delta'.$$

Hieraus folgt ganz wie vorher auch die Gültigkeit der Relation für jede zu der soeben betrachteten R corresiduale Curve.

Wir wenden uns jetzt der Schaar zu, deren Gruppen von Flächen λ^{ter} Ord. aus der R_n^p ausgeschnitten werden. Hier giebt es nur eine einzige Fläche F_λ durch die Raumcurve R_n^p, so dass die Gesammtheit der Flächen λ^{ter} Ord. eine $2\lambda^3$-fach unendliche Schaar von Gruppen $G_{n\lambda}$ aus derselben ausschneidet. Alle zu $G_{n\lambda}$ corresidualen Gruppen bilden aber eine $(n\lambda - p)$-fach unendliche Schaar. Nun ist $n\lambda - p = \frac{1}{2}(n+n')\lambda - p' - \delta' = 2\lambda^3 - p' - \delta' = 2\lambda^3 + (\alpha^3 - 1)$. *Besitzt R_n^p eine α-fache rationale Restcurve und bilden sie zusammen den vollen Schnitt einer F_4 mit einer F_λ, so schneidet die Gesammtheit der Flächen λ^{ter} Ord. aus R_n^p eine Theilschaar aus, deren Mannigfaltigkeit um $(\alpha^3 - 1)$ kleiner ist als die der Vollschaar. Dabei ist $(1 - \alpha^3)$ gleich dem Geschlechte der Restcurve vermehrt um die Zahl ihrer Doppelpunkte.*

Die Flächen $(\lambda+1)^{\text{ter}}$ Ordnung schneiden die R_n^p in Gruppen, welche einer Vollschaar von der Mannigfaltigkeit $n(\lambda+1) - p$ angehören. Um die Mannigfaltigkeit der Schaar zu bestimmen, deren Gruppen auf Flächen $(\lambda+1)^{\text{ter}}$ Ord. liegen, müssen wir die Flächen $(\lambda+1)^{\text{ter}}$ Ord. durch die R_n^p oder die auf diesen liegenden Restcurven $(n'+4)^{\text{ter}}$ Ord. untersuchen. Die letzteren Curven sind äquivalent zu der Curve, die aus der α-fach gezählten R_2 und einer ebenen Curve 4ter Ord. C_4 besteht. Nun besitzen die zu $(R_2 + C_4)$ äquivalenten Curven die Ordnung (n_2+4), das Geschlecht (n_2+2) und sie scheiden die R_2 je in $(n_2 - 2)$ Punkten, wie ohne Weiteres aus der Umkehrung des S. 644 stehenden Satzes folgt. Analog besitzen die zu $(2R_2 + C_4)$ äquivalenten Curven die Ordnung $(2n_2+4)$, das Geschlecht $(2n_2 - 1)$ und sie schneiden die R_2 in je $(n_2 - 4)$ Punkten, und allgemein haben die zu $(iR_2 + C_4)$ äquivalenten Curven die Ordnung (in_2+4), das Geschlecht $(in_2 - i^2 + 3)$ und sie schneiden die R_2 in $(n_2 - 2i)$ Punkten. Der grösste Werth, den i hierbei annehmen kann, ist $i = \left[\frac{n_2}{2}\right]$, wenn $\left[\frac{n_2}{2}\right]$ die grösste ganze Zahl bedeutet, die $\leqq \frac{n_2}{2}$ ist.

Ist $\left[\frac{n_2}{2}\right] \geqq \alpha$, so giebt es zu $(\alpha R_2 + C_4)$ äquivalente Curven, die irreducibel sind; in diesem Falle schneiden die Flächen $(\lambda+1)^{\text{ter}}$ Ord. aus R_n^p eine Vollschaar aus, wie wir schon früher

sahen. Ist dagegen $\left[\frac{n_2}{2}\right] < \alpha$, so zerfallen die allgemeinsten zu $(\alpha R_2 + C_4)$ äquivalenten Curven in die $\left(\alpha - \left[\frac{n_2}{2}\right]\right)$-fach zählende Curve R_2 und eine weitere irreducible Curve von der Ordnung $\left(n_2\left[\frac{n_2}{2}\right] + 4\right)$ und dem Geschlechte $\left(n_2 \cdot \left[\frac{n_2}{2}\right] - \left[\frac{n_2}{2}\right]^2 + 3\right)$. Diese letztere Zahl giebt zugleich die Mannigfaltigkeit der Flächen $(\lambda+1)^{ter}$ Ord. durch die R_n^p an. Ziehen wir diese um 1 vermehrte Zahl von der Zahl $2(\lambda+1)^2+1$ ab, dann erhalten wir die Mannigfaltigkeit der auf der R_n^p von den Flächen $(\lambda+1)^{ter}$ Ord. ausgeschnittenen Theilschaar. Die zugehörige Vollschaar hatte die Mannigfaltigkeit: $n\lambda + n - p = 2\lambda^2 + n - (1-\alpha^2)$, da $p = \frac{1}{2}(n-n')\lambda + (1-\alpha^2)$ ist. Die Differenz beider Zahlen für die Vollschaar und die Theilschaar wird nach einer kleinen Umformung: $\left(\alpha - \left[\frac{n_2}{2}\right]\right)\left(\alpha + \left[\frac{n_2}{2}\right] - n_2\right)$. Dieselbe hat für eine gerade Zahl n_2 den Werth: $\left(\alpha - \frac{n_2}{2}\right)^2$ und für eine ungerade Zahl n_2 den Werth: $\left(\alpha - \frac{n_2}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.

Besitzt die R_n^p eine α-fache rationale Restcurve von der Ordnung n_2, so schneiden die Flächen $(\lambda+1)^{ter}$ Ord. auf ihr eine Vollschaar oder Theilschaar aus, je nachdem $\left[\frac{n_2}{2}\right] \geqq \alpha$ oder $\left[\frac{n_2}{2}\right] < \alpha$ ist. Im letzteren Falle übertrifft die Mannigfaltigkeit der Vollschaar diejenige der Theilschaar um $\left(\alpha - \frac{n_2}{2}\right)^2$ oder um $\left(\alpha - \frac{n_2}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, je nachdem n_2 gerade oder ungerade ist.

Will man das Verhalten der Flächen $(\lambda+2)^{ter}$ Ord. gegenüber der R_n^p studiren, so hat man die zu $(iR_2 + 2C_4)$ äquivalenten Curven von der Ordnung $(in_2 + 8)$ und dem Geschlechte $(2in_2 - i^2 + 9)$ zu Grunde zu legen, welche die R_2 in $(2n_2 - 2i)$ Punkten schneiden. Diese Curven sind irreducibel, falls $i \leqq n_2$ ist. Ist $n_2 < \alpha$, so schneiden die Flächen $(\lambda+2)^{ter}$ Ord. wieder eine Theilschaar aus, deren Mannigfaltigkeit sich ganz ebenso berechnet wie vorher. Das führt dann zu dem Resultate: *Die Flächen $(\lambda+2)^{ter}$ Ord. schneiden die R_n^p, deren Restcurve eine α-fache Curve n_2^{ter} Ord. ist, in einer Vollschaar, wenn $n_2 \geqq \alpha$ ist; ist dagegen $n_2 < \alpha$, so liefern sie nur eine Theilschaar, deren*

Mannigfaltigkeit um $(\alpha - n_2)^2$ *hinter derjenigen der Vollschaar zurückbleibt.*

Allgemein schliesst man auf das Verhalten der Flächen $(\lambda+\nu)^{\text{ter}}$ Ord. gegenüber der R_n^p aus den Curven, die zu $(iR_2 + \nu C_4)$ äquivalent sind, deren Ordnung $(in_2 + 4\nu)$ und deren Geschlecht $(\nu i n_2 - i^2 + 2\nu^2 + 1)$ beträgt. Das Geschlecht der zu νC_4 äquivalenten Curven ist nämlich $2\nu^2+1$. Fügt man jetzt zu νC_4 die Curve R_2 ein-, zwei-, drei-, ... i-mal hinzu, so erhält man das Geschlecht der zu der Gesammtcurve äquivalenten Curven, indem man zu $2\nu^2+1$ die Zahlen $(\nu n_2 - 1)$, $(\nu n_2 - 3)$, $(\nu n_2 - 5)$ .... $(\nu n_2 - 2i + 1)$ der Reihe nach addirt. So findet man die obige Geschlechtszahl. Jene Curven schneiden die R_2 in $\nu n_2 - 2i$ Punkten, deshalb ergiebt sich als Maximalwerth $i = \left[\frac{\nu n_2}{2}\right]$. Für $\left[\frac{\nu n_2}{2}\right] < \alpha$ schneiden die Flächen $(\lambda+\nu)^{\text{ter}}$ Ord. aus R_n^p eine Theilschaar von der Mannigfaltigkeit: $2(\lambda+\nu)^2 - (\nu i n_2 - i^2 + 2\nu^2 + 1) = 2\lambda^2 + 4\nu\lambda - 1 + i^2 - \nu i n_2$ aus, wo $i = \left[\frac{\nu n_2}{2}\right]$ ist. Die Mannigfaltigkeit der zugehörigen Vollschaar ist: $n(\lambda+\nu) - p = 2\lambda^2 + \nu n - 1 + \alpha^2$. Die Differenz beider Zahlen berechnet sich hieraus auf: $(\alpha - i)(\alpha + i - \nu n_2)$. Hieraus folgt das allgemeine Resultat:

Die R_n^p, *deren Rest eine* α*-fache rationale Curve* n_2^{ter} *Ord. ist, wird von den Flächen* $(\lambda+\nu)^{\text{ter}}$ *Ord. in einer Vollschaar geschnitten, wenn* $\left[\frac{\nu n_2}{2}\right] \geqq \alpha$ *ist. Im entgegengesetzten Falle schneiden sie eine Theilschaar aus, deren Mannigfaltigkeit um* $\left(\alpha - \frac{\nu n_2}{2}\right)^2$ *oder um* $\left(\alpha - \frac{\nu n_2}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ *niedriger als diejenige der Vollschaar ist, je nachdem* νn_2 *eine gerade oder ungerade Zahl ist.*

5. Die Eintheilung der auf den Flächen 4ter Ord. liegenden Curven in Familien.

Unsere Untersuchungen haben uns vier verschiedene Kategorien von Curven auf den Flächen 4ter Ord. kennen gelehrt, auf deren Eigenschaften hier noch etwas näher einzugehen ist.

1. *Curven, die einen vollen Schnitt bilden.* Ihre Ordnung ist 4λ, ihr Geschlecht $(2\lambda^2+1)$, die Zahl ihrer Constanten $(p+34)$ oder $(p+34-\zeta)$, wenn sie auf ∞^ζ Flächen 4ter Ord. liegt.

2. *Curven, deren Restcurve niedrigster Ordnung irreducibel ist.* Ist R' diese Restcurve, so besteht nach 2. die Ungleichung: $p' \leqq n' - 3$. Ferner gilt die Gleichung: $p - p' = \frac{1}{2}(n - n')\lambda$, falls $R + R'$ den vollen Schnitt einer Fläche 4ter und einer Fläche λ^{ter} Ord. bilden. Für jede Ordnung n und jedes Geschlecht p giebt es eine Familie von Curven aus dieser Kategorie, so lange p unter einer gewissen Grenze bleibt. Es ist nämlich leicht zu sehen, dass die Curve R_n^p bei gegebenem n das höchste Geschlecht besitzt, wenn ihre Restcurve eine Gerade oder ein Kegelschnitt oder eine Raumcurve 3ter Ord. oder 4ter Ord. ist. Setzt man nämlich $n = 4k - \eta$, wo $\eta = 1, 2, 3$ oder 4 ist, und sind die Restcurven niedrigster Ordnung zu R_n^p von der $(4k' + \eta)^{ten}$ Ord., so ist deren Geschlecht $p' \leqq 4k' + \eta - 3$. Sind dagegen die niedrigsten Restcurven einer Curve R_n^p von der η^{ten} Ord., so besitzt sie auch Restcurven von der Ordnung $(4k' + \eta)$, deren Geschlecht $P' > 4k' + \eta - 3$ ist. Nun ist: $p - p' = P - P' = (2k - 2k' - \eta)(k + k')$, und da $P' > p'$ ist, folgt auch $P > p$. *Demnach ist das Maximalgeschlecht einer auf einer F_4 liegenden Curve n^{ter} Ord. gleich $(2k - \eta)k$, wenn $n = 4k - \eta$ und $\eta = 1$ oder 2 ist, und um eine Einheit grösser für $\eta = 3$ oder 4; die niedrigste Restcurve hat dann die Ordnung η. Für jedes Geschlecht $p \leqq k(2k - \eta)$ existirt eine Familie von Curven R_n^p dieser Kategorie. Die Zahl ihrer Constanten ist $p + 33$ oder $p + 33 - \zeta$, wenn ∞^ζ Flächen 4ter Ord. durch sie hindurchgelegt werden können. Sind die niedrigsten Restcurven von der Ordnung $4k' + \eta$, so gehen durch R_n^p noch p'-fach unendlich viele Flächen $(k + k')^{ter}$ Ordnung $(p' = p - (k + k')(2k - 2k' - \eta))$. Die Flächen von dieser und jeder höheren Ordnung schneiden die R in Vollschaaren.*

Ist R gegeben, so findet man die Ordnung n' der niedrigsten Restcurve R' in folgender Weise. Die obige Relation für $p - p'$ lässt sich in der Form schreiben: $p - p' = \frac{1}{8}(n^2 - n'^2)$, und sie führt vermöge der Ungleichung $0 \leqq p' < n' - 2$ zu der neuen Ungleichung:

$$\tfrac{1}{8}(n^2 - n'^2) \leqq p < \tfrac{1}{8}(n^2 - (n' - 4)^2).$$

Man hat also für n' den kleinsten Werth zu wählen, für den $(n^2 - n'^2) \leqq 8p$ ist und $n + n'$ eine durch 4 theilbare Zahl wird. Auch hier sieht man wieder, dass das Maximalgeschlecht bei gegebenem Werthe von n den Zahlen $n' = 1, 2, 3$ oder 4 entspricht.

Betrachtet man die zu R coresidualen Curven, die also die gleiche Restcurve wie R aufweisen, so gilt für eine derartige

Curve R'' von der Ordnung n'' die Relation: $p''-p'=\frac{1}{8}(n''^2-n'^2)$ oder $p-p''=\frac{1}{8}(n^2-n''^2)$, wobei $n-n''$ eine durch 4 theilbare Zahl sein muss. Die kleinste Zahl n'', die der Ungleichung $(n^2-n''^2)\leqq 8p$ genügt und für die $n-n''$ eine durch 4 theilbare Zahl ist, giebt die niedrigste Ordnung der zu R corresidualen Curven.

Bilden die Curven R und R' den vollen Schnitt zweier Flächen F_4 und F_λ, so gehen durch R' noch ebenso viele Flächen $(\lambda-i)^{ter}$ Ord. modulo F_4 hindurch, als es zu R corresiduale Curven von der Ordnung $(n-4i)$ giebt, nämlich $(p-in+2i^2)$-fach unendlich viele. Nun schneiden die Flächen λ^{ter} Ord. durch R' auf der R_n^p die Specialgruppen aus. In einer solchen Gruppe sind nur $p-\varrho$ Punkte durch die übrigen mitbestimmt, wenn durch dieselbe noch ϱ linear unabhängige Flächen λ^{ter} Ord. gehen, welche die R', nicht aber die R enthalten. Da aber jede Fläche i^{ter} Ord. mit jeder von jenen Flächen $(\lambda-i)^{ter}$ Ord. zusammen eine Fläche λ^{ter} Ord. durch R' darstellt, so erkennt man, dass die Flächen i^{ter} Ord. auf der R_n^p Specialgruppen ausschneiden, durch welche $\varrho_i=(p+1-in+2i^2)$ adjungirte Flächen λ^{ter} Ord. gehen. Die Flächen i^{ter} Ord. schneiden also die R_n^p in Specialschaaren von der Mannigfaltigkeit $in-p+\varrho_i=2i^2+1$.

Die Flächen i^{ter} Ord. schneiden die R_n^p in Specialschaaren und zwar in Vollschaaren, wenn: $p-in+2i^2\geqq 0$ ist. Ist dagegen $p-in+2i^2<0$ und $i<\lambda$, so liefern die Flächen i^{ter} Ord. auf R_n^p eine Theilschaar, die keine Specialschaar mehr ist.

Man erkennt aus diesen Betrachtungen auch, dass die Curven, welche den vollen Schnitt zweier Flächen F_4 und F_λ bilden, von den Flächen jeder beliebigen Ordnung in Vollschaaren geschnitten werden. Ist diese Ordnung $\leqq\lambda$, so wird die Schaar eine Specialschaar.

3. *Curven, deren niedrigste Restcurve aus ε äquivalenten Curven vom Geschlechte 1 und der Ordnung n_1 besteht.* Die Restcurve R' hat also bei Curven dieser Kategorie die Ordnung $n'=\varepsilon n_1$ und das Geschlecht $p'=1$, und es gilt die Relation: $p-1=\frac{1}{2}(n-n')\lambda=\frac{1}{8}(n^2-n'^2)$. Demnach existiren Curven R_n^p von dieser Kategorie bei gegebener Ordnung nur für einzelne Werthe von p, die dieser Relation genügen, wobei $n+n'\equiv 0 \pmod 4$ sein muss. Es liegt auf der Hand, dass n' mindestens den Werth 6 haben muss; die R' zerfällt dann in zwei ebene Curven 3ter Ord.

Bei der Untersuchung der zu R corresidualen Curven R'' haben wir drei verschiedene Fälle zu unterscheiden. *Erstens* n_1 *ist gerade*, dann besitzt die niedrigste Restcurve von R_1 die gleiche Ordnung und das gleiche Geschlecht wie R_1. *Demgemäss zerfällt die zu* R_n^p *corresiduale Curve niedrigster Ordnung in* ε *Curven vom Geschlechte* 1 *und der Ordnung* n_1. *Zweitens* n_1 *ist ungerade und* ε *gerade, dann zerfällt die zu* R_n^p *corresiduale Curve niedrigster Ordnung in* $\frac{\varepsilon}{2}$ *Curven vom Geschlechte* 1 *und der Ordnung* $2n_1$. *Drittens* n_1 *und* ε *sind ungerade, dann ist die zu* R_n^p *corresiduale Curve niedrigster Ordnung irreducibel*, ihre Ordnung ist $(\varepsilon n_1 + 2)$ und ihr Geschlecht $\frac{1}{2}(\varepsilon n_1 + 3)$.

Um diese Dinge zu beweisen, zeigen wir, dass es zu zwei äquivalenten Curven R_1 von ungerader Ordnung n_1 eine irreducible Restcurve vom Geschlechte 1 und der Ordnung $2n_1$ giebt. In der That können wir die Ordnung der Restcurve gleich $2n_1$ wählen, da so die Summe der Ordnungen beider Curven durch 4 theilbar wird und die frühere Formel für das Geschlecht der Restcurve den Werth 1 liefert. Es bleibt nur noch nachzuweisen, dass diese Restcurve irreducibel ist. Nun giebt es zu R_1 eine Restcurve R_2 von der Ordnung $(n_1 + 2)$ und dem Geschlechte $\frac{1}{2}(n_1 + 3)$. Die zu zwei äquivalenten Curven R_1 gehörigen Restcurven $(2n_1 + 4)^{\text{ter}}$ Ord. schneiden die Restcurve $2n_1{}^{\text{ter}}$ Ord. in $2n_1$ Punkten. Da zu den Restcurven $(2n_1 + 4)^{\text{ter}}$ Ord. auch solche gehören, die in zwei äquivalente Curven R_2 zerfallen, so schneidet die R_2 die Restcurve $2n_1{}^{\text{ter}}$ Ord. in n_1 Punkten. Zerfiele die letztere in zwei äquivalente Theile, so würde jeder derselben mit R_2 noch $\frac{n_1}{2}$ Punkte gemein haben; das widerspricht aber der Voraussetzung, dass n_1 ungerade sei. Ist ε eine gerade Zahl, so fasse man die äquivalenten Curven R_1 paarweise zusammen und bestimme zu jedem Paare die Restcurve $2n_1{}^{\text{ter}}$ Ord.; diese $\frac{\varepsilon}{2}$ äquivalenten Curven bilden die gesuchte Curve R''. Ist ε eine ungerade Zahl, so fasse man $(\varepsilon - 1)$ äquivalente Curven R_1 paarweise zusammen und suche zu jedem Paare die Restcurve $2n_1{}^{\text{ter}}$ Ord.; ausserdem suche man zu der noch übrigen Curve R_1 eine Restcurve R_2 von der Ordnung $(n_1 + 2)$ und dem Geschlechte $\frac{1}{2}(n_1 + 3)$. Unter den gesuchten Curven R'' sind demnach solche, die in $\frac{\varepsilon - 1}{2}$ Curven $2n_1{}^{\text{ter}}$ Ord. vom Geschlechte 1

und eine Curve $(n_1+2)^{ter}$ Ord. vom Geschlechte $\frac{1}{2}(n_1+3)$ zerfallen. Da nach dem vorher Gesagten der letzte Curventheil jeden der übrigen in n_1 Punkten trifft, so besitzt die allgemeinste unter den äquivalenten Curven R'' das Geschlecht $\frac{1}{2}(n'+3)$ und ist irreducibel.

Besitzt eine Raumcurve R_n^p ε äquivalente Curven vom Geschlechte 1 und der Ord. n_1 als Rest, die mit ihr auf einer Fläche λ^{ter} Ord. liegen, so gehen noch ε-fach unendlich viele Flächen λ^{ter} Ord. durch R. Die Flächen λ^{ter} Ord. schneiden demnach aus R nur eine Theilschaar aus, alle Flächen von höherer Ordnung dagegen Vollschaaren. Auch hier treffen die Flächen i^{ter} Ord., wenn $p-in+2i^2 \geqq 0$ ist, die R_n^p in Specialschaaren, die im allgemeinen Vollschaaren sind. Nur wenn n_1 gerade oder wenn n_1 ungerade und ε gerade ist, haben die Flächen von der Ordnung $\left(\lambda - \frac{\varepsilon n_1}{2}\right)$ mit der R Specialgruppen gemein, die bloss eine Theilschaar bilden, deren Mannigfaltigkeit um $(\varepsilon-1)$ resp. $\left(\frac{\varepsilon}{2}-1\right)$ unter derjenigen der Vollschaar liegt.

Der letzte Theil dieser Resultate wird ganz wie bei den Curven der vorausgehenden Kategorie abgeleitet und im allgemeinen giebt es hier wie dort zu R noch $p''=(p-in+2i^2)$-fach unendlich viele corresiduale Curven $(n-4i)^{ter}$ Ord. R'', da diese Curven irreducibel sind. Nur in den besonderen Fällen, wo R'' in ε resp. $\frac{\varepsilon}{2}$ äquivalente Curven vom Geschlechte 1 zerfällt, wird $p''=1$, aber die Zahl der corresidualen Curven ε-fach resp. $\frac{\varepsilon}{2}$-fach unendlich.

4. *Curven mit einer mehrfach zählenden rationalen Restcurve niedrigster Ordnung.* Besteht die Restcurve R' aus einer α-fachen Curve R_1, so genügt p der Gleichung: $p=\frac{1}{8}(n^2-\alpha^2n_1^2)+1-\alpha^2$, die bei gegebenem Werthe von n einzelne Werthe von p liefert unter Berücksichtigung der Beziehung $n+\alpha n_1 \equiv 0 \pmod 4$.

In wieviel Punkten wird die Curve R_1 von der Raumcurve R_n^p geschnitten? Sei x die Zahl dieser Schnittpunkte, so besitzen die zu $(R+R_1)$ äquivalenten Curven die Ordnung $(n+n_1)$, das Geschlecht $(p-1+x)$ und sie schneiden die R_1 in je $(x-2)$ Punkten (vergl. Nr. 4). Allgemein haben die zu $(R+\alpha R_1)$ äquivalenten Curven die Ordnung $(n+\alpha n_1)$, das Geschlecht $(p+\alpha x-\alpha^2)$ und sie schneiden die R_1 in $(x-2\alpha)$ Punkten.

Diese Curven bilden aber den vollen Schnitt der F_4 mit einer Fläche von der Ordnung $\frac{1}{4}(n+\alpha n_1)$; letztere hat mit der R_1 noch $\frac{n_1}{4}(n+\alpha n_1)=(x-2\alpha)$ Punkte gemein. Das Geschlecht dieser vollen Schnittcurven ist: $\frac{1}{8}(n+\alpha n_1)^2+1=p+\alpha x-\alpha^2$. Aus beiden Relationen folgt: $x=\frac{n_1}{4}(n+\alpha n_1)+2\alpha$. *Eine R_n^p, die von einer α-fachen, rationalen Curve n_1^{ter} Ord. zu einem vollen Schnitt ergänzt wird, trifft letztere in $\frac{n_1}{4}(n+\alpha n_1)+2\alpha$ Punkten.*

Ist n_1 eine gerade Zahl, so existirt zu der rationalen Curve R_1 stets eine rationale Restcurve von gleicher Ordnung, wie aus der Relation zwischen ihren Geschlechtszahlen folgt. *Besitzt also die R_n^p eine α-fache rationale Restcurve von gerader Ordnung, so giebt es zu ihr auch eine corresiduale α-fache Curve von gleicher Ordnung.*

Ist n_1 eine ungerade Zahl, dann ist die niedrigste zu R corresiduale Curve im allgemeinen irreducibel und von der Ordnung $(n-4i)$, wo i die grösste Zahl ist, die der Ungleichung $p-in+2i^2\geqq 0$ genügt. Für besondere Werthe von n_1 und α kann sie jedoch auch entweder aus γ äquivalenten Curven vom Geschlechte 1 oder aus einer γ-fachen rationalen Curve bestehen. Dazu ist nöthig, dass γ ein Theiler von α ist, und dass es zu der $\frac{\alpha}{\gamma}$-fachen Curve R_1 eine Restcurve vom Geschlechte 1 oder 0 giebt. Das tritt ein, wenn ein Werth n_2 existirt, der den Ausdruck: $\frac{1}{2}(n_2^2-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}n_1^2)+1-\frac{\alpha^2}{\gamma^2}$ zu 1 oder 0 macht; dann ist eben n_2 die Ordnung der γ-fachen Curve oder der γ äquivalenten Curven.

Speciell gehört zu einer R_n^p, deren Rest eine α-fache Gerade ist, eine corresiduale Curve, die in α äquivalente ebene Curven 3ter Ord. zerfällt, und umgekehrt zu einer R_n^p, deren Rest aus ε äquivalenten ebenen Curven 3ter Ord. besteht, eine ε-fache Gerade als corresiduale Curve.

Um die von den Flächen i^{ter} Ord. auf der R_n^p ausgeschnittenen Schaaren zu studiren, müssen wir die gleichen Betrachtungen wie bei den Curven der zweiten Kategorie anstellen. Ist n_1 ungerade, dann sind die zu R corresidualen Curven $(n-4i)^{ter}$ Ord. irreducibel, und deshalb ist ihre Mannigfaltigkeit gleich $(p-in+2i^2)$. Wir schliessen deshalb genau wie a. a. O.:

Besitzt die R_n^p eine α-fache Restcurve von ungerader Ordnung, die mit ihr auf einer Fläche λ^{ter} Ord. liegt, so wird sie von den Flächen i^{ter} Ord., wenn: $p - in + 2i^2 \geqq 0$ ist, in Specialschaaren, und zwar im allgemeinen in Vollschaaren geschnitten. Flächen i^{ter} Ord., für welche $p - in + 2i^2 < 0$ und $i < \lambda$ ist, schneiden aus der R_n^p Theilschaaren, die keine Specialschaaren mehr sind.

Für ein *gerades* n_1 wird die zu R corresiduale Curve niedrigster Ordnung, wie wir oben sahen, selbst eine α-fache Curve n_1^{ter} Ord. Durch die α-fache Curve R_1 geht also eine einzige Fläche von der Ord. $\frac{\alpha n_1}{2}$. Ferner gehen nach Nr. 4 Seite 649 durch die α-fache Curve R_1 Flächen von der Ord. $\left(\frac{\alpha n_1}{2} + \nu\right)$ in der Mannigfaltigkeit $(\nu\beta n_1 - \beta^2 + 2\nu^2 + 1)$, wo für $\beta < \alpha$ der Werth $\beta = \frac{\nu n_1}{2}$, sonst aber $\beta = \alpha$ zu setzen ist. Nun schneiden die Flächen i^{ter} Ord. aus der R_n^p Specialgruppen aus, wenn es durch die α-fache Curve R_1 Flächen $(\lambda - i)^{ter}$ Ord. giebt. Da aber $\lambda = \frac{n + \alpha n_1}{4}$ ist, schneiden die Flächen von der Ordnung $i = \frac{n - \alpha n_1}{4} - \nu$ auf der R_n^p eine Specialschaar aus, in deren Gruppen nur $(p - \nu\beta n_1 + \beta^2 - 2\nu^2 - 2)$ Punkte durch die übrigen mitbestimmt sind. Diese Specialschaaren weisen also die Mannigfaltigkeit $\frac{1}{8}(n - \alpha n_1 - 4\nu)^2 + 1 - (\alpha - \beta)(\nu n_1 - \alpha - \beta)$ auf, die sich für $\beta = \alpha$ auf $(2i^2 + 1)$ reducirt.

Besitzt die R_n^p eine α-fache Restcurve von gerader Ordnung n_1, die mit ihr auf einer Fläche λ^{ter} Ord. liegt, so wird sie von den Flächen i^{ter} Ord., wo $i = \frac{1}{4}(n - \alpha n_1) - \nu$ ist, in Specialschaaren geschnitten. Diese Specialschaaren sind Vollschaaren für $\frac{\nu n_1}{2} \geqq \alpha$, für kleinere Werthe von ν sind sie jedoch Theilschaaren, deren Mannigfaltigkeit um $\left(\alpha - \frac{\nu n_1}{2}\right)^2$ geringer als diejenige der Vollschaar ist. Endlich schneiden die Flächen i^{ter} Ord. für $i < \lambda$, aber $i > \frac{1}{4}(n - \alpha n_1)$ die R_n^p in Theilschaaren, die keine Vollschaaren mehr sind.

6. Aufzählung der einzelnen Curvenfamilien auf den Flächen 4ter Ordnung.

Wir haben bereits in voriger Nummer gesehen, dass stets Raumcurven R von gegebener Ordnung n und gegebenem Geschlechte p existiren, deren niedrigste Restcurven irreducibel sind, so lange p unter einer gewissen Grenze bleibt. Und zwar muss $p \leqq k(2k-\eta)$ sein, für $n = 4k-\eta$ und $\eta = 1$ oder 2, für $\eta = 3$ oder 4 dagegen kann p einen um 1 grösseren Werth annehmen. Diese Curven bilden eine Familie mit $p + 33 - \zeta$ Constanten, wenn sie auf ∞^ζ Flächen 4ter Ord. liegen. Ihre niedrigsten Restcurven R' besitzen die Ordnung n', wo n' der kleinste Werth ist, welcher den Relationen: $n' \geqq \sqrt{n^2 - 8p}$ und $n + n' \equiv 0 \pmod 4$ genügt. Die niedrigsten corresidualen Curven R'' haben die Ordnung n'', wobei $n - n'' \equiv 0 \pmod 4$ und n'' die kleinste Zahl ist, welche die Ungleichung $n'' \geqq \sqrt{n^2 - 8p}$ erfüllt. Ausserdem existiren für einzelne Werthe von n und p noch andere Familien von Raumcurven, deren niedrigste Restcurven entweder aus mehreren äquivalenten Curven vom Geschlechte 1 oder aus einer mehrfach zählenden rationalen Curve bestehen. Sie bilden offenbar Familien, die nicht als specielle Fälle der vorher erwähnten Familien angesehen werden können, da sie die gleiche Anzahl von Constanten wie jene besitzen.

In den folgenden vier Tabellen sind für die Ordnungen $40, 41, 42$ und 43 die Familien aufgezählt. Dabei enthalten die Colonnen für R' und p' Ordnung und Geschlecht der niedrigsten Restcurve, die Colonnen für R'' und p'' Ordnung und Geschlecht der niedrigsten corresidualen Curve. Die Colonne für F enthält je zwei Ziffern, wovon die zweite die Ordnung der niedrigsten Flächen durch die R_n^p und die erste die Anzahl dieser Flächen, soweit sie linear unabhängig sind, angiebt. Ebenso bedeuten die beiden Ziffern in der Colonne für K die Anzahl und die Ordnung der niedrigsten Kegel durch die Doppelsecanten der Raumcurve. Die Zahl dieser Kegel ist gleich der Zahl der Curven R'' und ihre Ordnung ist: $n - 3 - \frac{1}{4}(n - n'')$. Die Colonne für u enthält die Constantenzahl der betreffenden Curven. In den Tabellen sind nur die Curven angegeben, deren Constantenzahl $u \geqq 4n$ ist, da Curven mit weniger Constanten immer specielle Curven sind.

Aber auch die Curven, für welche $u \geqq 4n$ ist, sind theilweise specielle Fälle allgemeinerer Curvenfamilien, die jedoch nicht mehr auf Flächen 4ter Ord. gelegen sind. Wann dieser Fall eintritt, konnte jedoch hier nicht erörtert werden. Zunächst sind die Curven mit irreduciblen Restcurven aufgeführt. Bestehen die Curven R' und R'' aus mehreren äquivalenten Theilen oder aus einem mehrfach zählenden Theil, dann sind die Zahlen n' und n'' in zwei Factoren gespalten, von denen der zweite die Ordnung des einzelnen Theiles, der erste die Zahl der Theile resp. die Vielfachheit des einzigen Theiles angiebt. In diesem Falle sind in die Colonnen für p' und p'' die Geschlechtszahlen 1 oder 0 der Theilcurve eingetragen.

Auf diese vier Tabellen folgt noch eine fünfte, welche alle Curven auf den Flächen 4ter Ord. bis zur 24sten Ord. enthält, deren Constantenzahl $\geqq 4n$ ist. Die Bedeutung der einzelnen Colonnen ist die gleiche wie in den vorausgehenden Tabellen. Man erkennt, dass es bis zur 21sten Ord. überhaupt keine Curven mit *reducibler* Restcurve niedrigster Ordnung giebt, die nicht specielle Fälle anderer, auf Flächen höherer Ordnung liegender Curven wären, da ihre Constantenzahl $< 4n$ ist. Erst bei höherer Ordnung treten solche reducible Restcurven auf, und um so mehr, je höher die Ordnung ist, wie das die Curven 40ster bis 43ster Ord. zeigen.

$n = 40$.

p	R'	p'	R''	p''	F	K	u
201	—	—	—	—	4.40	4.27	235
199	4	1	4	1	2.44	2.28	232
198	4	0	4	0	4.44	4.28	231
197	8	5	8	5	6.42	6.29	230
196	8	4	8	4	5.42	5.29	229
195	8	3	8	3	4.42	4.29	228
194	8	2	8	2	3.42	3.29	227
193	8	1	8	1	2.42	2.29	226
192	8	0	8	0	1.42	1.29	225
191	12	9	12	9	10.43	10.30	224
⋮							
182	12	0	12	0	1.43	1.30	215
184	16	13	16	13	14.44	14.31	214
⋮							
168	16	0	16	0	1.44	1.31	204
167	20	17	20	17	18.45	18.32	200
⋮							
150	20	0	20	0	1.45	1.32	183
149	24	21	24	21	22.46	22.33	182
⋮							
128	24	0	24	0	1.46	1.33	161
127	28	25	28	25	26.47	26.34	160
193	2.4	1	2.4	1	3.42	3.29	226
183	3.4	1	3.4	1	4.43	4.30	216
183	4.3	1	4.1	0	5.43	4.28	216
169	2.8	1	2.8	1	3.44	3.31	202
169	4.4	1	4.4	1	5.44	5.31	202
151	2.10	1	2.10	1	3.45	3.32	184
151	4.5	1	2.10	1	5.45	3.32	184
151	5.4	1	5.4	1	6.45	6.32	184
129	2.12	1	2.12	1	3.46	3.33	162
129	3.8	1	3.8	1	4.46	4.33	162
129	4.6	1	4.6	1	5.46	5.33	162
129	6.4	1	6.4	1	7.46	7.33	162
195	2.2	0	2.2	0	1.41	1.28	228
189	2.4	0	2.4	0	1.42	1.29	222
183	4.1	0	4.3	1	4.41	5.30	216
179	2.6	0	2.6	0	1.43	1.30	212
177	4.2	0	4.2	0	1.42	1.29	210
174	3.4	0	3.4	0	1.43	1.30	207
167	4.3	0	20	17	1.43	18.32	200
165	2.8	0	2.8	0	1.44	1.31	198
153	4.4	0	4.4	0	1.44	1.31	186
147	6.2	0	6.2	0	1.43	1.30	180
147	2.10	0	2.10	0	1.45	1.32	180
135	4.5	0	24	7	1.45	8.33	168
129	8.1	0	8.3	1	1.42	9.33	162

Die Raumcurve, für welche R' aus 8 äquivalenten ebenen Curven 3ter Ord. und R'' aus einer achtfachen Geraden besteht, ist reducibel und zerfällt in eine vierfache Gerade und eine sie nicht schneidende Curve 36ster Ord.

$n = 44.$

p	R'	p'	R''	p''	F	K	u
210	3	1	1	0	2.11	1.28	248
209	3	0	5	2	1.11	3.29	242
208	7	4	5	1	5.12	2.29	241
207	7	3	5	0	1.12	1.29	240
206	7	2	9	6	3.12	7.30	239
205	7	1	9	5	2.12	6.30	238
204	7	0	9	4	1.12	5.30	237
203	11	8	9	3	9.13	1.30	236
⋮							
195	11	0	13	6	1.13	7.31	228
194	15	12	13	5	13.14	6.31	227
⋮							
182	15	0	17	8	1.14	9.32	215
181	19	16	17	7	17.15	8.32	214
⋮							
165	19	0	21	10	1.15	11.33	198
164	23	20	21	9	21.16	10.33	197
⋮							
144	23	0	25	12	1.16	13.34	177
143	27	24	25	11	25.17	12.34	176
⋮							
131	27	12	29	26	13.17	27.35	164
188	3.5	1	17	9	1.14	10.32	246
201	3.1	0	3.3	1	1.11	1.30	234
174	3.5	0	17	0	1.14	1.32	207
158	5.3	0	21	3	1.14	4.33	191
156	7.1	0	7.3	1	1.12	3.33	189

Die Raumcurve, für welche R' aus 5 äquivalenten ebenen Curven 3ter Ord. und R'' aus einer fünffachen Geraden besteht, ist reducibel und zerfällt in eine Gerade und eine sie einmal schneidende Curve 40ster Ord.

$n = 42$.

p	R'	p'	R''	p''	F	K	u
220	2	0	2	0	1.11	1.29	253
219	6	3	6	3	1.12	1.30	252
218	6	2	6	2	3.12	3.30	251
217	6	1	6	1	2.12	2.30	250
216	6	0	6	0	1.12	1.30	249
215	10	7	10	7	8.13	8.31	248
⋮							
208	10	0	10	0	1.13	1.31	241
207	14	11	14	11	12.14	12.32	240
⋮							
196	14	0	14	0	1.14	1.32	229
195	18	15	18	15	16.15	16.33	228
⋮							
180	18	0	18	0	1.15	1.33	213
179	22	19	22	19	20.16	20.34	212
⋮							
160	22	0	22	0	1.16	1.34	193
159	26	23	26	23	24.17	24.35	192
⋮							
136	26	0	26	0	1.17	1.35	169
135	30	27	30	27	28.18	28.36	168
217	2.3	1	2.1	0	3.12	1.29	250
209	2.5	1	10	1	3.13	2.31	242
197	2.7	1	14	1	3.14	2.32	230
184	2.9	1	18	1	3.15	2.33	214
184	3.6	1	3.6	1	4.15	4.33	214
164	2.11	1	22	1	3.16	2.34	194
187	2.13	1	26	1	3.17	2.35	170
217	2.1	0	2.3	1	1.11	3.30	250
218	2.3	0	10	5	1.12	6.31	246
208	3.2	0	3.2	0	1.12	1.30	241
205	2.5	0	14	9	1.13	10.32	238
193	2.7	0	18	13	1.14	14.33	226
184	5.2	0	5.2	0	1.13	1.31	217
181	6.1	0	6.3	1	1.12	7.33	214
177	2.9	0	22	17	1.15	18.34	210
172	3.6	0	3.6	0	1.15	1.33	205
157	2.11	0	26	21	1.16	22.35	190
148	7.2	0	7.2	0	1.14	1.32	181
145	6.3	0	26	9	1.15	10.35	178

Die Raumcurve, für welche R' aus 6 äquivalenten ebenen Curven 3ter Ord. und R'' aus einer sechsfachen Geraden besteht, zerfällt in eine Doppelgerade und eine sie einmal schneidende Curve 40ster Ord.

$n = 43.$

p	R'	p'	R''	p''	F	K	u
231	4	0	8	4	4.44	2.30	264
230	5	2	8	0	3.42	4.30	268
229	5	1	7	4	2.42	5.31	262
228	5	0	7	3	1.42	4.31	261
227	9	6	7	2	7.43	3.31	260
⋮							
221	9	0	11	5	1.43	6.32	254
220	13	10	11	4	11.44	5.32	253
⋮							
210	13	0	15	7	1.44	8.33	248
209	17	14	15	6	15.45	7.33	242
⋮							
195	17	0	19	9	1.45	10.34	228
194	21	18	19	8	19.46	9.34	227
⋮							
176	21	0	23	11	1.46	12.35	209
175	25	22	23	10	23.47	11.35	208
⋮							
158	25	0	27	13	1.47	14.36	186
152	29	26	27	12	27.48	13.36	185
⋮							
139	29	13	31	28	14.48	29.37	172
222	3.3	1	3.1	0	1.43	1.30	255
177	3.7	1	23	12	1.46	13.35	210
154	5.5	1	27	14	6.47	15.36	187
213	3.3	0	15	10	1.43	11.33	246
204	5.1	0	5.3	1	1.42	6.33	237
168	3.7	0	23	3	1.46	4.35	201
141	9.1	0	9.3	1	1.43	10.36	174

Die Raumcurve, für welche R' aus 7 äquivalenten ebenen Curven 3ter Ord. und R'' aus einer siebenfachen Geraden besteht, zerfällt in eine dreifache Gerade und eine sie einmal schneidende Curve 40ster Ord.

Aus den vorstehenden Tabellen lassen sich auch die Raumcurven von geringerer als der 40sten Ord. ableiten, indem die gleichen Curven R' und R'' auftreten müssen für alle Curven, deren Ordnungen modulo 4 congruent sind, nur führt nicht jedes R' zu einer irreduciblen Curve der gewünschten Ordnung.

n	p	R'	p'	R''	p''	F	K	u
6	0	6	0	6	0	1.3	1.4	24
7	6	1	0	8	1	1.2	2.3	28
7	3	5	0	7	3	1.3	4.4	28
7	2	9	6	7	2	7.4	3.4	28
7	1	9	5	7	1	6.4	2.4	28
7	0	9	4	7	0	5.4	1.5	28
8	9	—	—	—	—	1.2	1.3	33
8	6	4	0	4	0	1.3	1.4	32
8	5	8	5	8	5	6.4	6.5	32
8	4	8	4	8	4	5.4	5.5	32
8	3	8	3	8	3	4.4	4.5	32
8	2	8	2	8	2	3.4	3.5	32
8	1	8	1	8	1	2.4	2.5	32
8	0	8	0	8	0	1.4	1.6	32
9	9	3	0	5	2	1.3	3.5	36
9	8	7	4	5	1	5.4	2.5	36
9	7	7	3	5	0	4.4	1.5	36
9	6	7	2	9	6	3.4	7.6	36
9	5	7	1	9	5	2.4	6.6	36
9	4	7	0	9	4	1.4	5.6	36
9	3	11	8	9	3	9.5	4.6	36
10	12	2	0	2	0	1.3	1.5	40
10	11	6	3	6	3	4.4	4.6	40
10	10	6	2	6	2	3.4	3.6	40
10	9	6	1	6	1	2.4	2.6	40
10	8	6	0	6	0	1.4	1.6	40
10	7	10	7	10	7	8.5	8.7	40
11	15	1	0	3	1	1.3	2.6	44
11	14	5	2	3	0	3.4	1.6	44
11	13	5	1	7	4	2.4	5.7	44
11	12	5	0	7	3	1.4	4.7	44
11	11	9	6	7	2	7.5	3.7	44
12	19	—	—	—	—	1.3	1.6	49
12	17	4	1	4	1	2.4	2.7	48
12	16	4	0	4	0	1.4	1.7	48
12	15	8	5	8	5	6.5	6.8	48
13	21	3	1	1	0	2.4	1.7	52
13	20	3	0	5	2	1.4	3.8	52
13	19	7	4	5	1	5.5	2.8	52
14	24	2	0	2	0	1.4	1.8	56
14	23	6	3	6	3	4.5	4.9	56
15	28	1	0	3	1	1.4	2.9	60
15	27	5	2	3	0	3.5	1.9	60
16	33	—	—	—	—	1.4	1.9	66
16	31	4	1	4	1	2.5	2.10	64
17	36	3	1	1	0	2.5	1.10	69
17	35	3	0	5	2	1.5	3.11	68
18	40	2	0	2	0	1.5	1.11	73
18	39	6	3	6	3	4.6	4.12	72
19	45	1	0	3	1	1.5	2.12	78
19	44	5	2	3	0	3.6	1.12	77

n	p	R'	p'	R''	p''	F	K	u
19	43	5	1	7	4	2.6	5.13	76
20	51	—	—	—	—	1.5	1.12	85
20	49	4	1	4	1	2.6	2.13	82
20	48	4	0	4	0	1.6	1.13	81
20	47	8	5	8	5	6.7	6.14	80
21	55	3	1	1	0	2.6	1.13	88
21	54	3	0	5	2	1.6	3.14	87
21	53	7	4	5	1	5.7	2.14	86
21	52	7	3	5	0	4.7	1.14	85
21	51	7	2	9	6	3.7	7.15	84
22	60	2	0	2	0	1.6	1.14	93
22	59	6	3	6	3	4.7	4.15	92
22	58	6	2	6	2	3.7	3.15	94
22	57	6	1	6	1	2.7	2.15	90
22	57	2.3	1	2.4	0	3.7	1.14	90
22	57	2.1	0	2.3	1	1.6	3.15	90
22	56	6	0	6	0	1.7	1.15	89
22	55	10	7	10	7	8.8	8.16	88
23	66	1	0	3	1	1.6	2.15	99
23	65	5	2	3	0	3.7	1.15	98
23	64	5	1	7	4	2.7	5.16	97
23	63	5	0	7	3	1.7	4.16	96
23	62	9	6	7	2	7.8	3.16	95
23	61	9	5	7	1	6.8	2.16	94
23	60	9	4	7	0	5.8	1.16	93
23	59	9	3	11	8	4.8	9.17	92
24	73	—	—	—	—	1.6	1.15	107
24	71	1	1	1	1	2.7	2.16	104
24	70	1	0	1	0	1.7	1.16	103
24	69	8	5	8	5	6.8	6.17	102
24	68	8	4	8	4	5.8	5.17	101
24	67	8	3	8	3	4.8	4.17	100
24	67	2.2	0	2.2	0	1.7	1.16	100
24	66	8	2	8	2	3.8	3.17	99
24	65	8	1	8	1	2.8	2.17	98
24	65	2.4	1	2.4	1	3.8	3.17	98
24	64	8	0	8	0	1.8	1.17	97
24	63	12	9	12	9	10.9	10.18	96

J. Hartmann in Potsdam, *Ueber den Gang einer mit Riefler-schem Pendel versehenen Uhr von Utzschneider und Fraunhofer.* Vorgelegt von H. Bruns.

Im Juli 1893 berichtete Herr Anding in den A. N. 3182 über den Gang der ersten nach dem neuen System des Herrn Riefler construirten Pendeluhr, und diese Untersuchung ist meines Wissens bisher die einzige geblieben. Bei der hervorragenden Bedeutung, welche die Riefler'sche Form der Pendelcompensation ohne Zweifel hat, dürften daher die folgenden Mittheilungen über ein zweites derartiges Pendel von Interesse sein.

Herr Prof. Bruns liess im Jahre 1893 eine ältere auf der Leipziger Sternwarte aufgestellte Uhr, die auf dem Zifferblatt die Firma »Utzschneider und Fraunhofer« trägt, mit einem Riefler'schen Pendel an Stelle des bisherigen Quecksilberpendels versehen. Die Federaufhängung des Pendels, sowie die Hemmung (Graham'scher Anker) blieben hierbei unverändert. Es zeigte sich jedoch bald, dass sich das Werk in keinem guten Zustande befand. Der Eingriff des Ankers in das Steigrad war nicht richtig regulirt, sodass sich der Secundenzeiger bei jeder grössten Elongation des Pendels ein Stück rückwärts bewegte. Ferner wurde der Gang der Uhr immer unregelmässiger: während er sich anfangs ziemlich constant auf $-0^s.1$ gehalten hatte, wuchs er bis zum Juli 1894 bis zu $+0^s.9$, nahm dann im August bis auf $+0^s.3$ ab, um im October wieder auf $+0^s.7$ zu steigen. Im November wurde deshalb das Werk einer gründlichen Reparatur unterworfen, wobei die Fehler der Hemmung beseitigt wurden. Im Januar 1895 blieb die Uhr noch einmal ohne ersichtlichen Grund stehen, wurde aber ohne weitere Veränderung wieder in Bewegung gesetzt, worauf etwa vom März an der Gang eine so hervorragende Constanz annahm, dass er einer genaueren rech-

nerischen Bearbeitung werth zu sein schien. Im Anschluss an meine regelmässigen Zeitbestimmungen begann ich daher eine Untersuchung dieser Uhr, musste jedoch die Beobachtungsreihe bei meinem im October 1896 erfolgten Fortgange von der Leipziger Sternwarte abbrechen. Immerhin hatte der anderthalbjährige Zeitraum hingereicht, um sowohl eine interessante Periode des Schwingungsbogens nachzuweisen, als auch den Temperatur- und Barometercoefficienten des Ganges mit genügender Sicherheit zu bestimmen.

Die Zeitbestimmungen, an welche die nach mittlerer Zeit gehende Uhr direct chronographisch angeschlossen ist, wurden in etwa achttägigen Intervallen mittelst eines gebrochenen Passageninstrumentes im Vertical des Polarsternes ausgeführt. Die angewandte Beobachtungsmethode erlaubt bei jedem einzelnen Zeitsterne eine vollständige Elimination aller Instrumentalfehler, sodass jeder Stern eine ganz unabhängige Zeitbestimmung ergiebt. Die Beobachtung beginnt mit zwei Einstellungen des Polaris mittelst der Mikrometerschraube des Fadennetzes; sodann wird der Durchgang des Zeitsternes durch zehn Fäden vor der Culmination registrirt; hierauf wird das Instrument umgelegt und der nochmalige Durchgang durch dieselben Fäden beobachtet; endlich folgen noch zwei Einstellungen des Polaris in der zweiten Kreislage. Die Genauigkeit dieser Zeitbestimmungen unterlag ziemlich starken Schwankungen. Für den mittleren Fehler m einer Zeitbestimmung aus *einem* Sterne findet sich:

1893	März 23	—	Juli 7	Beob.	Hayn	$m = \pm 0^s.106$
	Aug. 5	—	Sept. 26		Hartmann	0.040
	Sept. 26	— 1894	Febr. 16		Hayn	0.085
1894	Febr. 16	—	April 23		Hartmann	0.085
	Mai 6	—	Sept. 11		Hayn	0.080
	Sept. 17	—	Oct. 27		Hayn	0.191
	Oct. 27	— 1895	Mai 6		Hartmann	0.086
1895	Mai 16	—	Juli 17		Hartmann	0.234
	Juli 26	— 1896	Febr. 26		Hartmann	0.050
1896	März 5	—	Oct. 12		Hartmann	0.056

Die im Juni 1895 plötzlich auftretende grosse Unsicherheit der Messungen liess einen Defect am Instrumente vermuthen. Nachdem eine genaue Prüfung des Mikrometers sowie der Be-

festigung des Prismas nichts von Bedeutung ergeben hatte, zeigte es sich, dass das Objectiv in seiner Fassung locker war, und dass eines der zwischengelegten Stanniolblättchen seinen Platz verlassen hatte. Nachdem dieser Fehler beseitigt war, erlangten die Zeitbestimmungen einen vorher nie dagewesenen Grad von Sicherheit, sodass es wohl kaum einem Zweifel unterliegt, dass der genannte Fehler schon seit geraumer Zeit die Zuverlässigkeit der Beobachtungen beeinträchtigt hatte.

Für den Zeitraum nach der Reparatur ergiebt sich $m = \pm 0^s.053$; da nun an jedem Abend stets zwei oder drei Zeitsterne beobachtet wurden, so ist der m. F. eines Uhrstandes zu $\pm 0^s.035$ und bei einem siebentägigen Intervall der m. F. eines täglichen Ganges zu $\pm 0^s.007$ anzunehmen. Da diese Grösse gegen die thatsächlichen unregelmässigen Schwankungen des Uhrganges verschwindet, so ist es erlaubt, die Zeitbestimmungen als fehlerfrei anzunehmen und den berechneten täglichen Gängen bei der folgenden Ausgleichung gleiches Gewicht beizulegen. Eine Ausnahme wäre nur mit den viel unsichereren Beobachtungen vor der Entdeckung des Fehlers zu machen, und es war anfangs beabsichtigt, dieselben ganz bei Seite zu lassen. Da jedoch hierdurch der Beobachtungszeitraum zu sehr abgekürzt worden wäre, so wurde eine vorläufige Ausgleichung vorgenommen, um zu sehen, ob irgend eine der fraglichen Zeitbestimmungen besonders fehlerhaft sei. Es ergab sich nun hierbei, dass sich die früheren Gänge mit der gleichen Genauigkeit durch die gefundene Formel darstellen liessen, wie die späteren, und aus diesem Grunde wurde von einer Gewichtsbestimmung überhaupt abgesehen.

Besondere Sorgfalt wurde auf die Gewinnung möglichst richtiger Mittelwerthe des Barometer- und Thermometerstandes verwendet. Das Barometer wird auf der Leipziger Sternwarte, die zugleich eine meteorologische Station zweiter Ordnung ist, dreimal täglich — morgens 8^h, nachmittags 2^h, abends 8^h — abgelesen; ausserdem standen noch die Aufzeichnungen eines Aneroidbarographen zur Verfügung. Um ein über den ganzen Tag gleichmässig vertheiltes System von Beobachtungen des Druckes zu erlangen, wurden die Angaben des Barographen, dessen Gang zuvor einer eingehenden Untersuchung unterworfen worden war, zur Interpolation des Barometerstandes für nachts 2^h benutzt. Ausserdem dienten die Barogramme auch noch zur Con-

trole der Ablesungen am Stationsbarometer. In den wenigen Fällen, in welchen ein Versehen bei der Barometerablesung durch das Barogramm angedeutet war, wurde es jedesmal durch Heranziehung der gleichzeitigen Beobachtungen in Chemnitz und Magdeburg, auf deren Verbindungslinie Leipzig liegt, bestätigt. Aus den so gewonnenen sehr zuverlässigen sechsstündigen Barometerständen wurden dann für die einzelnen Zeitabschnitte zwischen den Zeitbestimmungen die Mittelwerthe des Druckes berechnet.

Die Temperatur im Uhrgehäuse wird zweimal täglich, morgens und abends 8^h, abgelesen. Da die Uhr ohne weiteren Schutz im Bibliotheksraume der Sternwarte von allen heizbaren Räumen vollkommen getrennt aufgestellt ist, so muss sie sowohl die jährliche, als auch die tägliche Periode der Temperatur durchmachen. Eine vor meiner Abreise noch angestellte kurze Beobachtungsreihe ergab, dass, während allerdings auch im Freien die Temperaturschwankungen nicht erheblich waren, die grösste tägliche Schwankung im Uhrgehäuse 0°7 betrug. Bedenkt man ausserdem, dass diese kleine Schwankung mit sehr grosser Annäherung in der Form einer einfachen Sinuslinie verlaufen wird, so ist es ersichtlich, dass sich das Mittel aus den zwei äquidistanten Beobachtungen nur äusserst wenig vom wahren täglichen Mittelwerthe der Temperatur entfernen kann. Bei einer schärferen Discussion des Beobachtungsmateriales würde es jedoch zu empfehlen sein, durch einige Beobachtungsreihen im Sommer und Winter festzustellen, inwieweit man auch bei den Temperaturextremen berechtigt ist, die so gebildeten Mittelwerthe als Repräsentanten der mittleren Tagestemperatur der Uhr anzusehen.

Auch der Schwingungsbogen ist zweimal täglich zu denselben Terminen von dem meteorologischen Beobachter Herrn Leppig regelmässig abgelesen worden. Eine unter dem Ende der Pendelstange angebrachte Scala ist direct in Zehntelgrade getheilt, und durch Schätzung kann 0°01 der Elongation noch mit einiger Sicherheit beobachtet werden.

Die Uhr ist ein Vierzehntagewerk, jedoch wird sie, um das 27 cm lange, dicht vor dem Pendel herabhängende Gewicht nicht zu nahe an die Linse kommen zu lassen, stets nach 7 Tagen, Mittwochs früh 10^h, aufgezogen. Um zunächst zu ermitteln, ob nicht trotzdem die Stellung des Gewichtes einen Einfluss auf

den Schwingungsbogen ausübte, bildete ich zehnwöchige Mittelwerthe aus den Ablesungen jedes einzelnen Termines. Da der ganze Beobachtungszeitraum 80 Wochen umfasst, so ergaben sich die folgenden acht Zahlenreihen, die ein höchst überraschendes Verhalten zeigen.

Tafel I.

Decade	1	2	3	4	5	6	7	8	Mittel
☿ 8h	+ 4	+ 2	+20	+17	+ 9	+ 3	+ 8	+16	+10
20h	+ 1	−11	− 2	+ 1	−25	0	+ 2	− 8	− 5
♃ 8h	−37	+21	+38	+19	−20	−35	+ 9	− 4	− 1
20h	− 4	−16	−32	−15	+10	0	−26	−45	−16
♀ 8h	+ 4	− 2	− 6	+ 1	+ 2	+ 3	+ 1	− 2	0
20h	+ 6	− 6	−16	+ 4	+ 7	+16	+12	+ 3	+ 3
♄ 8h	+ 9	+57	+66	+23	+18	+39	+33	+38	+35
20h	− 5	−25	−38	−41	− 8	0	− 5	−22	−18
☉ 8h	+ 8	+ 2	− 8	+ 3	+ 3	− 1	+ 6	+15	+ 3
20h	+14	+ 4	+11	+12	+25	+17	+24	+21	+16
☾ 8h	− 3	− 9	−20	− 2	−19	−16	−13	− 2	−10
20h	−41	−49	−42	−47	−37	−62	−80	−41	−50
♂ 8h	+11	− 2	−12	+ 7	+ 9	+ 4	+ 7	+ 2	+ 3
20h	+29	+30	+39	+24	+26	+37	+27	+34	+31

In der ersten Columne dieser Tafel sind die Wochentage durch die bekannten Planetenzeichen kenntlich gemacht, in den folgenden sind die Abweichungen der Mittelwerthe der einzelnen Termine vom zehnwöchigen Mittel des ganzen Schwingungsbogens gegeben, ausgedrückt in 0°001. Eine im Laufe einer Woche der Zeit proportionale Aenderung der Amplitude ist nicht vorhanden, aber in allen Reihen zeigt sich vollkommen übereinstimmend eine regelmässige Schwankung von etwa zweitägiger Periode. Noch deutlicher tritt letztere hervor, wenn man nur die *Aenderungen* des Schwingungsbogens zwischen den Beobachtungsterminen ins Auge fasst; ich habe daher auch diese, ebenfalls in 0°001 ausgedrückten Zahlen in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tafel II.

Decade	1	2	3	4	5	6	7	8	Mittel
☿ Tag	−25	−28	− 19	− 7	−17	−34	−19	−18	−21
Nacht	− 3	−13	− 22	−16	− 34	− 3	− 6	−24	−15
♃ Tag	−38	+32	+ 10	+18	+ 5	−35	+ 7	+ 4	+ 4
Nacht	+33	−37	− 70	−34	+30	+35	−35	−41	−15
♀ Tag	+ 8	+14	+ 26	+16	− 8	+ 3	+27	+43	+16
Nacht	+ 2	− 4	− 10	+ 3	+ 5	+13	+11	+ 5	+ 3
♄ Tag	+ 3	+63	+ 82	+19	+11	+23	+21	+35	+32
Nacht	−14	−82	−104	−64	−26	−39	−38	−60	−53
☉ Tag	+13	+27	+ 30	+44	+11	− 1	+11	+37	+21
Nacht	+ 6	+ 2	+ 19	+ 9	+22	+18	+18	+ 6	+13
☾ Tag	−17	−13	− 31	−14	−44	−33	−37	−23	−26
Nacht	−38	−40	− 22	−45	−18	−46	−67	−39	−39
♂ Tag	+52	+47	+ 30	+54	+46	+66	+87	+43	+53
Nacht	+18	+32	+ 51	+17	+17	+33	+20	+32	+27
☿ Tag	−25	−28	− 19	− 7	−17	−34	−19	−18	−21

Man sieht, dass der Schwingungsbogen nach dem Aufziehen regelmässig in den ersten 24 Stunden abnimmt, im Mittel um 0°036; dann folgen zwei Tage lang unregelmässige Schwankungen, die wohl noch als eine Nachwirkung des Aufziehens aufzufassen sind. Von Sonnabend früh an haben aber in der letzten Tabelle die Zahlen jeder Horizontalreihe das gleiche Vorzeichen, sodass also von diesem Zeitpunkte an die Aenderungen des Schwingungsbogens in sämmtlichen 80 Wochen ganz übereinstimmend erfolgten und zwar, wie man sofort erkennt, mit einer Periode von zwei Tagen. Es lag nun nahe, die Ursache dieser Störungen in einem Rade des Werkes zu suchen, und in der That konnte, da vorläufig die Uhr nicht geöffnet werden sollte, durch Zählung der beim Aufziehen auszuführenden Umdrehungen des Schlüssels festgestellt werden, dass die Aufzugswelle in zwei Tagen einmal umläuft. Es ist daher mit ziemlicher Sicherheit anzunehmen, dass die regelmässigen Aenderungen des Schwingungsbogens ihren Grund in einer Excentricität eines Theiles dieser Welle haben, wodurch eine veränderliche Stärke des Antriebes entstehen muss.

Es erwuchs nunmehr die Aufgabe, zu ermitteln, welche Wirkung die festgestellten Schwankungen des Schwingungs-

bogens auf den Gang der Uhr ausüben. Bezeichnet man den ganzen Schwingungsbogen mit S, den täglichen Gang mit G, so ist für das einfache Pendel

$$dG = 30\pi \sin \frac{S}{2} dS,$$

wobei dS in Graden auszudrücken ist. Da bei »Fraunhofer-Riefler« S sich immer sehr nahe auf 3° gehalten hat, so wäre nach obiger Formel für je 0°001 Zunahme des ganzen Schwingungsbogens eine Gangänderung von + 0°002467 zu erwarten. Die mit einem Uhrwerk verbundenen physischen Pendel folgen jedoch nicht dieser einfachen Formel, sodass sich z. B. für die Uhren »Riefler Nr. 1« in München[1]) und »Tiede Nr. 400« in Berlin[2]) der Einfluss der Schwingungsweite auf den Gang etwa doppelt so gross ergab.

Auf der Leipziger Sternwarte werden die Hauptuhren täglich 2^h mit einander chronographisch verglichen, und das reiche, auf diese Weise gesammelte Beobachtungsmaterial ist zur Untersuchung kurzperiodischer Schwankungen des Ganges sehr geeignet. Die Reduction der täglichen Vergleichungen erfolgt in der Weise, dass zwischen je zwei Zeitbestimmungen der Gang der Normaluhr »Dencker XII« als constant angenommen wird, woraus sich dann die täglichen Gänge der übrigen Uhren unmittelbar ergeben. Es ist klar, dass sich durch diese Berechnungsweise alle Unregelmässigkeiten des Ganges von »Dencker XII« auf die anderen Uhren übertragen müssen, doch ist hierbei Folgendes zu beachten. Da der Barometercoefficient für »Dencker XII« und für »Fraunhofer-Riefler« sehr nahe denselben Werth hat, so sind Luftdruckschwankungen ohne Einfluss auf den relativen Gang beider Uhren. Die Temperatur würde, da die Thermometercoefficienten erheblich verschieden sind, störend einwirken können; jedoch sind zwischen zwei Zeitbestimmungen die Temperaturänderungen nur gering, sodass auch hieraus kein erheblicher Fehler entspringen kann. Ueberdies ist anzunehmen, dass die letztgenannten kleinen Unterschiede ebenso wie alle unregelmässigen Schwankungen des Ganges von »Dencker XII« als zufällige Fehler wirken und sich im Mittel aus den zahlreichen Vergleichungen aufheben werden. Nur die einzige Annahme

1) Anding A. N. 3482.
2) Zwink, Inaug.-Diss. Kiel 1888.

muss gemacht werden, dass nicht der Gang von »Dencker XII« eine gleiche zweitägige Periode besitzt, wie die zu untersuchende Uhr; wenn im letzteren Falle dann auch noch die Phasen bei beiden Uhren übereinstimmten, so könnte im relativen Gange die Periodicität verschwinden. Dieses Zusammentreffen ist jedoch so unwahrscheinlich, dass man kaum damit zu rechnen hat.

Die aus den täglichen Vergleichungen folgenden Gänge von »Fraunhofer-Riefler« habe ich den früheren Gruppen entsprechend in zehnwöchige Mittelwerthe zusammengezogen und gebe in Tafel III wieder die Abweichungen der Terminmittel vom Gesammtmittel der zehn Wochen. Im Sommer 1896 wurde »Dencker XII« einer Reinigung unterworfen, sodass von den letzten 20 Wochen, während welcher »Fraunhofer-Riefler« als Normaluhr diente, die Vergleichungen fehlen.

Tafel III.

Decade	1	2	3	4	5	6	Mittel
☿ — ♃	— 0ˢ.013	+0ˢ.013	—0ˢ.025	+0ˢ.017	—0ˢ.007	— 0ˢ.034	— 0ˢ.008
♃ — ♀	— 19	— 24	— 24	+ 9	— 23	+ 31	— 8
♀ — ♄	— 14	+ 24	— 46	— 40	+ 12	— 32	— 16
♄ — ☉	+ 1	— 52	+ 23	+ 54	— 10	+ 28	+ 7
☉ — ☾	+ 7	+ 18	+ 41	+ 4	+ 11	— 3	+ 13
☾ — ♂	+ 37	+ 20	+ 18	+ 5	+ 30	— 4	+ 18
♂ — ☿	— 2	— 2	+ 16	— 47	— 10	+ 17	— 5

Nimmt man an, dass jede der beobachteten Schwingungsweiten zwölf Stunden, sechs vor und sechs nach der Ablesung bestanden hat, so ergeben sich für die Zeiträume zwischen den täglichen Uhrvergleichungen aus den Zahlen der Tafel I die in der folgenden Tabelle mit dS überschriebenen Abweichungen des ganzen Schwingungsbogens von seinem Mittelwerthe, und hieraus würden für ein mathematisches Pendel die mit R bezeichneten Gänge folgen, während B die der Tafel III entnommenen beobachteten Werthe sind.

Tafel IV.

	dS	R	B
☿ — ♃	+ 0ˢ.0025	+ 0ˢ.006	— 0ˢ.008
♃ — ♀	— 85	— 21	— 8
♀ — ♄	+ 15	+ 4	— 16
♄ — ☉	+ 85	+ 21	+ 7
☉ — ☾	+ 95	+ 23	+ 13
☾ — ♂	— 300	— 74	+ 18
♂ — ☿	+ 170	+ 42	— 5

Von den B haben drei das gleiche, vier das entgegengesetzte Vorzeichen wie R, sodass also in den täglichen Gängen keine Spur einer Einwirkung der Schwankungen der Amplitude zu erkennen ist. Am deutlichsten müsste sich der Einfluss jener Schwankungen am Montag und Dienstag zeigen, wo rechnungsmässig eine Ganganderung von — 0ˢ.097 resp. + 0ˢ.116 stattfinden müsste, während die Beobachtungen nur + 0ˢ.005 resp. — 0ˢ.023 ergeben. Dieses für den gleichmässigen Gang der Uhr ausserordentlich wichtige Resultat, die Unabhängigkeit vom Schwingungsbogen, werden wir später noch auf anderem Wege bestätigt finden.

Zu einer Beurtheilung der Gleichmässigkeit des Ganges beider Uhren während kürzerer Intervalle scheint mir das Material der täglichen Vergleichungen nicht geeignet zu sein, da dasselbe bei der nur einmal ausgeführten Reduction gegen Rechenfehler nicht genügend gesichert ist. Das Einzige, was man aus den Werthen von B noch folgern könnte, ist eine geringe Zunahme des relativen Ganges beim Sinken des Uhrgewichtes, jedoch lässt sich nicht entscheiden, von welcher Uhr diese Erscheinung veranlasst wird.

Um für die Untersuchung der Abhängigkeit des Schwingungsbogens von Temperatur und Luftdruck ein von den besprochenen periodischen Schwankungen freies Material zu haben, wurden der weiteren Ausgleichung die von Mittwoch zu Mittwoch gebildeten wöchentlichen Mittelwerthe zu Grunde gelegt. Diese Zahlen nebst den zugehörigen Werthen des Barometer- und Thermometerstandes B und T sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Unter S sind die Abweichungen des ganzen Schwingungsbogens von 3° gegeben. Das beigesetzte Datum ist der mittelste Tag (Sonnabend) der betreffenden Woche. Die Columne F findet später ihre Erklärung.

Tafel V.

t	*S*	*B*	*T*	*F*
		mm		
1895 März 9	— 0.020	748.27	— 0.72 C	— 0.038
16	— 26	754.72	+ 1.99	— 44
23	— 21	742.57	+ 3.59	— 46
30	— 34	744.74	+ 5.96	— 62
April 6	— 12	748.04	+ 5.14	— 34
13	— 12	754.59	+ 8.07	— 34
20	+ 13	749.74	+ 10.96	— 15
27	+ 12	752.64	+ 12.87	— 16
Mai 4	+ 9	760.04	+ 12.66	— 14
11	+ 27	755.54	+ 15.06	— 1
18	+ 29	739.70	+ 12.09	— 1
25	+ 26	752.74	+ 14.90	0
Juni 1	+ 26	752.54	+ 16.99	— 2
8	+ 32	750.73	+ 18.26	+ 2
15	+ 28	754.76	+ 16.04	+ 3
22	+ 47	755.54	+ 17.86	+ 22
29	+ 54	749.93	+ 18.66	+ 27
Juli 6	+ 66	754.49	+ 18.84	+ 42
13	+ 84	746.88	+ 18.05	+ 56
20	+ 69	748.54	+ 19.19	+ 44
27	+ 74	750.14	+ 21.29	+ 48
Aug. 3	+ 67	745.38	+ 19.72	+ 42
10	+ 72	748.74	+ 19.39	+ 54
17	+ 46	754.84	+ 18.14	+ 34
24	+ 65	753.53	+ 20.64	+ 47
31	+ 69	755.34	+ 19.90	+ 54
Sept. 7	+ 100	754.44	+ 21.22	+ 84
14	+ 76	752.78	+ 17.74	+ 66
21	+ 25	759.12	+ 16.17	+ 22
28	+ 25	757.24	+ 16.19	+ 22
Oct. 5	+ 19	743.84	+ 15.17	+ 12
12	— 1	748.97	+ 13.94	— 2
19	— 6	754.13	+ 9.71	+ 4
26	— 5	744.16	+ 7.38	+ 4
Nov. 2	— 10	755.90	+ 6.79	+ 8
9	— 15	747.09	+ 10.56	— 7
16	— 31	757.16	+ 10.22	— 15
23	— 23	759.00	+ 5.19	+ 3
30	— 25	753.14	+ 2.64	+ 3
Dec. 7	— 20	740.50	+ 4.34	0

t	S	B	T	F
		mm		
1895 Dec. 14	— 0°024	743.40	+ 3°72 C	0°000
21	— 39	748.64	+ 2.76	— 10
28	— 34	754.13	— 0.45	+ 4
1896 Jan. 4	— 28	762.03	+ 0.45	+ 14
11	— 25	756.20	— 0.18	+ 17
18	— 21	755.01	+ 1.95	+ 18
25	— 58	760.54	+ 1.94	— 15
Febr. 1	— 59	767.21	+ 1.59	— 11
8	— 49	761.86	+ 3.05	— 4
15	— 74	761.22	+ 2.53	— 28
22	— 39	759.08	+ 0.67	+ 10
29	— 33	744.82	+ 1.28	+ 9
März 7	— 46	745.52	+ 4.32	— 7
14	— 54	750.09	+ 4.26	— 11
21	— 86	752.02	+ 9.16	— 48
28	— 61	744.60	+ 8.86	— 26
April 4	— 31	752.16	+ 5.45	+ 15
11	— 38	750.18	+ 7.75	+ 5
18	— 39	758.51	+ 7.60	+ 9
25	— 29	751.64	+ 8.84	+ 15
Mai 2	— 45	754.79	+ 9.97	— 1
9	— 46	755.51	+ 11.35	— 1
16	— 24	754.34	+ 12.30	+ 18
23	— 28	752.49	+ 12.64	+ 16
30	— 40	754.89	+ 14.60	+ 2
Juni 6	— 45	746.29	+ 17.54	— 10
13	— 49	750.10	+ 18.82	— 12
20	— 44	753.44	+ 19.57	— 6
27	— 44	750.24	+ 17.56	— 3
Juli 4	— 33	750.55	+ 16.09	+ 12
11	— 26	754.04	+ 19.22	+ 17
18	— 39	754.72	+ 20.26	+ 2
25	— 29	754.70	+ 19.45	+ 15
Aug. 1	— 37	748.43	+ 18.70	+ 8
8	— 54	754.84	+ 18.15	— 5
15	— 46	750.78	+ 17.40	+ 5
22	— 40	748.78	+ 16.90	+ 12
29	— 66	754.98	+ 16.19	— 10
Sept. 5	— 63	750.82	+ 16.13	— 6
12	— 76	748.54	+ 16.75	— 20

Es ist zunächst hervorzuheben, dass sich der Schwingungsbogen immer sehr nahe auf 3° gehalten hat; die auch nur ganz vorübergehend erreichten Extreme sind 3°6.'0 und 2°54.'8. Fast vollkommen constant würde die Amplitude sein, wenn man von der grösseren Schwankung absieht, die sich während des Sommers 1895 im Verlaufe der ersten drei Decaden abgespielt hat. Ueber die Ursache dieser Störung lässt sich nichts Näheres angeben; mit der Temperatur dürfte sie in keinem Zusammenhange stehen, da sich im Sommer 1896 durchaus nichts Aehnliches zeigte. Da es vollkommen ausgeschlossen war, auch diese Störung in einer einfachen Formel für den Schwingungsbogen mit zum Ausdruck zu bringen, so schlug ich bei der Ausgleichung den folgenden Weg ein.

Jeder Werth von S habe die Form

$$S = S_0 + S_B(B - 750\,\text{mm}) + S_T(T - 10^\circ) .$$

Die so entstehenden 80 Gleichungen wurden nun unter der Bedingung aufgelöst, dass zwar dem ganzen Beobachtungsmaterial derselbe Werth von S_B und S_T, aber immer nur 10 aufeinanderfolgenden Wochen ein gemeinsamer Werth von S_0 entsprechen sollte. Die Auflösung nach der Methode der kleinsten Quadrate ergab folgendes System der Unbekannten:

$$S_B = -0.^s000462 \qquad S_{01} = -0.^s0004$$
$$S_T = +0.00234 \qquad S_{02} = +0.0293$$
$$S_{03} = +0.0423$$
$$S_{04} = -0.0082$$
$$S_{05} = -0.0185$$
$$S_{06} = -0.0354$$
$$S_{07} = -0.0510$$
$$S_{08} = -0.0658$$

Die S_0 zeigen jetzt ganz deutlich die vorübergehende starke Zunahme der Schwingungsweite in der zweiten und dritten Decade, während von S_{04} an eine der Zeit fast genau proportionale Abnahme von S um wöchentlich $0.^s00144$ oder täglich $0.^s000207$ eintrat. Dieses Resultat liess erwarten, dass man eine sehr gute Darstellung des Schwingungsbogens während der letzten 50 Wochen durch Einführung eines der Zeit proportionalen Gliedes erhalten würde, und ich setzte daher nun nur für

diesen immerhin noch ein Jahr umfassenden Zeitraum die Bedingungsgleichungen in der Form an:

$$S = S_0 + S_t(t - 1896\,\text{März}\,25) + S_B(B - 750\,\text{mm}) + S_T(T - 10^\circ).$$

Unter Einführung der Hülfsgrössen

$$s_0 = 10\,S_0 \qquad s_B = 100\,S_B$$
$$s_t = 1750\,S_t \qquad s_T = 100\,S_T$$

ergaben sich die Normalgleichungen

$$0 = +18.5800 + 50.00\,s_0 + 0.0000\,s_t + 10.4600\,s_B - 0.9100\,s_T$$
$$0 = +3.2372 + 0.00\,s_0 + 16.6600\,s_t - 1.2712\,s_B + 12.8730\,s_T$$
$$0 = +5.1210 + 10.46\,s_0 - 1.2712\,s_t + 16.5882\,s_B - 5.9151\,s_T$$
$$0 = +0.1106 - 0.91\,s_0 + 12.8730\,s_t - 5.9151\,s_B + 21.3764\,s_T,$$

deren Auflösung zu folgenden Werthen der Unbekannten führte:

$$s_0 = -0^s.3581 \pm 0^s.0212 \text{ (m. F.)}$$
$$s_t = -0.3208 \pm 0.0476$$
$$s_B = -0.0509 \pm 0.0396$$
$$s_T = +0.1587 \pm 0.0443$$

Die Formel für den Schwingungsbogen lautet daher:

$$S = 2^s.964 \qquad \pm 0^s.00212 \text{ (m. F.)}$$
$$- 0.0001833\,(t - 1896\,\text{März}\,25) \qquad \pm 0.0000272$$
$$- 0.000509\,(B - 750\,\text{mm}) \qquad \pm 0.000396$$
$$+ 0.001587\,(T - 10^\circ\text{C}) \qquad \pm 0.000443$$

Diese Formel befindet sich in sehr guter Uebereinstimmung mit den oben aus allen 80 Beobachtungswochen auf ganz anderem Wege abgeleiteten Zahlen. Der seinen m. F. nur wenig übersteigende Barometercoefficient ist sehr klein, für 1 mm Druckzunahme verringert sich der ganze Schwingungsbogen um $1''.83$. Für die mit Quecksilbercompensation versehene Uhr »Tiede Nr. 3« der Berliner Sternwarte konnte Herr FORSTER [1]) die Abhängigkeit der Amplitude vom Barometerstande in der Form darstellen

$$\frac{dS}{S} = -0.179\,\frac{dB}{B},$$

woraus sich für $S = 3^\circ$ und $B = 750$ mm $S_B = -2''.6$ ergeben würde. Für die von Herrn SCHUMANN [2]) eingehend untersuchte

1) A. N. 2183.
2) Sitzungsber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1888.

Uhr »Dencker XII« hatte sich $S_B = -4''.1$ ergeben. Auch der Temperaturcoefficient $+5''.71$ für $+1°C$ ist äusserst klein und beträgt nur den neunten Theil der für »Dencker XII« gefundenen Grösse $+49''.7$.

In Tafel V sind unter F die nach obiger Formel übrig bleibenden Fehler aufgeführt. Abgesehen von der stark hervortretenden systematischen Schwankung der ersten drei Decaden, deren Mittelwerth jedoch ebenfalls gut dargestellt wird, haben die Abweichungen zwischen Beobachtung und Rechnung den Charakter zufälliger Fehler, die in kurzen unregelmässigen Perioden das Vorzeichen wechseln. Für die letzten 50 Wochen ergiebt sich die Summe der Fehlerquadrate 0.008897, woraus der m. F. in der Darstellung eines wöchentlichen Mittelwerthes $\pm 0^s.0139 = 0''.83$ folgt, während für »Dencker XII« die gleiche Grösse $2''.1$ betrug.

Das für die Untersuchung des Uhrganges benutzbare Beobachtungsmaterial erstreckt sich über die Zeit vom 3. März 1895 bis 3. October 1896 und enthält 65 Zeitbestimmungen, aus denen die in der folgenden Tabelle mit G bezeichneten täglichen Gänge berechnet sind.

Tafel VI.

t	G	B	T	S	F
1895 März 6.30	$-0^s.120$	748.99mm	$-1°.28$ C	$-0^s.017$	$-0^s.004$
13.82	— 144	752.16	+ 1.14	— 22	— 68
22.34	— 278	743.53	+ 3.34	— 24	— 63
Apr. 1.82	— 311	743.42	+ 5.44	— 19	— 88
13.30	— 143	753.46	+ 7.81	— 16	— 64
23.85	— 204	748.49	+12.04	+ 13	— 35
Mai 2.81	— 58	759.18	+12.61	+ 9	— 50
11.32	— 95	753.48	+14.67	+ 26	+ 7
21.30	— 263	744.29	+12.99	+ 26	— 27
28.27	— 120	757.52	+15.52	+ 31	— 76
Juni 6.38	— 153	751.34	+17.80	+ 29	— 8
17.87	— 160	752.72	+16.63	+ 39	— 40
27.34	— 136	752.28	+18.18	+ 52	— 4
Juli 5.82	— 130	754.66	+19.05	+ 63	— 32
13.29	— 150	747.39	+18.19	+ 82	+ 57
21.87	— 213	749.55	+19.40	+ 64	— 34

t	G	B	T	S	F
1895 Juli 31.40	−0.188	747.21 mm	+20.92 C	+0.074	+0.031
Aug. 11.36	− 185	749.37	+18.94	+ 69	− 7
22.38	− 39	754.62	+19.76	+ 50	+ 63
29.38	− 75	754.68	+19.78	+ 78	+ 26
Sept. 4.86	− 45	755.07	+20.98	+ 91	+ 53
14.82	− 107	753.28	+17.92	+ 73	+ 9
23.80	+ 70	760.90	+15.99	+ 19	+ 63
Oct. 2.29	− 113	749.69	+15.72	+ 25	+ 50
11.27	− 153	747.79	+14.24	− 1	+ 33
20.86	− 146	749.39	+ 9.45	− 3	0
30.95	− 36	753.72	+ 6.57	− 8	+ 36
Nov. 8.83	− 141	747.41	+10.05	− 14	+ 38
17.20	+ 19	758.46	+ 9.73	− 27	+ 28
24.18	+ 65	758.30	+ 4.67	− 22	+ 60
Dec. 3.68	− 103	746.76	+ 3.45	− 23	+ 63
21.33	− 61	748.92	+ 2.06	− 34	+ 68
1896 Jan. 5.94	+ 83	762.77	+ 0.36	− 32	− 5
15.90	− 31	753.76	+ 0.93	− 19	+ 19
24.37	+ 30	759.22	+ 2.22	− 56	+ 3
Feb. 2.14	+ 101	766.07	+ 1.75	− 53	− 33
10.61	+ 11	759.14	+ 3.85	− 69	− 9
16.30	+ 95	762.28	+ 2.10	− 70	+ 20
22.79	+ 96	758.54	+ 0.62	− 36	+ 74
März 1.36	− 147	743.02	+ 1.79	− 40	+ 70
8.84	− 125	747.94	+ 4.25	− 54	+ 27
15.75	− 102	749.99	+ 5.00	− 55	+ 20
22.34	− 93	752.47	+ 9.63	− 94	+ 7
Apr. 3.10	− 159	749.24	+ 7.31	− 42	− 17
16.55	− 85	754.71	+ 7.68	− 44	− 25
25.32	− 129	752.08	+ 8.79	− 29	− 26
Mai 3.37	− 177	752.76	+ 9.98	− 42	− 81
11.88	− 138	753.39	+11.99	− 33	− 44
18.87	− 238	750.36	+12.25	− 34	− 98
25.37	− 165	753.54	+13.25	− 35	− 68
Juni 2.85	− 180	749.63	+15.93	− 38	− 15
11.35	− 219	748.45	+18.10	− 50	− 29
20.37	− 199	752.01	+19.40	− 47	− 58
30.91	− 250	750.18	+16.86	− 36	− 91
Juli 10.38	− 113	753.96	+18.48	− 35	− 6
19.85	− 141	751.94	+20.02	− 30	+ 3

t	G	B	T	S	F
1896 Juli 29.92	−0ˢ.213	749.41 mm	+18ˢ.91 C	−0ˢ.031	−0ˢ.035
Aug. 7.36	— 139	751.36	+18.17	— 62	+ 7
16.32	— 88	750.53	+17.32	— 42	+ 68
25.39	— 63	750.13	+16.51	— 58	+ 96
Sept. 2.90	— 95	751.16	+16.31	— 58	+ 47
10.87	— 118	748.90	+16.56	— 71	+ 60
18.81	— 161	747.98	+16.13	— 81	+ 29
28.30	— 121	750.89	+13.29	— 104	+ 15

Schon ein Blick auf diese Tafel zeigt, dass der Gang während der ganzen Zeit sehr constant geblieben ist. Eine fortschreitende Aenderung ist gar nicht angedeutet, und auch von T und S scheint G unabhängig zu sein, dagegen fällt sofort ein starker Einfluss des Barometerstandes in die Augen.

Zu einer vorläufigen Sichtung des Materials setzte ich daher zunächst G in der Form an

$$G = G_0 + G_B(B - 750\text{ mm})$$

und löste die 64 so erhaltenen Gleichungen in 8 Gruppen, die auch in Tafel VI durch Zwischenräume getrennt sind, unter der Bedingung auf, dass jede Gruppe ihr besonderes G_0, aber alle ein gemeinsames G_B ergeben sollten. Das Resultat der Auflösung war folgendes System der Unbekannten, neben die ich die zugehörigen Temperaturen stelle:

$G_B = +0ˢ.0134$	$G_{01} = -0ˢ.174$	$T = +6ˢ.97$
	$G_{02} = -0.182$	$+17.22$
	$G_{03} = -0.127$	$+18.75$
	$G_{04} = -0.088$	$+7.55$
	$G_{05} = -0.079$	$+4.70$
	$G_{06} = -0.147$	$+8.08$
	$G_{07} = -0.205$	$+16.79$
	$G_{08} = -0.125$	$+16.65$

In den Werthen der $G_{0\alpha}$ verräth sich nunmehr sofort eine Abhängigkeit von der Temperatur. Eine Ausgleichung der acht Zahlen in der Form:

$$G_{0\alpha} = G_0 + G_T(T_\alpha - 10°)$$

ergab nach der Cauchy'schen Methode

$$G_0 = -0{:}135$$
$$G_T = -0.00335$$

und liess in den $G_{0\alpha}$ die folgenden Fehler F übrig, neben die ich nunmehr die zugehörigen Schwingungsbogen setze:

F	S
$-0{:}049$	$-0{:}006$
-0.022	$+0.048$
$+0.038$	$+0.060$
$+0.039$	-0.016
$+0.029$	-0.047
-0.018	-0.049
-0.047	-0.038
$+0.033$	-0.063

Es zeigt sich in diesen Zahlen keine Spur einer Abhängigkeit von einander: viermal haben F und S übereinstimmendes, viermal entgegengesetztes Vorzeichen. Da auch ein der Zeit proportionaler Gang in den F nicht zu erkennen ist, so nahm ich nun für die definitive Ausgleichung den Gang in der einfachen Form an:

$$G = G_0 + G_B(B - 750\,\text{mm}) + G_T(T - 10^\circ).$$

Um homogene Gleichungen zu erhalten, wurde

$$10\,G_0 = g_0 \qquad 100\,G_B = g_B \qquad 100\,G_T = g_T$$

gesetzt, wodurch sich die Normalgleichungen ergaben

$$0 = +71.8900 + 64.00\,g_0 + 13.6000\,g_B + 10.9200\,g_T$$
$$0 = -\ 7.3941 + 13.60\,g_0 + 17.0414\,g_B - \ 1.1577\,g_T$$
$$0 = +27.0381 + 10.92\,g_0 - \ 1.1577\,g_B + 29.9630\,g_T.$$

Hieraus resultirten folgende Werthe der Unbekannten mit ihren mittleren Fehlern

$$g_0 = -1{:}3885 \pm 0{:}0694$$
$$g_B = +1.5190 \pm 0.1304$$
$$g_T = -0.3377 \pm 0.0925.$$

Die definitive Gangformel für »Fraunhofer-Riefler« lautet somit

$$G = -0{:}139 \pm 0{:}00694$$
$$+ 0.01519\,(B - 750\,\text{mm}) \pm 0.00130$$
$$- 0.00338\,(T - 10^\circ\text{C}) \pm 0.00092.$$

Ein Vergleich mit den vorher durch gruppenweise Auflösung erhaltenen Coefficienten zeigt, dass auch hier das Näherungsverfahren schon sehr nahe die wahrscheinlichsten Werthe ergeben hatte.

Die Kleinheit des Temperaturcoefficienten beweist, dass auch bei dem Leipziger Pendel, gleichwie bei der Münchener Uhr, die Wärmecompensation fast vollkommen gelungen ist, wobei noch besonders hervorgehoben werden muss, dass nach der Aufhängung des Pendels keinerlei Gebrauch von der zur Verbesserung der Compensation angebrachten Vorrichtung gemacht wurde.

Dagegen hat der Barometercoefficient einen Betrag, der selbst die für viele Quecksilberpendel älterer Construction gefundenen Werthe übersteigt. Um die Vergleichung mit anderen Uhren zu erleichtern, gebe ich hier eine übersichtliche Zusammenstellung der bisher bekannt gewordenen Gangformeln.

Tafel VII.

Nr.	Uhr	Compensirung	G_t	G_{t^2}	G_B	G_T	G_S
1	Kessels 1273, Königsberg	R				+0.0444	
2	Earnshaw, Armagh	Q			+0.0098	−0.1242	
3	—	Q			+0.0165		
4	Kessels 1364, Pulkowa	Q			+0.0126		
5	Kessels 1364, Pulkowa	Q			+0.0131		
6	Schmidt, Soerabaya	Q			+0.0134		
7	Hohwü 15, Leiden	Q	+0.2893	−0.0344	+0.0146	−0.0525	
8	Hohwü 17, Leiden	Q	0	0	+0.0127	−0.0154	0
9	Hohwü 17, Leiden	Q			+0.0149		
10	—	—			+0.0284		
11	—	Q			+0.0126		
12	Knoblich 1847, Kiel	QB	+0.0717	0	−0.0113	−0.0025	
13	Tiede 8, Berlin	Q			+0.0149	0	
14	Hohwü 25, Strassburg	Q	0	0	+0.0125	−0.0110	
15	Knoblich 1963, Strassburg	QB	0	0	0	+0.0240	
16	Knoblich 1952, Potsdam	QB	−0.14		+0.0014	−0.0360	
17	Hohwü, Utrecht	Q			+0.0138		

Nr.	Uhr	Compensirung	G_t	G_{t^2}	G_B	G_T	G_S
18	de Casserer, Utrecht	Q			+0.0177		
19	Hohwü 87, Upsala	Q	0	0	+0.0149	−0.0265	
20	Dencker XII, Leipzig	R	+0.0107	0	+0.0110	−0.0164	0
21	Tiede 400, Berlin	RL	−0.0337	+0.0015		+0.0222	+0.148
22	Dent, Hongkong	R	−0.6550	+0.0420		−0.1134	
23	Hipp, Neuchâtel	QL	−0.26	+		−0.0047	
24	Knoblich 1770, Bothkamp	Q	−0.0209	0	+0.0153	−0.0142	
25	Riefler 1, München	Ri	0	0	+0.0103	−0.0008	+ 0.086
26	Winnerl, Paris	—	−0.0161		+0.0140		
27	Fraunhofer-Riefler, Leipzig	Ri	0	0	+0.0152	−0.0034	0

In der Columne »Compensirung« bezeichnet R ein Rostpendel, Q ein Quecksilberpendel, B ein solches mit Luftdruckcompensation, Ri ein Riefler'sches Pendel. Die mit L bezeichneten Uhren sind unter luftdichtem Verschluss aufgestellt; die Uhr 26 befindet sich in constanter Temperatur, während der luftdichte Verschluss gänzlich misslungen ist.

Die Originale der hier zeitlich geordneten Untersuchungen finden sich an folgenden Stellen:

1) Bessel, A. N. 169.

2) Robinson, Mem. of the R. Astr. Soc. Vol. V, pag. 129.

3) Baily, Mem. of the R. Astr. Soc. Vol. V, pag. 133; diese Zahl wurde durch Beobachtung eines im luftverdünnten Raume frei schwingenden Quecksilberpendels erhalten.

4) W. Struve, Description de l'Observatoire.

5) Wagner, Bull. de l'Acad. de St. Pétersbourg, Tome VII.

6) Kaiser, A. N. 1502.

7) Kaiser, A. N. 1502; dieser Barometercoefficient ist bisher stets falsch citirt worden; man findet in den gleich noch zu erwähnenden Untersuchungen von Foerster, Oudemans und Tetens den Coefficienten 0.0153 für eine Uhr Hohwü Nr. 18 angegeben, während in der Originalabhandlung von Kaiser die betreffende Uhr wiederholt als Nr. 15 bezeichnet und für dieselbe die in Tafel VII aufgenommene vollständige Gangformel gegeben wird; die dort allerdings ebenfalls erwähnte Zahl 0.0153 war nur das Resultat einer vorläufigen Untersuchung und eine Uhr Hohwü

Nr. 18 ist, wie mir Herr van de Sande Bakhuyzen freundlichst mittheilte, nie in Leiden untersucht worden.

8) Kaiser, A. N. 1502.

9) Briefliche Mittheilung von Herrn van de Sande Bakhuyzen; der hier für die berühmte Uhr Hohwü Nr. 17 aufgeführte Barometercoefficient hat sich aus den Zeitbestimmungen bis zum Jahre 1882 mit einem hohen Grade von Sicherheit ergeben.

10) Carrington, Month. Not. 33, pag. 52.

11) Webster, Month. Not. 33, pag. 296.

12) Schumacher, A. N. 2166.

13) Forrster, A. N. 2182, 2183; die Abhängigkeit des Ganges vom Schwingungsbogen hat nach Herrn Becker's Untersuchung die Form $+0^s.0616\left(\frac{S}{2}-95'\right)+0^s.00405\left(\frac{S}{2}-95'\right)^2$.

14) Winnecke, A. N. 2282.

15) Winnecke, A. N. 2286.

16) Becker, A. N. 2290.

17) und 18) Oudemans, A. N. 2380.

19) Schultz, A. N. 2452.

20) Schumann, Sitzungsber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1888 Mai 14.

21) Zwink, Inaug.-Diss., Kiel 1888; ausser den vier in der Tabelle aufgeführten Coefficienten ergab sich noch das sehr erhebliche, von der Temperaturschichtung im Gehäuse abhängige Glied $+1^s.088$ (ob. — unt. Therm.).

22) Doberck, A. N. 2868; der von Herrn Anding für diese Uhr citirte Thermometercoefficient für Celsiusgrade ist aus der im Original für 1° Fahrenheit gegebenen Zahl $0^s.063$ fehlerhaft berechnet worden.

23) Hirsch, La Pendule Électrique de Précision, Neuchâtel 1891; diese Uhr hat elektrischen Antrieb.

24) Tetens, Inaug.-Diss., Kiel 1892.

25) Anding, A. N. 3182.

26) Tisserand, Comptes Rendus, 1896 März 16.

Man ersieht aus Tafel VII, dass nur bei wenigen Uhren der Barometercoefficient den für »Fraunhofer-Riefler« gefundenen Betrag $0^s.0152$ überschreitet. Nach Maassgabe des für diese Zahl gefundenen m. F. $\pm 0^s.0013$ ist es nicht ausgeschlossen, dass derselbe bei Discussion eines umfangreicheren Beobachtungsmateriales vielleicht bis auf $0^s.014$ herabgedrückt wird; auf

keinen Fall aber kann für die Leipziger Uhr der für das Münchener Pendel gefundene Werth 0ˢ·010 gelten, sodass also letztere Zahl keineswegs, wie Herr ANDING meint, auf alle Riefler'schen Pendel ohne Weiteres anwendbar ist. Abgesehen von der Form des Uhrgehäuses, die auf die Menge der mitschwingenden Luftmasse und hierdurch auf den Barometercoefficienten Einfluss hat, ist namentlich die durch Veränderung der Schwingungsweite eintretende Compensation der Luftdruckschwankungen zu beachten. Bei der Münchener Uhr nahm der Gang um 0ˢ·086 zu, wenn der halbe Schwingungsbogen um 1′ wuchs; da nun im Allgemeinen bei steigendem Luftdruck der Schwingungsbogen kleiner wird, so tritt hierdurch indirect auch eine Verkleinerung des Ganges, d. h. ein negativer Barometercoefficient ein. Durch dieses indirecte Glied wird daher auch bei der Münchener Uhr der Barometercoefficient verkleinert worden sein, während bei »Fraunhofer-Riefler« sich der Luftdruckeinfluss in seiner vollen Grösse zeigen musste, da der Gang unabhängig von der Schwingungsweite des Pendels ist.

In der letzten Columne der Tafel VI sind die Fehler angegeben, welche die definitive Gangformel in den beobachteten Gängen übrig lässt. Die Darstellung der Beobachtungen ist sehr gut, da während des ganzen Zeitraumes von 19 Monaten niemals ein Fehler von 0ˢ·1 erreicht wird. Auch im Frühjahr 1895, als die Zeitbestimmungen, wie oben erwähnt wurde, eine geringere Sicherheit besassen, zeigen die F kein aussergewöhnliches Verhalten, sodass die Annahme des gleichen Gewichtes für alle Beobachtungen vollkommen berechtigt erscheinen muss.

Eigenthümlich ist das regelmässige Hin- und Herschwanken der Werthe von F. Im März beider Jahre geht F aus dem Positiven in das Negative über, während im Juli jedesmal die Rückkehr zu positiven Werthen erfolgt. Es wäre nicht uninteressant, zu erfahren, ob auch in der Folge sich diese Erscheinung wiederholt hat. Vergleicht man die F mit den unmittelbar davor stehenden Schwingungsweiten S, so tritt die Unabhängigkeit des Ganges von der Amplitude nochmals sehr deutlich vor Augen. Ich will hier nicht unerwähnt lassen, dass nach Herrn BECKER's Untersuchungen (A. N. 2183) auch bei »Tiede Nr. 3« dieser Isochronismus der Pendelschwingungen eintrat, sobald der Schwingungsbogen 2°55′ betrug.

Die Summe der Fehlerquadrate ist 0.1422, während die

Elimination genau übereinstimmend 0.1423 ergab. Hieraus berechnet sich der m. F. in der Darstellung eines beobachteten Ganges zu ± 0ˢ048. Obwohl diese Grösse nur ein Maassstab für die nach Anbringung der empirischen Correctionen noch übrig bleibenden Unregelmässigkeiten des Uhrganges ist, also kein Urtheil über die Güte der Pendelcompensation erlaubt, so stelle ich doch zum Vergleich die für andere Uhren gefundenen analogen Grössen hier zusammen.

Tafel VIII.

Nr.	Uhr	Zahl der Constanten	Zeitraum	Zahl der Gänge	m. F. eines Ganges
8	Hohwü 17	3	949ᵈ	115	± 0ˢ070
12	Knoblich 1847	4	279	28	0.077
14	Hohwü 25	3	461	106	0.045
15	Knoblich 1963	2	230	35	0.066
16	Knoblich 1952	4	380	58	0.052
19	Hohwü 37	3	225	40	0.043
20	Dencker XII	4	1414	223	0.059
21	Tiede 400	6	1588	192	0.049
25	Riefler 1	4	366	111	0.104
27	Fraunhofer-Riefler	3	580	64	0.048
27a	Fraunhofer-Riefler	2	580	64	0.053

In der dritten Columne ist die Anzahl der in der Gangformel enthaltenen Constanten und in den beiden folgenden der Zeitraum angegeben, welcher durch die Formel dargestellt wird. Die letztgenannten Angaben wurden beigefügt, weil der m. F. eines Ganges im Allgemeinen um so grösser ausfallen wird, je kürzer das Intervall zwischen zwei Zeitbestimmungen ist. Namentlich für »Riefler Nr. 1« dürfte aus diesem Grunde der Fehler zu gross ausgefallen sein.

Ueber die Wirkung der Pendelcompensation erhält man ein Urtheil, wenn man neben obigen Grössen noch denjenigen m. F. eines Ganges berechnet, welcher verbleibt, wenn in der

Gangformel für das mechanisch compensirte Argument kein empirisches Glied eingeführt wird. Vernachlässigt man dementsprechend in der oben für »Fraunhofer-Riefler« gegebenen Formel das Temperaturglied, so bleibt der in der letzten Zeile von Tafel VIII aufgeführte m. F. ± 0ˢ.053 übrig. Der Gang dieser Uhr lässt sich somit schon durch eine zweigliedrige Formel, die nur ein constantes und ein vom Luftdruck abhängiges Glied enthält, so genau darstellen, dass er mit den Gängen der besten bisher bekannten Uhren auf eine Stufe zu stellen ist.

Potsdam, Astrophys. Observatorium. November 1897.

Sophus Lie, *Liniengeometrie und Berührungstransformationen.*

Es waren liniengeometrische Untersuchungen, die mich in den Jahren 1869—1872 zur Begründung der allgemeinen Theorie der Berührungstransformationen und der Transformationsgruppen veranlassten. Die hervorragende Wichtigkeit und der grosse Umfang dieser neuen Disciplinen zogen mich bald von der Geometrie weg, wenngleich viele von mir gestellten und nur unvollständig behandelten geometrischen Probleme mich fortwährend lebhaft interessirten. Einige unter diesen geometrischen Fragen habe ich im Laufe der Jahre wieder aufgenommen und theilweise jedenfalls vollständig erledigt; in dieser Weise entstanden u. a. meine zahlreichen Publicationen über Minimalflächen, Translationsflächen und Flächen constanter Krümmung, sowie meine Arbeiten über das ABEL'sche Theorem, die noch nicht vollständig in extenso vorliegen.

In dieser Abhandlung gedenke ich einige andere analytisch-geometrische Fragestellungen, die in meinen alten liniengeometrischen Arbeiten gestreift wurden, in Angriff zu nehmen und hoffentlich in definitiver Weise zu erledigen. Dabei finde ich es zweckmässig, gewisse Theorien, die ich früher in zu knapper Form entwickelt habe, ausführlicher darzustellen und zu begründen. In dieser Weise gewinne ich nicht allein eine feste Grundlage für die Entwickelungen dieser Abhandlung, sondern gleichzeitig auch einen zweckmässigen Ausgangspunkt für künftige Publicationen, die sich auf semilineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Systeme PFAFF'scher Gleichungen und Involutionssysteme höherer Ordnung beziehen werden.

§ 1.

Bestimmung aller (algebraischen) irreducibeln Liniencomplexe, deren Complexkegel zerfallen.

Es ist wohlbekannt, dass es algebraische Flächen giebt, die jede Tangentialebene nach einer zerfallenden Curve schneiden, obgleich die Cartesische Gleichung: $\Omega(x, y, z) = 0$ der betreffenden Fläche irreducibel ist; diese Eigenschaft geniessen ja nicht allein alle Regelflächen von dritter oder höherer Ordnung, sondern zugleich die STEINER'sche Fläche vierter Ordnung und dritter Classe. Diese längst bekannten Thatsachen führen naturgemäss zu der Frage nach *allen* irreducibeln algebraischen Flächen, die jede Tangentialebene nach einer zerfallenden Curve schneiden. Soweit mir bekannt, ist diese interessante Frage noch nicht erledigt worden; es liegt allerdings nahe zu vermuthen, dass die obengenannten Flächen die einzigen sind, welche die betreffende Eigenschaft besitzen.

In der Liniengeometrie kann man sich mehrere analoge Fragen vorlegen, und in der That ist es ein derartiges Problem, das ich in diesem ersten Paragraphen behandeln und erledigen werde. Um mich klar und scharf ausdrücken zu können, schicke ich einige einleitende Bemerkungen voraus.

Eine Gleichung von der Form:

$$\Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

die in den Differentialen dx, dy, dz homogen ist, bestimmt für meine Auffassung ∞^4 Linienelemente des Raumes, und zwar ordnet sie jedem Raumpunkte x, y, z einfach unendlich viele Linienelemente zu, die einen »*Elementarkegel*« bilden. Ist Φ linear in dx, dy, dz:

$$\Phi \equiv A dx + B dy + C dz,$$

so nennt man $\Phi = 0$ eine PFAFF'sche Gleichung, und dann bilden alle dem Punkte x, y, z zugeordneten Linienelemente ein ebenes Strahlenbüschel (oder mehrere ebene Strahlenbüschel); in diesem Falle sind also die Elementarkegel lauter Ebenen.

Ist Φ dagegen vom zweiten Grade, und besitzt somit die MONGE'sche Gleichung $\Phi = 0$ die Form:

$$0 = A dx^2 + B dy^2 + C dz^2 + 2D dy dz + 2E dz dx + 2F dx dy,$$

so sind die Elementarkegel im Allgemeinen Kegel zweiten Grades. Verschwindet aber für einen Punkt x, y, z die Determinante:

$$\begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{vmatrix},$$

so zerfällt der diesem Punkte zugeordnete Elementarkegel zweiten Grades in Ebenen. Verschwindet die obenstehende Determinante identisch, d. h. für jedes Werthsystem x, y, z, so zerfallen *alle* Elementarkegel in Ebenen. In diesem letzen Falle reducirt sich die vorgelegte Monge'sche Gleichung auf eine Pfaff'sche Gleichung:

$$L dx + M dy + N dz = 0,$$

deren Coefficienten L, M, N allerdings im Allgemeinen keine eindeutigen Functionen von x, y, z sein werden.

Im Folgenden setzen wir zunächst voraus, dass Φ eine *algebraische* Function der Grössen x, y, z, dx, dy, dz darstellt und können dementsprechend annehmen, dass die linke Seite der Monge'schen Gleichung: $\Phi = 0$ die Form einer ganzen Function ihrer Argumente besitzt. In Uebereinstimmung mit dem gewöhnlichen Sprachgebrauche sagen wir dann, dass die algebraische Monge'sche Gleichung: $\Phi = 0$ *irreducibel* ist, wenn die ganze und in den Differentialen homogene Function Φ sich nicht in Factoren: $\Phi_1, \Phi_2 \ldots$ zerlegen lässt, die selbst ganze und homogene Functionen von $x, y, z\ dx, dy, dz$ darstellen.

Liegt eine reducible algebraische Gleichung: $\Phi = 0$ vor, und zerlegt sich dementsprechend Φ in Factoren: $\Phi_1, \Phi_2 \ldots$, die selbst als ganze Functionen der unabhängigen Veränderlichen auftreten, so zerfällt die Schaar aller ∞^4 Linienelemente, die $\Phi = 0$ befriedigen, in mehrere getrennte Schaaren, unter denen eine durch die Gleichung: $\Phi_1 = 0$ definirt wird, eine andere durch $\Phi_2 = 0$, u. s. w.

Liegt eine solche reducible, algebraische Gleichung:

$$\Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

vor, so leuchtet unmittelbar ein, dass diese Gleichung auch dann reducibel bleibt, wenn die Grössen x, y, z als constante, die Differentiale dx, dy, dz dagegen als veränderliche Grössen betrachtet werden. Die durch einen Punkt x, y, z allgemeiner Lage gehenden Linienelemente einer reduciblen algebraischen Monge'schen Gleichung: $\Phi = 0$ bilden daher immer einen zerfallenden algebraischen Kegel.

Es ist aber wohl zu beachten, dass man aus dem Umstande, dass die Elementarkegel allgemeiner Lage einer algebraischen MONGE'schen Gleichung zerfallen, keineswegs schliessen darf, dass diese Gleichung selbst reducibel ist. Es ist eben sehr gut möglich, dass eine irreducible Gleichung:

$$\Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

reducibel wird, wenn die Grössen x, y, z beliebige constante Werthe x_0, y_0, z_0 erhalten, und dementsprechend in der Gleichung:

$$\Phi(x_0, y_0, z_0, dx, dy, dz) = 0$$

nur die Differentiale dx, dy, dz als veränderlich betrachtet werden. In dieser Lage befindet sich z. B. die irreducible MONGE'sche Gleichung:

$$(y\,dz - z\,dy)^2 + (z\,dx - x\,dz)^2 + (x\,dy - y\,dx)^2 = 0,$$

deren Elementarkegel jedesmal in zwei Ebenen zerfallen, die den imaginären Kegel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ berühren.

Wenn die Elementarkegel allgemeiner Lage einer irreduciblen MONGE'schen Gleichung: $\Phi = 0$ in mehrere Kegel zerfallen, so haben die entstehenden *Theilkegel* immer *dieselbe Ordnung*. Um dies allgemein zu beweisen, genügt es, ein einzelnes Beispiel zu erledigen. Das hierbei angewandte Beweisverfahren führt immer zum Ziele.

Wir wollen annehmen, dass eine algebraische MONGE'sche Gleichung: $\Phi = 0$ vorliegt, die in den Differentialen dx, dy, dz vom Grade sieben ist, und dass wir von vornherein wissen, dass ihre Elementarkegel allgemeiner Lage in zwei Kegel zweiten Grades und drei Kegel ersten Grades zerfallen. Wir behaupten, dass sich dann beweisen lässt, dass die Gleichung: $\Phi = 0$ reducibel ist.

Die Theilkegel zweiten Grades unserer MONGE'schen Gleichung werden durch eine Gleichung:

$$0 = A\,dx^2 + B\,dy^2 + C\,dz^2 + 2D\,dy\,dz + 2E\,dz\,dx + 2F\,dx\,dy$$

dargestellt, deren Coefficienten allerdings keine eindeutigen Functionen von x, y, z sind. Setzen wir einen unter diesen Coefficienten, zum Beispiel F gleich 1, was immer gestattet ist, so werden die übrigen Coefficienten *zweideutige* algebraische Functionen von x, y, z. Sind dabei A_1 und A_2 die beiden irratio-

nalen Functionenwerthe von A, ferner B_1 und B_2 die beiden irrationalen Functionenwerthe von B, u. s. w., so drückt sich B_1, wenn A_1 und A_2 nicht zu zufälligerweise dieselbe Form haben, rational durch A_1, x, y, z aus. Hieraus folgt aber in bekannter Weise, dass das Product:

$$(A_1 dx^2 + B_1 dy^2 + \cdots)\ (A_2 dx^2 + B_2 dy^2 + \cdots + 2\, dx dy)$$

sich als eine *rationale* Function von x, y, z, dx, dy, dz darstellen lässt, die in den Differentialen homogen und vom *vierten* Grade ist. Im vorliegenden Falle zerlegt sich somit die ganze Function $\Phi(x, y, z, dx, dy, dz)$ in zwei ganze rationale Factoren Φ_1 und Φ_2, unter denen Φ_1 vom Grade vier, Φ_2 vom Grade drei in den Differentialen sein müssen. Diese Betrachtungen, die sich ohne weiteres verallgemeineren lassen, liefern uns den

Satz 1. *Zerfallen die Elementarkegel allgemeiner Lage einer irreducibeln algebraischen Monge'schen Gleichung in mehrere Kegel, so haben diese Theilkegel dieselbe Ordnung.*

Dieser Satz bleibt offenbar auch dann gültig, wenn die betreffende MONGE'sche Gleichung die Form:

$$\Phi(x_1\ x_2 \ldots . x_n\ dx_1 \ldots dx_n) = 0$$

besitzt.

Setzen wir insbesondere voraus, dass unsere algebraische Function Φ der Grössen x, y, z, dx, dy, dz sich überdies als eine Function und zwar als eine ganze und homogene Function der Veränderlichen: dx, dy, dz, $zdy - ydz$, $xdz - zdx$, $ydx - xdy$:

$$\Phi \equiv H(dx, dy, dz, zdy - ydz, xdz - zdx, ydx - xdy),$$

darstellen lässt, so besitzt die MONGE'sche Gleichung: $\Phi = 0$ dreifach unendlich viele geradlinige Integralcurven, die einen PLÜCKER'schen Liniencomplex bestimmen. Und es ist bekannt, dass die Gleichung: $H = 0$ unter den gemachten Voraussetzungen als die allgemeine analytische Darstellung eines algebraischen Liniencomplexes aufgefasst werden kann.

Wir wollen zunächst beweisen, dass, wenn die MONGE'sche Gleichung: $\Phi = 0$ eines algebraischen Liniencomplexes C reducibel ist, und dementsprechend die ganze Function $\Phi(x, y, z, dx, dy, dz)$ in die irreduciblen Factoren: Φ_1, Φ_2 . . . zerfällt,

dass dann eine jede unter den Gleichungen: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0, \ldots$ einen algebraischen Liniencomplex definirt, der in dem Complexe C enthalten ist.

Jede Integralcurve der Gleichung: $\Phi_1 = 0$ befriedigt selbstverständlich auch $\Phi = 0$, und also gehören alle Tangenten dieser Curve dem Complexe C an. Es müssen andererseits *alle* Linienelemente einer solchen Tangente die Gleichung: $\Phi_1 = 0$ befriedigen, die doch nicht weniger als ∞^4 Linienelemente bestimmen darf. Also ist $\Phi_1 = 0$ die MONGE'sche Gleichung eines algebraischen Liniencomplexes, der eo ipso in dem vorgelegten Complexe C enthalten ist.

Hiermit ist die Richtigkeit unserer Behauptung erwiesen, und es gilt daher der

Satz 2. *Ist die Monge'sche Gleichung*:

$$\Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

eines algebraischen Liniencomplexes reducibel, so zerfällt der Complex selbst in mehrere algebraische Liniencomplexe[1]).

Beachten wir andererseits, dass ein algebraischer Liniencomplex, dessen Gleichung in den PLÜCKER'schen Liniencoordinaten r, s, ϱ, σ die Form

$$\Omega(r, s, \varrho, \sigma) = 0$$

besitzt, dann und nur dann in mehrere Complexe zerfällt, wenn die Gleichung: $\Omega = 0$ reducibel ist, so erhalten wir den

Satz 3. *Die Plücker'sche Gleichung*

$$\Omega(r, s, \varrho, \sigma) = 0$$

eines algebraischen Liniencomplexes ist dann und nur dann reducibel, wenn die Monge'sche Gleichung $\Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$ *des Complexes reducibel ist*[2]).

---

1) Die Entwickelungen des Textes können nach vielen Richtungen verallgemeinert werden. So bleibt zum Beispiel der Satz 2 des Textes noch gültig, wenn wir MONGE'sche Gleichungen in n Veränderlichen

$$\Phi(x_1 \ldots x_n\, dx_1 \ldots dx_n) = 0$$

betrachten, die ∞^{2n-3} algebraische Integralcurven besitzen, die keine andere MONGE'sche Gleichung als $\Phi = 0$ befriedigen.

2) Der Satz 3 des Textes darf nicht mit dem liniengeometrischen Satze verwechselt werden, den KLEIN im Jahre 1871 in den Göttinger Nachrichten veröffentlichte. Der schöne Satz von KLEIN sagt, dass jeder algebraische Liniencomplex durch eine einzige homogene Gleichung in den sechs GRASSMANN-CAYLEY'schen Liniencoordinaten dargestellt werden kann.

Eine dualistische Transformation des Raumes verwandelt Punkt in Ebene, Ebene in Punkt, Gerade in Gerade und Liniencomplex in Liniencomplex. Diejenigen Geraden eines Complexes, die durch einen Punkt gehen, werden dabei in solche Geraden des transformirten Liniencomplexes übergeführt, die in einer Ebene liegen. Wir drücken diese Thatsache kürzer aus, indem wir sagen, dass eine dualistische Transformation des Raumes die Complexkegel eines Liniencomplexes in die *ebenen Geradensysteme*[1]) des transformirten Complexes überführt.

Indem wir diese Betrachtungen mit den vorhergehenden Entwickelungen und insbesondere mit dem Satze 1 verbinden, erhalten wir den

Satz 4. *Zerfallen die ebenen Geradensysteme eines irreduciblen algebraischen Liniencomplexes:* $\Omega(r, s, \varrho, \sigma) = 0$ *in mehrere irreducible Geradensysteme* $G_1, G_2, \ldots$, *so haben die Systeme* $G_1, G_2 \ldots$ *dieselbe Classe.*

Es ist nicht schwer, irreducible algebraische Liniencomplexe anzugeben, deren Complexkegel oder ebene Geradensysteme in mehrere Theile zerfallen. Die Tangenten einer irreduciblen developpablen Fläche bilden ja einen irreduciblen algebraischen Liniencomplex, dessen Kegel in m Ebenen zerfallen, dabei vorausgesetzt, dass m die Classe der betreffenden developpablen Fläche bezeichnet. Es bilden andererseits die Treffgeraden einer irreduciblen algebraischen Raumcurve einen irreduciblen Liniencomplex, dessen ebene Geradensysteme in Strahlenbüschel zerfallen, deren Anzahl gleich ist der Ordnung der betreffenden algebraischen Curve.

Jetzt stellen wir das Problem:

Alle irreduciblen algebraischen Liniencomplexe: $\Omega(r, s, \varrho, \sigma) = 0$ *zu finden, deren Complexkegel allgemeiner Lage in mehrere Kegel zerfallen.*

Nach den vorhergehenden Entwickelungen kann dieses Problem auch die folgende Gestalt erhalten:

Es sollen alle algebraischen und homogenen Gleichungen von der Form:

---

1) Wenn wir im Texte nicht über die »*ebenen Complexcurven*« sondern über die »*ebenen Geradensysteme*« eines Liniencomplexes reden, so liegt das selbstverständlich daran, dass die in einer Ebene gelegenen Geraden eines Liniencomplexes unter Umständen keine Curve umhüllen, sondern ein oder mehrere Strahlenbüschel bilden.

$$H(dx, dy, dz, ydz - zdy, zdx - xdz, xdy - ydx) = 0$$

gefunden werden, die zwar in den Veränderlichen: x, y, z, dx, dy, dz irreducibel sind, doch aber reducibel werden, sobald die Grössen x, y, z allgemeine constante Werthe erhalten.

Berücksichtigen wir die früheren Bemerkungen über dualistische Transformationen eines algebraischen Liniencomplexes, so sehen wir, dass unser Problem mit dem folgenden Problem, wenn auch nicht identisch, doch jedenfalls äquivalent ist:

Alle irreduciblen algebraischen Liniencomplexe:

$$\Omega(r, s, \varrho, \sigma) = 0$$

zu finden, deren ebene Geradensysteme allgemeiner Lage in mehrere Systeme zerfallen.

Durch Betrachtungen, die ich jetzt auseinandersetzen werde, bin ich zu dem wichtigen, wenn auch nicht grade unerwarteten Resultate gekommen, dass jeder irreducible algebraische Liniencomplex, dessen Complexkegel allgemeiner Lage zerfallen, aus den Tangenten einer developpablen Fläche besteht, dass ferner jeder irreducible algebraische Liniencomplex, dessen ebene Geradensysteme allgemeiner Lage zerfallen, nur die Treffgeraden einer Raumcurve umfasst.

Wir versuchen zunächst alle irreduciblen algebraischen Liniencomplexe zu bestimmen, deren Complexkegel allgemeiner Lage in lauter *Ebenen* zerfallen. Besitzt ein Liniencomplex m^{ten} Grades diese Eigenschaft, so zerfällt jeder Complexkegel in m Ebenen, die durch die Gleichung:

$$uX + vY + wZ + 1 = 0$$

mit den laufenden Coordinaten X, Y, Z dargestellt sein mögen. Sind x, y, z die Scheitelcoordinaten des betreffenden Complexkegels, so drücken sich die Bestimmungsstücke u, v, w der dem Punkte x, y, z zugeordneten Ebenen als algebraische und m-deutige Functionen von x, y, z aus:

$$(1) \quad u = U(x, y, z), \quad v = V(x, y, z), \quad w = W(x, y, z).$$

Hier sind nun von vornherein drei Fälle denkbar, jenachdem die Grössen u, v, w durch *keine* Gleichung, oder durch *eine* Gleichung, oder sogar durch *zwei* Gleichungen verbunden sind, die x, y, z nicht enthalten. Es ist aber leicht zu sehen, dass

die Annahme, dass u, v, w eine und nur eine Gleichung erfüllen, die von x, y, z frei ist, zu Widerspruch führt und also unmöglich ist. Wäre nämlich u, v, w durch eine einzige Gleichung: $w = \vartheta(u, v)$ gebunden, so enthielte eine jede unter den ∞^2 Ebenen:

$$uX + vY + \vartheta(u,v)\, Z + 1 = 0 \tag{2}$$

einfach unendlich viele Strahlenbüschel des Complexes, und es wäre dementsprechend jede Gerade einer solchen Ebene eine Complexlinie. Und da durch jeden Punkt des Raumes einfach unendlich viele Ebenen gehen, die der Schaar (2) angehören, so müsste jede Gerade des Raumes eine Complexlinie sein. Die Annahme, dass u, v, w durch eine einzige Gleichung verbunden sind, führt also wirklich zu Widerspruch.

Dagegen ist es sehr wohl denkbar, dass die Ebenencoordinaten u, v, w zwei und nur zwei Relationen erfüllen, die von x, y, z frei sind. Alsdann vertheilen sich alle ∞^3 Complexlinien in ∞^1 Schaaren, deren jede alle Geraden einer Ebene umfasst, und der Complex besteht dementsprechend aus allen Tangenten einer algebraischen developpablen Fläche. Wie wir wiederholt bemerkt haben, zerfallen die Complexkegel in diesem Falle wirklich in ebene Strahlenbüschel. Und der betreffende Liniencomplex ist offenbar irreducibel, wenn die besprochene developpable Fläche selbst irreducibel ist.

Es bleibt jetzt nur noch die Annahme übrig, dass sich aus den Gleichungen (1) keine von x, y, z freie Relation zwischen u, v, w herleiten lässt. Alsdann enthält jede Ebene des Raumes (mindestens) ein Strahlenbüschel, dessen Geraden dem vorliegenden Liniencomplexe angehören. Und da unser Complex irreducibel sein soll, so müssen (Satz 4) alle ebenen Geradensysteme des Complexes in lauter Strahlenbüschel zerfallen. Durch relativ einfache Betrachtungen ist es uns hiermit gelungen, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 5. *Zerfallen die Complexkegel allgemeiner Lage eines irreduciblen algebraischen Liniencomplexes in lauter Ebenen, so zerfallen auch die ebenen Geradensysteme des Complexes in lauter Strahlenbüschel, oder aber der Complex besteht aus allen Tangenten einer developpablen Fläche.*

Zerfällt der einem Punkte x, y, z allgemeiner Lage zugeordnete Complexkegel in m Ebenen, so schneiden sich diese

Ebenen (höchstens) nach $\frac{m(m-1)}{2}$ Geraden. Unter den Linienelementen, welche die MONGE'sche Gleichung: $\Phi = 0$ unseres Complexes befriedigen, giebt es daher in jedem Punkte allgemeiner Lage nicht mehr als $\frac{m(m-1)}{2}$, welche gleichzeitig zwei verschiedenen Strahlenbüscheln des Complexes gehören. Diese Linienelemente, die gewissermaassen als Doppelelemente der MONGE'schen Gleichung unseres Complexes auftreten, befriedigen eine zu $\Phi = 0$ hinzutretende Differentialgleichung:

$$M(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

die immer aufgestellt werden kann. Und da das simultane System:

$$\Phi = 0, \quad M = 0$$

nur zweifach unendlich viele Integralcurven besitzt, so enthält unser Liniencomplex jedenfalls nicht mehr als ∞^2 Gerade, welche die Differentialgleichung: $M = 0$ erfüllen.

Nehmen wir andererseits eine Ebene E_0 allgemeiner Lage, so bilden die Complexlinien dieser Ebene m Strahlenbüschel, deren Scheitel (höchstens) $\frac{m(m-1)}{2}$ verschiedene Verbindungslinien besitzen. Unter den Complexlinien dieser Ebene können wir somit immer eine herausgreifen, welche nur einem Strahlenbüschel der Ebene gehört, und welche überdies die Differentialgleichung: $M = 0$ nicht befriedigt. Ist g_0 eine Complexlinie, welche diese beiden Forderungen erfüllt, so wollen wir alle Strahlenbüschel des Complexes construiren, die g_0 enthalten. Wir behaupten, dass diese ∞^1 Strahlenbüschel ein Strahlensystem *erster* Ordnung erzeugen; dies folgt unmittelbar daraus, dass in E_0 und also auch in jeder anderen durch g_0 gehenden Ebene allgemeiner Lage *nur ein* Strahlenbüschel des Complexes gelegen ist, das g_0 enthält. (Wir können hinzufügen, obgleich dies für unsere Entwickelungen unwesentlich ist, dass unsere Betrachtungen und Constructionen einen dualistischen Charakter haben, und dass daher unser Strahlensystem nicht allein von erster Ordnung, sondern zugleich von erster Classe ist.)

Es ist leicht zu beweisen, dass nicht alle Geraden des construirten Strahlensystems die Differentialgleichung: $M = 0$ befriedigen können; aus dem Umstande, dass g_0 nicht diese Glei-

chung erfüllt, folgt ja unmittelbar, dass die zu g_0 benachbarten Geraden des Strahlensystems nicht $M = 0$ befriedigen.

Durch jeden Punkt p allgemeiner Lage geht eine einzige Gerade unseres Strahlensystems, und diese Gerade gehört nur *einem* Strahlenbüschel des Complexes an, dessen Scheitel in p gelegen ist. Also ist es uns gelungen, jedem Punkte des Raumes ein einziges Büschel von Linienelementen der Gleichung $\Phi = 0$ zuzuordnen, und der Inbegriff dieser Linienelemente wird durch eine PFAFF'sche Gleichung:

$$L dx + M dy + N dz = 0$$

mit *rationalen* Coefficienten definirt. Es ist daher die MONGE'sche Gleichung: $\Phi = 0$ des vorliegenden Liniencomplexes reducibel, und daraus geht hervor (Satz 2), dass der Complex ebenfalls reducibel ist.

Hiermit ist es uns, durch allerdings recht umständliche Betrachtungen, gelungen, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 6. *Zerfallen die Complexkegel allgemeiner Lage eines irreduciblen algebraischen Liniencomplexes in mehrere Strahlenbüschel, so besteht der Complex aus allen Tangenten einer irreduciblen algebraischen Developpablen.*

Und das Princip der Dualität giebt sogleich den äquivalenten

Satz 7. *Zerfallen die ebenen Geradensysteme eines irreduciblen algebraischen Liniencomplexes in lauter Strahlenbüschel, so besteht der Complex aus allen Treffgeraden einer irreduciblen algebraischen Curve.*

Die hiermit erhaltenen Resultate wollen wir jetzt Schritt für Schritt verallgemeinern. Zunächst richten wir unsere Aufmerksamkeit auf irreducible algebraische Liniencomplexe, deren Complexkegel allgemeiner Lage in m irreducible Kegel zweiten Grades $K_1, K_2, \ldots K_m$ zerfallen. Wählen wir eine Ebene allgemeiner Lage und in ihr einen beliebigen Punkt, so giebt es $2m$ Complexlinien, die in dieser Ebene liegen und durch den betreffenden Punkt hindurchgehen. Diese $2m$ Geraden ordnen sich in m Paaren: g_1, γ_1; g_2, γ_2; $\ldots$ g_m, γ_m, so zwar dass g_i und γ_i jedesmal demselben Kegel K_i gehören. Greifen wir nun unter den Complexlinien unserer Ebene eine bestimmte heraus, etwa die Gerade g_1^0, so gehen durch jeden Punkt dieser Geraden $2m - 1$ weitere Complexlinien, die ebenfalls in der gewählten

Ebene liegen. Diese $2m - 1$ Complexlinien nennen wir naturgemäss γ_1; $g_2, \gamma_2 \cdots g_m, \gamma_m$, und setzen dabei voraus, dass γ_1 und g_1^0 jedesmal auf einem Kegel K_1 gelegen sind. In dieser Weise erhalten wir einfach unendlich viele Complexlinien γ_1, die ein Geradensystem Γ_1 bilden; es erzeugen andererseits die $2m - 2$ Geraden $g_2, \gamma_2; \cdots g_m, \gamma_m$ ein Geradensystem, das G heissen möge. Das System *aller* Complexlinien, die in unserer Ebene liegen, zerfällt also in zwei getrennte Geradensysteme: Γ_1 und G, deren Classenzahlen wir jetzt bestimmen wollen. Die Summe dieser beiden Zahlen ist gleich $2m$, und die Classe des Systems G ist mindestens gleich $2m - 2$; also ist die Classe des Geradensystems Γ_1 entweder gleich 2 oder 1. Wäre die Classe des Systems Γ_1 gleich 1, so bestände unser irreducibler Liniencomplex nach den Sätzen 4 und 7 aus allen Treffgeraden einer Raumcurve. Dies steht aber in directem Widerspruche mit unserer Annahme, dass alle Complexkegel in irreducible Kegel zweiten Grades zerfallen. Also ist die Classe des Systems G gleich $2m - 2$. Und da g_0 offenbar dem Systeme Γ_1 gehören muss, und diese Gerade eine beliebige Complexlinie unserer Ebene darstellt, so erkennen wir, dass alle Complexlinien dieser Ebene m getrennte Schaaren bilden, deren jede aus den Tangenten eines irreduciblen Kegelschnittes besteht.

Es gilt also der

Satz 8. *Zerfallen die Complexkegel allgemeiner Lage eines irreduciblen algebraischen Liniencomplexes in m irreducible Kegel zweiten Grades, so zerfallen auch die ebenen Complexcurven, und zwar in m irreducible Kegelschnitte.*

In einer Ebene allgemeiner Lage greifen wir nun eine Complexlinie l heraus, die nicht zwei verschiedene in dieser Ebene gelegene Complexkegelschnitte berührt. Alsdann enthält jede durch l gehende Ebene allgemeiner Lage nur einen Complexkegelschnitt, der l berührt. Hiermit ist, das werden wir jetzt zeigen, jedem Punkte p des Raumes ein ganz bestimmter Complexkegel zweiten Grades zugeordnet. Legen wir in der That durch die Gerade l diejenige Ebene, die den Punkt p enthält, und construiren wir sodann den in dieser Ebene gelegenen Complexkegelschnitt, der l berührt, sowie die beiden Tangenten dieses Kegelschnittes, die durch p gehen, so giebt es einen und im Allgemeinen nur einen Complexkegel zweiten Grades, der diese beiden Tangenten enthält.

Die hiermit construirten Kegel zweiten Grades sind die Elementarkegel einer MONGE'schen Gleichung zweiten Grades mit *ganzen rationalen* Coefficienten:

$$A dx^2 + B dy^2 + C dz^2 + \cdots + 2F dx dy = 0 .$$

Also ist die MONGE'sche Gleichung: $\Phi = 0$ des ursprünglich vorgelegten Liniencomplexes reducibel, und das steht in directem Widerspruche mit unserer Annahme, dass der betreffende Complex irreducibel ist.

Wir können daher die beiden folgenden Sätze aufstellen:

Satz 9. *Es giebt keinen irreduciblen algebraischen Liniencomplex, dessen Complexkegel allgemeiner Lage in mehrere irreducible Kegel zweiten Grades zerfallen.*

Satz 10. *Es giebt keinen irreduciblen algebraischen Liniencomplex, dessen ebene Complexcurven allgemeiner Lage in mehrere irreducible Kegelschnitte zerfallen.*

Es ist nun leicht weiter zu gehen, und zwar werden wir zunächst beweisen, dass die Complexkegel eines irreduciblen algebraischen Liniencomplexes nie in irreducible Kegel *dritten* Grades zerfallen können.

Zerfällt in der That ein Complexkegel allgemeiner Lage in m irreducible Kegel dritten Grades $D_1, D_2, \ldots D_m$, so ordnen sich die $3m$ Complexlinien, die in einer beliebig gewählten Ebene liegen und durch einen bestimmten Punkt dieser Ebene hindurchgehen, in m Schaaren: $g_1, \mathfrak{g}_1, \gamma_1; g_2, \mathfrak{g}_2, \gamma_2; \cdots g_m, \mathfrak{g}_m, \gamma_m$, deren jede drei Complexlinien umfasst. Greifen wir sodann eine bestimmte Complexlinie dieser Ebene heraus, etwa die Gerade g_1^0, so können wir jedem Punkte dieser Gerade zwei ganz bestimmte Complexlinien zuordnen, nämlich die Geraden $\mathfrak{g}_1$ und γ_1, die alle beide in der gewählten Ebene liegen. Die hiermit construirten einfach unendlich vielen Complexlinien $\mathfrak{g}_1, \gamma_1$ umhüllen ein Geradensystem $\mathfrak{G}_1$. Ziehen wir andererseits durch jeden Punkt der Geraden g_1^0 die zugeordneten Geraden $g_2, \mathfrak{g}_2, \gamma_2; \cdots g_m, \mathfrak{g}_m, \gamma_m$, so erzeugen diese $3(m-1)$ Geraden ein Geradensystem G. Es ist dabei nicht schwierig, die Classenzahlen dieser beiden Geradensysteme zu bestimmen. Denn die Summe dieser Zahlen ist gleich $3m$, und die Classe des Systems G ist offenbar mindestens gleich $3m - 3$, während die Classe des Systems $\mathfrak{G}_1$ mindestens gleich 2 und höchstens gleich 3 sein muss.

Wäre nun die Classe des Systems Γ_1 kleiner als drei, so zerfielen die ebenen Geradensysteme unseres irreduciblen Liniencomplexes nach den vorhergehenden Entwickelungen entweder in $3m$ Strahlenbüschel oder aber in $\frac{3m}{2}$ irreducible Geradensysteme zweiter Classe. Die letzte Möglichkeit wird aber nach dem Satze 10 dadurch ausgeschlossen, dass unser Complex irreducibel ist. Und die erste Hypothese, die nach dem Satze 7 nach sich ziehen würde, dass alle Compexlinien Treffgeraden einer Raumcurve wären, scheitert daran, dass es keine irreducible Curve giebt, deren Secanten einen Liniencomplex bilden, dessen Complexkegel in mehrere irreducible Kegel dritten Grades zerfallen.

Die Classe des Geradensystems $\mathfrak{G}_1$ muss daher gleich 3 sein, und in Folge dessen zerfallen die ebenen Geradensysteme unseres irreduciblen Liniencomplexes in lauter Systeme dritter Classe.

Satz 11. *Zerfallen die Complexkegel allgemeiner Lage eines irreduciblen algebraischen Liniencomplexes in irreducible Kegel dritten Grades, so zerfallen auch die ebenen Complexcuvren und zwar in irreducible Curven dritter Classe.*

Nehmen wir nun eine Complexlinie l allgemeiner Lage, so enthält jede durch l gehende Ebene allgemeiner Lage nur eine Complexcurve dritter Classe, die l berührt. Wir können daher jedem Punkte des Raumes einen ganz bestimmten Kegel dritten Grades zuordnen, dessen Gerade Complexlinien sind. Wir legen zu diesem Zwecke eine Ebene durch l und den betreffenden Punkt p, construiren sodann die in dieser Ebene gelegene Complexcurve dritter Classe, die l berührt und ziehen endlich die drei durch p gehenden Geraden, welche die Curve dritter Classe berühren. Diese drei durch p gehenden Complexlinien gehören einem ganz bestimmten Kegel dritter Ordnung an, der von Complexlinien erzeugt ist.

Die hiermit construirten Kegel dritter Ordnung sind die Elementarkegel einer MONGE'schen Gleichung mit rationalen Coefficienten, die in den Differentialen dx, dy, dz von dritter Ordnung ist. Es ist also die MONGE'sche Gleichung des Liniencomplexes $3\,m^{\text{ten}}$ Grades reducibel und dementsprechend muss auch der Complex in mehrere Liniencomplexe zerfallen.

Indem wir auf das hiermit gefundene Resultat das Princip der Dualität anwenden, können wir unsere Ergebnisse in dem folgenden Satze zusammenfassen:

Satz 12. *Es gibt keinen irreduciblen algebraischen Liniencomplex, dessen Complexkegel allgemeiner Lage in irreducible Kegel dritten Grades zerfallen.*

Es ist andererseits auch nicht möglich, dass die ebenen Complexcurven eines irreduciblen algebraischen Liniencomplexes in mehrere irreducible Curven dritter Classe zerfallen.

In genau derselben Weise erkennen wir, dass die Complexkegel eines irreduciblen Liniencomplexes nicht in irreducible Kegel vierter Ordnung zerfallen können, sowie dass die ebenen Complexcurven eines derartigen Complexes nicht in irreducible Curven vierter Classe zerfallen können, u. s. w.

Kurz, wir erhalten das allgemeine Theorem:

Theorem I. *Zerfallen die Complexkegel allgemeiner Lage eines irreduciblen algebraischen Liniencomplexes in mehrere Kegel, so besteht der Complex aus allen Tangenten einer irreduciblen algebraischen Developpablen.*

Zerfallen die ebenen Geradensysteme allgemeiner Lage eines irreduciblen algebraischen Liniencomplexes in mehrere Systeme, so besteht der Complex aus allen Treffgeraden einer irreduciblen algebraischen Raumcurve.

Die vorhergehenden Entwickelungen können in einer Weise verallgemeinert werden, die jedenfalls im ersten Augenblicke überraschend erscheint.

Wir können nämlich beweisen, dass die Complexkegel eines *transcendenten*, durch eine analytische Gleichung definirten Liniencomplexes nie algebraisch sind und auch nicht in unendlich viele algebraische Kegel zerfallen.

Zerfielen die Complexkegel eines transcendenten Liniencomplexes in algebraische Kegel, die nicht sämmtlich dieselbe Ordnung hätten, so könnte man immer unter diesen Kegeln dreifach unendlich viele herausgreifen, deren Ordnung gleich einer bestimmten Zahl n wäre und könnte sodann die MONGE'sche Gleichung: $\Phi = 0$ dieser Kegel bilden. Sodann liesse sich durch solche Betrachtungen, die wir auf Seite 692 Zeile 3 von oben angestellt haben, beweisen, dass die Gleichung: $\Phi = 0$ dreifach unendlich viele geradlinige Integralcurven besitzt, die somit einen Liniencomplex bilden.

Wir brauchen also nur noch nachzuweisen, dass jeder durch eine analytische Gleichung definirter Liniencomplex, dessen

Complexkegel in lauter algebraische Kegel von *derselben* Ordnung n zerfallen, nothwendigerweise algebraisch ist.

Es sei ein derartiger Liniencomplex vorgelegt. Wir greifen eine Gerade g allgemeiner Lage des Complexes heraus und construiren alle Complexkegel, die g enthalten. Die Complexlinien dieser ∞^1 Kegel n^{ter} Ordnung bilden ein Strahlensystem S, und wir behaupten, dass dieses Strahlensystem immer *algebraisch* ist.

Wir entwickeln die PLÜCKER'sche Gleichung unseres Liniencomplexes nach dem TAYLOR'schen Theorem und wählen dabei die Gerade g als Ausgangsstelle. Nehmen wir sodann die ν ersten Glieder dieser Reihenentwickelung und setzen ihre Summe gleich Null, so definirt die hervorgehende Gleichung, wie gross oder klein auch die ganze Zahl ν sein mag, immer einen algebraischen Liniencomplex L_ν. Und zwar können wir die Zahl ν so gross wählen, dass die ∞^1 Kegel von der Ordnung n, die g enthalten, sämmtlich mit dem entsprechenden Kegel des algebraischen Complexes L_ν längs g eine Berührung beliebig hoher Ordnung haben. Und da ein Kegel n^{ter} Ordnung durch eine begrenzte Anzahl gerader Erzeugender bestimmt ist, kann die Zahl ν immer so gross gewählt werden, dass die betreffenden ∞^1 Kegel des transcendenten Complexes durch L_ν vollständig bestimmt sind. Der erste Complex L_ν, der diese Bedingungen erfüllt, hängt nur von Constanten ab, deren Anzahl von vornherein als Function von n festgestellt werden kann. In Folge dessen erzeugen die besprochenen ∞^1 Kegel n^{ter} Ordnung des transcendenten Liniencomplexes wirklich, wie früher behauptet, ein *algebraisches* Strahlensystem S.

Es gilt also der

Satz 13. *Zerfallen die Compexkegel allgemeiner Lage eines transcendenten Liniencomplexes in algebraische Kegel, so zerfällt auch das Strahlensystem aller Complexlinien, die eine feste Complexlinie schneiden, in mehrere Strahlensysteme, unter denen sich jedenfalls ein algebraisches Strahlensystem findet.*

Wir können nun in ganz analoger Weise weiter gehen. Ist g fortwährend eine Gerade allgemeiner Lage des vorgelegten transcendenten Liniencomplexes, und bezeichnet g' eine benachbarte Gerade des Complexes, so können wir die Zahl ν immer so gross wählen, dass der algebraische Liniencomplex L_ν nicht allein das algebraische Strahlensystem S der Complex-

linie g, sondern zugleich das benachbarte algebraische Strahlensystem S' der benachbarten Complexlinie g' umfasst.

Nehmen wir nun einen Punkt P allgemeiner Lage und construiren den zugehörigen Complexkegel des vorgelegten transcendenten Liniencomplexes und ebenfalls den Complexkegel k_ν des algebraischen Complexes L_ν, so dürfen wir behaupten[1]), dass diese beiden Kegel zwei unendlich benachbarte Complexlinien gemein haben, und dass sie sich in Folge dessen längs einer Complexlinie berühren. Bezeichnen wir die Ordnung des Strahlensystems S mit o, so giebt es höchstens o verschiedene Theilkegel des trancendenten Liniencomplexes, die den Kegel k_ν nach Geraden des Strahlensystems S berühren.

Lassen wir nun die ganze Zahl ν nach und nach immer grösser werden, so können wir offenbar erreichen, dass die Kegel k_ν die Theilkegel n^{ter} Ordnung des transcendenten Liniencomplexes osculiren oder gar mit ihnen eine Berührung von beliebig hoher Ordnung haben, und dabei findet diese Berührung immer längs Geraden des Strahlensystems S statt.

Nun aber ist n eine bestimmte endliche Zahl, und es gehen andererseits durch jeden Punkt P des Raumes o ganz bestimmte Gerade des Strahlensystems S. Also ist es immer möglich, die Zahl ν so gross zu wählen, dass die in Betracht kommenden algebraischen Theilkegel des transcendenten Liniencomplexes durch die algebraische Gleichung des Complexes L_ν vollständig bestimmt sind. Und da diese Gleichung nur eine begrenzte Anzahl Constante enthält, so erkennen wir, dass die MONGE'sche Gleichung, die alle in Betracht kommenden Theilkegel des transcendenten Complexes definirt, algebraisch ist. Diese algebraische MONGE'sche Gleichung hat (vgl. die Ausführungen auf Seite 692) dreifach unendlich viele geradlinige Integralcurven, die einen algebraischen Liniencomplex bestimmen. Und dieser algebraische Complex ist in dem ursprünglich vorgelegten Complex enthalten, der somit in algebraische Complexe zerfällt.

Es gilt also das folgende Theorem, das die vorhergehenden Untersuchungen vervollständigt:

Theorem 2. *Liegt eine transcendente analytische Gleichung*

---

1) Die Entwickelungen des Textes bleiben nicht mehr gültig, wenn die Ordnung des Strahlensystemes S gleich *Null* ist. Von diesem trivialen Ausnahmefalle sehen wir *vorläufig* ab.

$$\Omega(r, s, \varrho, \sigma) = 0$$

in den Plücker'schen Liniencoordinaten vor, so sind die Kegel des entsprechenden Liniencomplexes nie algebraisch; sie zerfallen auch niemals in unendlich viele algebraische Kegel, es sei denn, dass der betreffende Complex aus allen Tangenten einer transcendenten developpablen Fläche besteht.

Es liegt an der Hand, dass diese Untersuchungen ohne Schwierigkeit weiter geführt werden können. Immerhin stellen sich hier auch Fragen, deren Behandlung neue Hülfsmittel verlangt. So z. B. ist es mir nicht gelungen zu entscheiden, ob die Complexkegel allgemeiner Lage eines transcendenten analytischen Liniencomplexes in transcendente Kegel zerfallen können, zwischen denen im zweidimensionalen Gebiete aller Geraden durch den gemeinsamen Scheitel kein analytischer Zusammenhang besteht.

§ 2.

Polare Beziehungen zwischen Monge'schen bez. Pfaff'schen Gleichungen.

Eine Punkttransformation des Raumes

$$(1) \quad x_1 = A(x, y, z), \quad y_1 = B(x, y, z), \quad z_1 = C(x, y, z)$$

führt Linienelement in Linienelement über; gleichzeitig geht jede Schaar von ∞^q Linienelementen in eine ebensolche Schaar über. Da nun eine MONGE'sche Gleichung:

$$(2) \qquad f(x, y, z, dx : dy : dz) = 0$$

als analytische Definition von ∞^3 Linienelementen aufgefasst werden kann, so ist es von vornherein klar, dass eine Punkttransformation (1) jede MONGE'sche Gleichung (2) in eine MONGE'sche Gleichung

$$f_1(x_1, y_1, z_1;\ dx_1 : dy_1 : dz_1) = 0$$

überführt. Mit derartigen Transformationen haben sich schon längst, nach dem Vorgange von GAUSS und RIEMANN, viele Mathematiker eingehend beschäftigt.

Die Theorie dieser Transformationen beruht in erster Linie auf der wohlbekannten und evidenten Thatsache, dass jede

Punkttransformation im Infinitesimalen projectiv ist. Hieraus folgt ja unmittelbar, dass die CAYLEY'sche Invariantentheorie für diese höhere Invariantentheorie verwerthet werden kann.

Hier begnügen wir uns mit der naheliegenden Bemerkung, dass eine MONGE'sche Gleichung, deren Elementarkegel algebraische Kegel n^{ter} Ordnung sind, von jeder Punkttransformation in eine MONGE'sche Gleichung übergeführt wird, deren Elementarkegel ebenfalls algebraisch und von der Ordnung n sind.

Insbesondere ist klar, dass eine Punkttransformation (1) jede PFAFF'sche Gleichung

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0$$

in eine PFAFF'sche Gleichung umwandelt.

In meinen geometrischen Arbeiten aus den Jahren 1870 und 1871 lenkte ich die Aufmerksamkeit auf eine mehr umfassende Kategorie von Transformationen, die ebenfalls alle Linienelemente einer MONGE'schen Gleichung in die Linienelemente einer MONGE-schen Gleichung und gleichzeitig alle Integralcurven der ersten MONGE'schen Gleichung in Integralcurven der neuen Gleichung überführen. Diese Transformationen wurden in jedem einzelnen Falle durch zwei Gleichungen:

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

vermittelt, die zwei Systeme von Punktcoordinaten enthielten. Es ergab sich, dass *eine Monge'sche Gleichung gegenüber derartigen Transformationen eine und nur eine individuelle Eigenschaft besitzt.*

Durch derartige Transformationen gelang es mir, jede nichtlineare MONGE'sche Gleichung in eine nicht-integrable PFAFF'sche Gleichung überzuführen; und ich gab sogar eine allgemeine Methode zur Auffindung aller Transformationen, die eine vorgelegte MONGE'sche Gleichung in eine PFAFF'sche Gleichung umwandeln. Ich stellte ferner die Frage nach allen derartigen Transformationen, die eine PFAFF'sche Gleichung in eine PFAFF-sche Gleichung überführen. Ich gab die Antwort auf diese unter vielen Gesichtspunkten wichtige Frage, behielt mir aber vor, den ausführlichen Beweis bei einer späteren Gelegenheit zu veröffentlichen. *In diesem Kapitel werde ich u. a. diesen längst angekün-*

digten Beweis liefern. Und zwar werde ich die Ueberlegungen in solcher Weise führen, dass sich die Ausdehnung dieser Transformationstheorie auf *Systeme Pfaff'scher Gleichungen* von selbst darbietet.

Es ist überhaupt meine Absicht, in späteren Arbeiten diese meine alten Untersuchungen wieder aufzunehmen und neue Theorien zu schaffen, die sich auf Berührungstransformationen, auf Systeme Pfaff'scher Gleichungen, auf semilineare partielle Differentialgleichungen 1. O. und auf Involutionssysteme höherer Ordnung beziehen. Flüchtige Andeutungen in diesen Richtungen finden sich schon an verschiedenen Stellen in meinen früheren Arbeiten. Ganz besonders möchte ich auf eine Note in den Math. Annalen, Bd. XI, p. 547 hinweisen, die von meinen Nachfolgern nicht hinlänglich berücksichtigt worden ist. In dieser Note gab ich einen fundamentalen Satz, der sich auf ganz beliebige Gleichungssysteme von der Form:

$$\Omega_k(x_1 \dots x_n X_1 \dots X_n) = 0 \quad (k = 1 \dots q)$$

bezieht. Es wurde dabei keineswegs vorausgesetzt, dass dieses Gleichungssystem wirklich alle n Grössen X_i enthält. In meiner nächsten Arbeit werde ich auf die hiermit definirte Beziehung zwischen Räumen, die verschiedene Dimensionenzahlen haben, ausführlicher eingehen. In dieser Weise ergeben sich merkwürdige Zusammenhänge zwischen ganz verschiedenen Gebieten, deren Theorie hierdurch gefördert werden soll.

Wir denken uns, dass zwei Gleichungen von der Form

$$(1) \qquad \varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

vorgelegt sind und sehen dabei zunächst von trivialen Ausnahmefällen ab. Wir deuten x, y, z als Cartesische Punktcoordinaten in einem dreifachen Raume, ferner X, Y, Z als ebensolche Coordinaten in einem anderen Raume. Ertheilen wir nun den Coordinaten x, y, z bestimmte Werthe α, β, γ, so definiren die entsprechenden Gleichungen:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(\dots) = 0$$

eine Curve K des Raumes X, Y, Z, und zwar wollen wir den Punkt: $x = \alpha, y = \beta, z = \gamma$ als *Bildpunkt* dieser Curve K betrachten. Im Raume X, Y, Z erhalten wir in dieser Weise ∞^3 Curven K, die nach unserer Terminologie einen *Curvencomplex* erzeugen, und die Curven dieses Complexes werden durch die obenstehenden Gleichungen auf den Punktraum x, y, z abgebildet.

Ertheilen wir andererseits den Punktcoordinaten X, Y, Z

die Werthe A, B, Γ, so ordnen wir dem Punkte: $X = A$, $Y = B$, $Z = \Gamma$ die Curve:

$$\varphi(x, y, z, A, B, \Gamma) = 0$$

zu, die k heissen möge. Im Raume x, y, z tritt also ebenfalls ein Curvencomplex auf, dessen Curven k auf den Punktraum X, Y, Z abgebildet werden.

Wir sehen, dass unsere Gleichungen

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(\ldots) = 0$$

einen Curvencomplex K im Raume X, Y, Z und einen Curvencomplex k im Raume x, y, z definiren, und dass sie gleichzeitig die Complexcurven jedes Raumes auf die Punkte des zweiten Raumes beziehen.

Die hiermit definirte Beziehung zwischen den beiden Curvencomplexen k und K und den beiden Punkträumen X, Y, Z und x, y, z geniesst charakteristische Eigenschaften, die wir in knapper Form resumiren werden.

Bezeichnen wir zwei Punkte x, y, z und X, Y, Z als *conjugirt*, wenn ihre Coordinaten die beiden Gleichungen: $\varphi = 0$, $\psi = 0$ erfüllen, so können wir sagen, dass alle zu einem gegebenen Punkte x, y, z conjugirten Punkte X, Y, Z eine Complexcurve K erzeugen, nämlich diejenige, deren Bildpunkt der betreffende Punkt x, y, z ist. Dementsprechend erzeugen alle zu einem gegebenen Punkte X, Y, Z conjugirten Punkte x, y, z eine Complexcurve k, deren Bildpunkt der gegebene Punkt X, Y, Z ist.

Durchläuft ein Punkt x, y, z eine Complexcurve k, so gehen die den ∞^1 Punkten der Curve k zugeordneten Complexcurven K durch einen gemeinsamen Punkt X, Y, Z, nämlich durch den Bildpunkt der durchlaufenen Complexcurve k.

Durchläuft andererseits ein Punkt X, Y, Z eine Complexcurve K, so gehen alle zugeordneten Complexcurven k durch einen gemeinsamen Punkt x, y, z, nämlich durch den Bildpunkt der durchlaufenen Complexcurve K.

Unser Gleichungssystem: $\varphi = 0$, $\psi = 0$ definirt zwei MONGE'sche Gleichungen, die wir in der folgenden Weise finden. Wir bilden die Gleichungen:

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0,$$
$$\varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz = 0,$$
$$\psi_x dx + \psi_y dy + \psi_z dz = 0,$$

eliminiren zwischen ihnen die Grössen X, Y, Z und erhalten so die Gleichung:

$$f(x, y, z;\ dx : dy : dz) = 0,$$

die offenbar von allen Complexcurven k befriedigt wird und daher als *Monge'sche Gleichung der* ∞^3 *Curven* k bezeichnet werden kann.

Eliminiren wir andererseits die Grössen x, y, z zwischen den Gleichungen:

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi = 0, \quad \psi = 0, \\ \varphi_X dX + \varphi_Y dY + \varphi_Z dZ = 0, \\ \psi_X dX + \psi_Y dY + \psi_Z dZ = 0, \end{cases}$$

so erhalten wir eine Gleichung:

$$F(X, Y, Z;\ dX : dY : dZ) = 0,$$

die von allen Complexcurven K befriedigt wird und daher als *Monge'sche Gleichung der* ∞^3 *Curven* K bezeichnet werden muss.

Die eben angegebene Eigenschaft der MONGE'schen Gleichungen: $f = 0$ und $F = 0$ lässt sich gradezu als Definition dieser Gleichungen auffassen. Dies folgt daraus, dass ∞^3 Curven, die den Raum ausfüllen, *nur eine* MONGE'schen Gleichung befriedigen.

Es ist nun beachtenswerth, dass unsere MONGE'sche Gleichungen noch in einer ganz anderen Weise gedeutet werden können.

Stellen wir nämlich die Forderung, dass die beiden benachbarten Complexcurven k, deren Bildpunkte die Coordinaten

$$X, Y, Z \text{ und } X + dX, Y + dY, Z + dZ$$

besitzen, sich schneiden sollen, so haben wir die vier Gleichungen:

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(\ldots) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z, X + dX, Y + dY, Z + dZ) = 0, \quad \psi(\ldots) = 0$$

zu bilden, und unser Verlangen findet daher seinen analytischen Ausdruck in den Gleichungen:

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0,$$
$$\varphi_X dX + \varphi_Y dY + \varphi_Z dZ = 0,$$
$$\psi_X dX + \psi_Y dY + \psi_Z dZ = 0,$$

die mit den Gleichungen (2) identisch sind. Die durch Elimination von x, y, z hervorgehende MONGE'sche Gleichung:

$$F(X, Y, Z; dX : dY : dZ) = 0$$

ist also das nothwendige und hinreichende Kriterium dafür, dass die beiden benachbarten Complexcurven k, deren Bildpunkte die Coordinaten X, Y, Z und $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ besitzen, sich schneiden.

Dementsprechend liefert die MONGE'sche Gleichung:

$$f(x, y, z; dx : dy : dz) = 0$$

das nothwendige und hinreichende Kriterium dafür, dass die beiden benachbarten Complexcurven K, deren Bildpunkte die Coordinaten x, y, z und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ haben, einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Eine MONGE'sche Gleichung besitzt immer ∞^∞ viele Integralcurven. Wir wollen zeigen, dass unser Gleichungssystem: $\varphi = 0$, $\psi = 0$ ein Entsprechen zwischen den Integralcurven der beiden Gleichungen: $f = 0$ und $F = 0$ herstellt. Es wird sich sogar ergeben, dass dieses Entsprechen zwischen Integralcurven unserer Gleichungen in wesentlich verschiedenen Weisen definirt werden kann.

Es seien:

$$y = M(x), \quad z = N(x)$$

die Gleichungen einer ganz beliebigen Integralcurve der MONGE'schen Gleichung: $f = 0$. Fassen wir sodann in:

$$\varphi(x, M(x), N(x)\ X, Y, Z) = 0, \quad \psi(\ldots) = 0$$

die Grösse x als einen Parameter auf, so stellen diese Gleichungen eo ipso ∞^1 Complexcurven K dar, unter denen zwei benachbarte sich immer schneiden. Diese ∞^1 Curven K haben daher eine Umhüllungscurve, die offenbar die MONGE'sche Glei-

chung: $F = 0$ befriedigt. Wir finden diese Umhüllungscurve, die C heissen möge, wenn wir zwischen den Gleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} \varphi(x, M(x), N(x), X, Y, Z) = 0 \quad \psi(\ldots) = 0 \\ 0 = \frac{d\varphi}{dx} \equiv \varphi_x + \varphi_M M' + \varphi_N N' \\ 0 = \frac{d\psi}{dx} \equiv \psi_x + \psi_M M' + \psi_N N' \end{cases}$$

die Grösse x eliminiren. Dass diese Elimination im Allgemeinen nur zwei und nicht drei endliche Relationen zwischen den Coordinaten X, Y, Z liefert, beruht darauf, dass zwei benachbarte Curven K unserer Schaar sich immer schneiden.

Wir wollen nun eine andere geometrische Construction angeben, die, angewandt auf die Curve c, wiederum auf die Curve C führen wird.

Wir betrachten alle Complexcurven k, welche die gegebene Integralcurve:

$$y = M(x), \quad z = N(x)$$

der Gleichung $f = 0$ berühren. Zwei benachbarte Complexcurven k der hiermit definirten Schaar schneiden sich offenbar immer, und also erfüllen ihre Bildpunkte X, Y, Z und $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ die Gleichung: $F = 0$. Die Bildpunkte X, Y, Z *aller* Curven k, welche die vorgelegte Curve c berühren, bilden somit eine Integralcurve C' der MONGE'schen Gleichung: $F = 0$. Wir wollen zeigen, dass diese Curve C' mit der früher construirten Curve C identisch ist.

Die Forderung, dass die Complexcurve k die Curve:

$$y = M(x), \quad z = N(x)$$

berühren soll, findet ihren analytischen Ausdruck in den Gleichungen:

$$(3')\quad \begin{cases} \varphi(x, M(x), N(x), X, Y, Z) = 0, \quad \psi(\ldots) = 0 \\ \varphi_x + \varphi_M M'(x) + \varphi_N N'(x) = 0, \ \psi_x + \psi_M M' + \psi_N N' = 0, \end{cases}$$

die genau dieselbe Form wie die Gleichungen (3) haben. Durch Elimination der Grösse x erhalten wir daher als Definition der gesuchten Curve C' grade die beiden Gleichungen, die sich früher als Definitionsgleichungen der Curve C ergeben haben.

Die Integralcurven der beiden MONGE'schen Gleichungen: $f = 0$ und $F = 0$ ordnen sich, wie wir eben gesehen haben, paarweise als entsprechende Curven c und C zusammen. Durchläuft ein Punkt x, y, z die Curve c, so umhüllt die diesem Punkte zugeordnete Complexcurve K die Curve C. Beschreibt andererseits ein Punkt X, Y, Z die Curve C, so umhüllt die diesem Punkte zugeordnete Complexcurve k die Curve c.

Das hiermit festgestellte Entsprechen zwischen den Integralcurven der beiden MONGE'schen Gleichungen: $f = 0$ und $F = 0$ lässt sich als eine Transformation auffassen, welche den ∞^4 Linienelementen der MONGE'schen Gleichung: $f = 0$ die ∞^4 Linienelemente der Gleichung: $F = 0$ zuordnet. Die Gleichungen (3) oder (3'), die durch die Substitution

$$M(x) = y, \quad M'(x) = y', \quad N(x) = z, \quad N'(x) = z'$$

die Form

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \qquad \psi(\ldots) = 0,$$
$$\varphi_x + \varphi_y y' + \varphi_z z' = 0, \qquad \psi_x + \psi_y y' + \psi_z z' = 0$$

erhalten, geben nach unseren früheren Ueberlegungen eine und nur eine von X, Y, Z freie Relation zwischen x, y, z, y' und z', nämlich die MONGE'sche Gleichung:

$$f(x, y, z, 1 : y' : z') = 0.$$

Also können die obenstehenden Gleichungen nach X, Y, Z aufgelöst werden und liefern dabei für diese Grössen Ausdrücke:

$$(4) \qquad \begin{cases} X = \mathfrak{X}(x, y, z, y', z'), \\ Y = \mathfrak{Y}(x, y, z, y', z'), \\ Z = \mathfrak{Z}(x, y, z, y', z'), \end{cases}$$

die uns zeigen, dass die oben angegebenen Constructionen jedesmal Integralcurven $c, c', c'' \ldots$ der Gleichung $f = 0$, die ein gemeinsames Linienelement $x, y, z, y' z'$ haben, in Integralcurven $C, C', C'' \ldots$ der Gleichung $F = 0$ überführen, die durch einen gemeinsamen Punkt X, Y, Z gehen. Es ist leicht einen Schritt weiter zu gehen und zu beweisen, dass die Curven $C, C', C'' \ldots$ einander in ihrem gemeinsamen Punkte berühren. Da nämlich in den vorhergehenden Ueberlegungen die kleinen und die grossen Buchstaben überall vertauscht werden können, so bestehen auch Gleichungen von der Form:

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \qquad \psi(\ldots) = 0$$
$$\varphi_x + \varphi_Y Y' + \varphi_Z Z' = 0, \quad \psi_x + \psi_Y Y' + \psi_Z Z' = 0,$$

aus denen durch Auflösung drei Relationen:

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = \xi(XYZY'Z') \\ y = \eta(\ \ldots\ ) \\ z = \zeta(\ \ldots\ ) \end{array} \right.$$

abgeleitet werden, die x, y, z als Functionen von X, Y, Z, Y', Z' bestimmen.

Vereinigen wir nun die drei Gleichungen (5) und die drei analogen Gleichungen (4), so ist es leicht zu erkennen, dass jedem Linienelelemente x, y, z, y', z' der MONGE'schen Gleichung $f = 0$ ein Linienelement X, Y, Z, Y', Z' der Gleichung $F = 0$ zugeordnet ist, dass also das Entsprechen zwischen den Integralcurven c und C unserer beiden MONGE'schen Gleichungen die fundamentale Eigenschaft geniesst, Curven c mit gemeinsamem Linienelement Curven C zuzuordnen, die ebenfalls ein gemeinsames Linienelement besitzen.

Ertheilen wir nämlich den Grössen x, y, z, y', z' bestimmte Werthe, die unsere MONGE'sche Gleichung $f = 0$ erfüllen, so zeigen die Gleichungen (4), dass die entsprechenden Werthe von X, Y, Z (innerhalb eines passenden Bereiches) eindeutig bestimmt sind. Substituiren wir sodann diese Werthe in die Gleichungen (5) und $F = 0$, so erkennen wir, dass wirklich auch die Werthe von Y' und Z' analytisch bestimmt sind. Selbstverständlich erfüllen die gefundenen Werthe von X, Y, Z, Y', Z' die MONGE'sche Gleichung $F = 0$.

Ehe wir das hiermit gefundene wichtige Resultat formuliren, wollen wir die früheren Ueberlegungen in einem wesentlichen Punkte vervollständigen. Wir haben nämlich ursprünglich, wenn auch implicite *zwei* Voraussetzungen gemacht, die sich factisch auf *eine einzige* reduciren.

Wir haben einerseits angenommen, dass die Gleichungen:

$$(4) \qquad \varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(\ldots) = 0$$

den ∞^3 Punkten x, y, z *dreifach* unendlich viele Curven K zuordnen, die den Raum X, Y, Z ausfüllen. Wir haben andererseits vorausgesetzt, dass die Gleichungen: $\varphi = 0$, $\psi = 0$ den

∞^3 Punkten X, Y, Z *dreifach* unendlich viele Curven k zuordnen, die den Raum x, y, z ausfüllen. Wir wollen zeigen, dass diese beiden Voraussetzungen nicht wesentlich verschieden sind, dass also die letzte Voraussetzung immer erfüllt ist, wenn dies mit der ersten Voraussetzung der Fall ist.

Es mögen zwei Gleichungen von der Form

$$\Phi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \Psi(\ldots) = 0$$

vorgelegt sein, die, sobald x, y, z als Parameter aufgefasst werden, *dreifach* unendlich viele Curven K darstellen, die den Raum X, Y, Z ausfüllen. Es gehen dann durch jeden Punkt allgemeiner Lage:

$$X = A, \quad Y = B, \quad Z = \Gamma$$

einfach unendlich viele Curven K:

$$\Phi(a, b, c, X, Y, Z) = 0, \quad \Psi(\ldots) = 0,$$

unter denen jede im Raume x, y, z einen bestimmten Bildpunkt

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

besitzt. Der Ort dieser ∞^1 Bildpunkte ist diejenige Curve k des Raumes x, y, z, die dem Punkte: $X = A, \; Y = B, \; Z = \Gamma$, zugeordnet ist. Wäre nun die Zahl der Curven k kleiner als ∞^3, so hätte jede Curve k unendlich viele Bildpunkte:

$$X = A, \quad Y = B, \quad Z = \Gamma$$

und dann wäre jeder Punkt einer Curve k Bildpunkt von unendlich vielen Curven K. Hiermit sind wir auf Widerspruch geführt worden und also giebt es wirklich dreifach unendlich viele Curven k. Und diese ∞^3 Curven k müssen den Raum x, y, z ausfüllen; denn wären x, y, z durch eine Relation:

$$\vartheta(x, y, z) = 0$$

gebunden, so bestimmten die Gleichungen: $\varphi = 0, \; \psi = 0$ nicht dreifach unendlich viele Curven K im Raume X, Y, Z.

Also können wir sagen:

Satz 1. *Ordnen zwei vorgelegte Gleichungen:*

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(\ldots) = 0$$

den ∞^3 Punkten x, y, z dreifach unendlich viele Curven K zu, die den Raum X, Y, Z ausfüllen, so ordnen diese Gleichungen auch

den ∞^3 Punkten X, Y, Z dreifach unendlich viele Curven k zu, die den Raum x, y, z ausfüllen[1]).

Ist dann:

$$f(x, y, z;\ dx : dy : dz) = 0$$

die Monge'sche Gleichung der Curven k, und

$$F(X, Y, Z;\ dX : dY : dZ) = 0$$

die Monge'sche Gleichung der Curven K, so bestimmen die sechs Gleichungen:

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0$$
$$0 = \varphi_x + \varphi_y y' + \varphi_z z', \quad 0 = \psi_x + \psi_y y' + \psi_z z'$$
$$0 = \varphi_X + \varphi_Y Y' + \varphi_Z Z', \quad 0 = \psi_X + \psi_Y Y' + \psi_Z Z'$$

(innerhalb passender Bereiche) ein ein-eindeutiges Entsprechen zwischen den ∞^4 Linienelementen x, y, z, y', z' der Gleichung $f = 0$ und den ∞^4 Linienelementen X, Y, Z, Y', Z' der Gleichung: $F = 0$. Diese Transformation der Linienelemente der Gleichungen: $f = 0$ und $F = 0$ führt im Allgemeinen Integralcurve der einen Gleichung in Integralcurve der anderen Gleichung über. Die einzige Ausnahme bilden die Complexcurven k und K, deren Linienelemente jedesmal in die Linienelemente eines Elementarkegels übergehen, dessen Scheitel der betreffenden Complexcurve als Bildpunkt zugeordnet ist.

Die hiermit festgestellte Beziehung zwischen den Linienelementen zweier MONGE'schen Gleichungen $f = 0$ und $F = 0$ bezeichnen wir aus naheliegenden Gründen als eine *polare Beziehung*. Wir sagen, dass die Integralcurven der beiden MONGE-schen Gleichungen polar auf einander bezogen sind. Zuweilen brauchen wir auch die Ausdrucksweise, dass die beiden MONGE-schen Gleichungen polar auf einander bezogen sind; oder wir sagen, dass zwischen den beiden Curvencomplexen k und K eine polare Beziehung festgestellt ist.

Wir können (wie in meinen alten Arbeiten) einen Schritt weiter gehen und nachweisen, dass unsere beiden Gleichungen

---

1) Es möge hier ausdrücklich bemerkt sein, dass aus der Voraussetzung, dass zwei Gleichungen

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(\ldots) = 0$$

sowohl im Raume x, y, z, wie im Raume X, Y, Z *dreifach* unendlich viele Curven bestimmen, unmittelbar folgt, dass die Curven jeder Schaar den betreffenden Raum ausfüllen.

$\varphi = 0$, $\psi = 0$ zwischen *allen* geometrischen Gebilden (Punkten, Curven und Flächen) der beiden Räume x, y, z und X, Y, Z eine Beziehung feststellen, welche die fundamentale Eigenschaft geniesst, Gebilde, die sich berühren (d. h. ein gemeinsames Flächenelement haben), in Gebilde überzuführen, die sich ebenfalls berühren.

Hier brauchen wir nicht auf alle Details dieser grossen von mir begründeten Theorie einzugehen. Wir beschränken uns vielmehr auf einige knappe Bemerkungen, die wir später verwerthen.

Liegt im Raume x, y, z eine Fläche:

$$\omega(x, y, z) = 0$$

vor, so giebt es unter ihren ∞^3 Linienelementen immer ∞^2, die zugleich unsere MONGE'sche Gleichung: $f = 0$ befriedigen. Und diese ∞^2 Linienelemente lassen sich immer zu ∞^1 Curven σ zusammenfassen, welche die Fläche (im Allgemeinen sogar mehrfach) überdecken. Jede Curve σ ist aber eine Integralcurve der Gleichung: $f = 0$ und hat daher im Raume X, Y, Z eine Bildcurve Σ. Und die ∞^1 soeben definirten Curven Σ erzeugen im Allgemeinen eine neue Fläche Ω, die wir als *Bildfläche der gegebenen Fläche*: $\omega = 0$ auffassen wollen.

In dieser Weise ordnen wir jeder Fläche (bez. Curve) des Raumes x, y, z ein Gebilde des Raumes X, Y, Z zu. Wir behaupten, dass bei dieser Zuordnung Gebilden mit gemeinsamem Flächenelement Gebilde im anderen Raume entsprechen, die ebenfalls ein gemeinsames Flächenelement haben.

Wünscht man den inneren Grund für diese Thatsache zu erkennen und gleichzeitig den Schlüssel zu den tieferliegenden Phänomenen dieser ganzen Theorie zu finden, so muss man die Aufmerksamkeit auf diejenige Transformation richten, die alle ∞^4 Linienelemente der MONGE'schen Gleichung: $f = 0$ in die ∞^4 Linienelemente der Gleichung: $F = 0$ überführt.

Wenn zwei Flächen einander berühren, so haben sie im Berührungspunkte jedenfalls ein gemeinsames Linienelement l, das der MONGE'schen Gleichung: $f = 0$ genügt. Sehen wir von unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung ab, so dürfen wir überdies behaupten, dass unsere Flächen noch weitere gemeinsame Linienelemente l' enthalten, die $f = 0$ befriedigen. Dies

ist ja der Fall mit allen zu l benachbarten Linienelementen, die $f = 0$ erfüllen und der einen Fläche gehören.

Es ist andererseits klar, dass zwei Flächen sich berühren müssen, sobald ein Linienelement der Gleichung: $f = 0$ auf beiden Flächen gelegen ist, und überdies alle benachbarten Linienelemente der Gleichung: $f = 0$, welche auf der ersten Fläche liegen, bis auf Grössen zweiter Ordnung auch auf der anderen Fläche gelegen sind.

Bei der Transformation der Linienelemente unserer MONGE-schen Gleichungen gehen aber unendlich benachbarte Linienelemente im Allgemeinen in ebensolche Elemente über, und insbesondere werden Linienelemente, deren Coordinaten nur um infinitesimale Grössen zweiter Ordnung differiren, in Linienelemente transformirt, die in derselben Beziehung zu einander stehen.

Durch Vereinigung dieser Betrachtungen ergiebt sich, dass Flächen des Raumes x, y, z, die ein gemeinsames Flächenelement haben, im Allgemeinen in Flächen transformirt werden, die in derselben gegenseitigen Beziehung stehen.

Sind die Elementarkegel der Gleichung: $f = 0$ algebraische Kegel von Ordnung n, so giebt es in jedem Punkte einer willkürlich gewählten Fläche: $\omega(x\,y\,z) = 0$ n verschiedene Linienelemente, welche auf der Fläche liegen und die Gleichung: $f = 0$ erfüllen. Alsdann ordnen unsere Constructionen dem betreffenden Flächenelement der Fläche: $\omega = 0$ mehrere und zwar n verschiedene Elemente der Bildfläche: $\Omega(X\,Y\,Z) = 0$ zu. Sind auch die Elementarkegel der Gleichung: $F = 0$ algebraische Kegel von der Ordnung N, so ist die Beziehung zwischen den Flächenelementen der beiden Räume, die unsere Constructionen definiren, n — N-deutig; dabei ist es selbstverständlich fortwährend unsere Voraussetzung, dass wir von vornherein in den beiden Punkträumen solche Gebiete gewählt haben, dass die Beziehung zwischen den Linienelementen der beiden MONGE'schen Gleichungen innerhalb der betreffenden Bereiche als eine *ein-eindeutige* aufgefasst werden kann.

Ausnahmsweise kann es vorkommen, dass in einem gewissen Punkte einer Fläche: $\omega(x\,y\,z) = 0$ alle ∞^4 hindurchgehenden Linienelemente der Fläche die MONGE'sche Gleichung:

$f = 0$ befriedigen. Alsdann gehören zu dem betreffenden Flächenelemente x, y, z, p, q *einfach unendlich viele* zugeordnete Flächenelemente des Raumes X, Y, Z. Sind:

$$\begin{aligned} X &= \mathfrak{X}(x, y, z, p, q), \\ Y &= \mathfrak{Y}(x, y, z, p, q), \\ Z &= \mathfrak{Z}(\ .\ .\ .\ .\ .\ ), \\ P &= \mathfrak{P}(\ .\ .\ .\ .\ .\ ), \\ Q &= \mathfrak{Q}(x, y, z, p, q) \end{aligned}$$

die Gleichungen, welche die Beziehung zwischen den Flächenelementen beider Räume definiren, so können die Functionen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \ldots \mathfrak{Q}$ sich nicht sämmtlich in der Umgebung des betreffenden Elementes x, y, z, p, q regulär verhalten, sondern einige unter diesen Functionen müssen unbestimmt werden.

Wir wollen nun insbesondere annehmen, dass die Gleichung: $f = 0$ die Form:

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$$

besitzt, und somit eine PFAFF'sche Gleichung darstellt. Dass dieser Fall eintreten kann, ist von vornherein klar. Liegt nämlich eine integrable oder nicht-integrable PFAFF'sche Gleichung vor, so besitzt diese Gleichung immer ∞^∞ viele Integralcurven, und unter ihnen denken wir uns dreifach unendlich viele herausgegriffen, die durch die beiden Gleichungen:

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad \Psi(\ \ldots\ ) = 0$$

dargestellt sein mögen. Ist nun die betreffende PFAFF'sche Gleichung nicht-integrabel, so *müssen* diese ∞^3 Integralcurven k den Raum x, y, z ausfüllen. Ist ferner die PFAFF'sche Gleichung integrabel und stellt:

$$W(x, y, z) = \text{Const.}$$

ihre Integralgleichung dar, so *kann* man immer auf jeder Fläche der Schaar: $W = \text{Const.}$ zweifach unendlich viele Curven herausgreifen, und man erhält also wiederum eine Schaar von ∞^3 Integralcurven k der PFAFF'schen Gleichung, die den Raum ausfüllen.

Nachdem in dieser Weise eine Schaar von ∞^3 Curven $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ gefunden ist, die unsere PFAFF'sche Gleichung befriedigt und den Raum x, y, z ausfüllt, bilden wir die beiden Gleichungen

$$\Phi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \Psi(\ldots) = 0$$

und betrachten sie als Definitionsgleichungen einer Berührungstransformation.

Diese Berührungstransformation bezieht die ∞^3 Integralcurven k unserer PFAFF'schen Gleichung auf die Punkte des Raumes X, Y, Z. Und in dem letzten Raume treten ∞^3 Curven K auf, die den Punkten x, y, z zugeordnet sind.

Jetzt giebt es im Raume x, y, z dreifach unendlich viele Flächenelemente: x, y, z, p, q, die jedesmal ∞^1 Linienelemente der PFAFF'schen Gleichung: $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$ enthalten. Diese Gleichung ordnet ja jedem Punkte x, y, z einfach unendlich viele Linienelemente zu, die ein Büschel bilden, und in dem Flächenelemente:

$$\frac{p}{A} = \frac{q}{B} = \frac{-1}{C}$$

enthalten sind.

Jedes einzelne unter diesen ∞^3 Flächenelementen hat ∞^1 entsprechende Flächenelemente X, Y, Z, P, Q. In dieser Weise erhalten wir im Allgemeinen im Raume X, Y, Z eine ausgezeichnete Schaar von ∞^4 Flächenelementen X, Y, Z, P, Q, die durch eine gewisse partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$D(X, Y, Z, P, Q) = 0$$

definirt wird. Wir wollen die Integrationstheorie dieser partiellen Differentialgleichung aus trivialen Eigenschaften unserer PFAFF'schen Gleichung ableiten. Dabei heben wir ausdrücklich hervor, dass wir später durch ganz analoge Betrachtungen allgemeine Theorien für gewisse semilineare Gleichungen erster Ordnung und für Involutionssysteme höherer Ordnung begründen werden. Ein Hauptzweck mit unseren jetzigen Entwickelungen ist, eben diese neuen Theorien vorzubereiten.

Im Raume x, y, z betrachten wir alle durch einen Punkt π allgemeiner Lage hindurchgehenden Linienelemente unserer PFAFF'schen Gleichung sowie das Flächenelement e, das diese

Linienelemente enthält. Die ∞^1 zugeordneten Linienelemente L des Raumes X, Y, Z erzeugen eine Curve K, nämlich die Bildcurve des Punktes π. Jeder zu π benachbarte Punkt π' bestimmt in entsprechender Weise eine zu K benachbarte Complexcurve K'. Setzen wir insbesondere voraus, dass auch das Linienelement $\pi\pi'$ die PFAFF'sche Gleichung befriedigt, so schneiden sich die beiden Complexcurven K und K'. *Diese benachbarten Curven haben ∞^1 gemeinsame Flächenelemente, deren Inbegriff wir als einen Flächenstreifen bezeichnen* wollen. Es ist leicht zu beweisen, dass die ∞^1 Flächenelemente des Streifens KK' gerade diejenigen ∞^1 Flächenelemente X, Y, Z, P, Q sind, die von unserer Berührungstransformation dem ausgezeichneten Flächenelement x, y, z, p, q zugeordnet sind, das wir früher mit e bezeichnet haben.

Das Flächenelement e enthält die beiden Punkte π und π', ferner alle durch π gehenden Linienelemente l der PFAFF'schen Gleichung, endlich auch (wenn von infinitesimalen Grössen zweiter Ordnung abgesehen wird) alle durch π' gehenden Linienelemente l' der PFAFF'schen Gleichung. Nach unserer allgemeinen Theorie finden wir aber die ∞^1 zum Flächenelemente e zugeordneten Elemente X, Y, Z, P, Q, indem wir zuerst unter den ∞^1 durch π gehendenden Linienelementen l ein bestimmtes wählen, sodann ein benachbartes Element l' nehmen, dessen Punkt π' ebenfalls im Flächenelemente e enthalten ist, und endlich die beiden zu l und l' zugeordneten Linienelemente L und L' construiren. Die hiermit gefundenen Linienelemente L und L' bestimmen ein Flächenelement X, Y, Z, P, Q, das durch unsere Berührungstransformation dem Flächenelemente e zugeordnet ist.

Ertheilen wir jetzt dem durch den Punkt π gehenden Linienelemente l der PFAFF'schen Gleichung alle ∞^1 möglichen Lagen, so erhalten wir im Raume X, Y, Z einfach unendlich viele zum Flächenelement e zugeordneten Elemente X, Y, Z, P, Q, und diese ∞^1 Flächenelemente gehören offenbar, wie früher behauptet, dem Flächenstreifen, den wir mit KK' bezeichnet haben.

Wir haben wiederholt betont, dass dem Flächenelemente e *einfach* unendlich viele Elemente X, Y, Z, P, Q zugeordnet sind. Hierzu führte uns ursprünglich die Bemerkung, dass einem Flächenelemente x, y, z, p, q, das n Linienelemente der Gleichung $f = 0$ enthält, im anderen Raume n verschiedene Flächen-

elemente zugeordnet sind. Und zwar nahmen wir ohne weiteres an, dass dieser Schluss, der unter der Voraussetzung abgeleitet wurde, dass n eine endliche Zahl bezeichnet, auch dann gültig bleibt, wenn n gleich ∞^1 ist. Nun ist allerdings der hiermit gemachte Schritt vollständig richtig. Wir halten es jedoch für zweckmässig, auf diesen Punkt genauer einzugehen; denn in unseren Constructionen der dem Flächenelemente e zugeordneten Elemente X, Y, Z, P, Q traten factisch zwei Willkürlichkeiten auf, indem nicht allein das Linienelement l, sondern auch der zum Punkte π benachbarte Punkt π' unendlich viele verschiedene Lagen haben können.

Dass nichtsdestoweniger jedem Flächenelemente e nur ∞^1 und nicht ∞^2 Elemente X, Y, Z, P, Q zugeordnet sind, beruht darauf, dass die Lage des Punktes π', wie jetzt gezeigt werden soll, keinen wesentlichen Einfluss auf die Lage des transformirten Flächenelementes ausübt.

Wir nehmen wiederum einen Punkt π allgemeiner Lage und ein hindurchgehendes Linienelement l der PFAFF'schen Gleichung; wir nehmen ferner zwei zu π benachbarte Punkte π' und π'', die alle beide in dem Flächenelemente e gelegen sind, und construiren sodann die beiden durch π' und π'' gehenden Linienelemente l' und l'', die zum Linienelemente l benachbart sind. Im Raume X, Y, Z entsprechen den drei Linienelementen l, l' und l'' drei ganz bestimmte Linienelemente, die L, L' und L'' heissen mögen. Bezeichnen wir sodann mit E' das Flächenelement, das L und L' enthält, ferner mit E'' das Flächenelement, das L und L'' enthält, so ist es unsere Behauptung, dass die beiden Flächenelemente E' und E'' identisch sind. Zum Beweise bemerken wir, dass es immer eine Complexcurve k giebt, die durch π' hindurchgeht und überdies π'' enthält, wenn von infinitesimalen Grössen 2. O. abgesehen wird. Hieraus folgt, dass der Punkt des Linienelementes L' mit dem Punkte des Elementes L'' identisch ist. Und da sowohl das Flächenelement E' wie das Flächenelement E'' durch diesen Punkt gehen, und überdies alle beide das Linienelement L enthalten, so fallen diese beiden Flächenelemente wirklich zusammen.

Es gilt daher der Satz:

Satz 2. *Ordnen zwei vorgelegte Gleichungen*

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0\,, \quad \psi(\cdots) = 0$$

den ∞^3 Punkten X, Y, Z dreifach unendlich viele Curven zu, die den Raum x, y, z ausfüllen und überdies eine Pfaff'sche Gleichung:

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$$

befriedigen, so geniesst die von den Gleichungen: $\varphi = 0$, $\psi = 0$ bestimmte Berührungstransformation eine charakteristische Eigenschaft: sie ordnet einem jeden unter den ∞^3 Flächenelementen:

$$\frac{p}{A} = \frac{q}{B} = \frac{-1}{C}$$

einfach unendlich viele Flächenelemente X, Y, Z, P, Q zu.

Wenn andererseits eine Berührungstransformation, die durch zwei Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ definirt wird, eine Schaar von ∞^3 Flächenelementen x, y, z, p, q in eine Schaar bestehend aus ∞^4 Elementen X, Y, Z, P, Q umwandelt, so erfüllen die ∞^3 Complexcurven:

$$\varphi(x, y, z, A, B, C) = 0\,, \quad \psi(\cdots) = 0$$

des Raumes x, y, z immer eine Pfaff'sche Gleichung.

Setzen wir fortwährend voraus, dass die MONGE'sche Gleichung: $f = 0$ die PFAFF'sche Form besitzt, so entsprechen also jedem Flächenelemente e *einfach* unendlich viele Elemente X, Y, Z, P, Q, und diese ∞^1 Elemente bilden, wie wir sahen, einen Flächenstreifen, der von zwei benachbarten sich schneidenden Complexcurven K und K' begrenzt wird. Bezeichnen wir wie früher den Bildpunkt der Curve K mit π, so ist der Bildpunkt π' der Curve K' in dem Flächenelemente e des Punktes π gelegen. Hieraus können wir einen fundamentalen Schluss ziehen. Wenn der Punkt π gegeben ist, so hat das zugeordnete Flächenelement e eine bestimmte Lage, und dementsprechend ist auch der Flächenstreifen KK', aufgefasst als Ort von ∞^1 Elementen X, Y, Z, P, Q, vollständig bestimmt. Das Linienelement $\pi\pi'$ kann aber einfach unendlich viele verschiedene Lagen annehmen, und die ∞^1 verschiedenen Curven K' schneiden die feste Curve K in verschiedenen Punkten. Nichtsdestoweniger bestimmen, wie wir gesehen haben, unsere benachbarten Complexcurven K und K', wenn auch nicht dieselbe geometrische Figur, doch jedenfalls dieselbe Schaar von ∞^1 Flächenelementen.

Wir formuliren dieses wichtige Resultat folgendermassen:

Satz 3. *Ist die Monge'sche Gleichung aller Complexcurven k eine Pfaff'sche Gleichung, so ist der Flächenstreifen, den zwei benachbarte, sich schneidende Complexcurven K und K' definiren, vollständig bestimmt, sobald die Curve K gegeben ist. Wenn also eine feste Complexcurve K nach und nach von verschiedenen benachbarten Complexcurven geschnitten wird, so enthält der Flächenstreifen KK' immer dieselbe Schaar von ∞^1 Flächenelementen.*

Jede Complexcurve K gehört also einem einzigen Flächenstreifen S an, dessen ∞^1 Flächenelemente einem bestimmten Elemente e zugeordnet sind. Nehmen wir nun eine bestimmte Curve K, wählen auf ihr einen Punkt P, und suchen das entsprechende Flächenelement des betreffenden Streifens, so sollen wir eine beliebige benachbarte Curve K' nehmen, die K schneidet. *Wir können insbesondere diejenige K' wählen, die K im Punkte P schneidet.* Das gesuchte Flächenelement gehört in Folge dessen dem betreffenden Elementarkegel der MONGE'schen Gleichung $F = 0$ an.

Der Flächenstreifen S einer Complexcurve K hat daher in jedem Punkte P mit dem zugeordneten Elementarkegel der Gleichung: $F = 0$ ein Flächenelement gemein.

Setzen wir ausdrücklich voraus, dass die MONGE'sche Gleichung: $F = 0$ keine PFAFF'sche Gleichung ist, so hat jeder Elementarkegel ∞^1 Flächenelemente, deren jedes einem Streifen S gehört. Alsdann giebt es ∞^4 Flächenelemente, die jedesmal einem S gehören, und diese ∞^4 Flächenelemente werden durch eine partielle Differentialgleichung:

$$\Phi(X, Y, Z, P, Q) = 0$$

bestimmt, deren Elementarkegel grade die Kegel der MONGE'schen Gleichung $F = 0$ sind.

Nehmen wir jetzt irgend eine Integralcurve c der Pfaff'schen Gleichung: $f = 0$ und construiren wir im Raume X, Y, Z die ∞^1 Complexcurven K, deren Bildpunkte auf der gewählten Curve c liegen, so bestimmen zwei benachbarte Curven K dieser Schaar immer einen Flächenstreifen S, und also erzeugen diese ∞^1 Curven K immer eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung: $\Phi = 0$.

In ganz entsprechender Weise betrachten wir in einer späteren Abhandlung Systeme von $n - q$ PFAFF'schen Gleichungen zwischen n Veränderlichen und erhalten hierdurch in erster Linie eine allgemeine Theorie für semilineare partielle Differentialgleichungen:

$$W(z\,x_1 \ldots x_{n-1}\,p_1 \ldots p_{n-1}) = 0$$

mit ∞^n charakteristischen Curven und gleichzeitig eine allgemeine Theorie der betreffenden PFAFF'schen Systeme.

Setzen wir jetzt voraus, dass auch die MONGE'sche Gleichung: $F = 0$ die PFAFF'sche Form besitzt. Alsdann giebt es ∞^3 Flächenelemente X, Y, Z, P, Q, die einem Streifen S gehören. Und da die Zahl der Streifen S gleich ∞^3 ist, so gehört jedes unter diesen ∞^3 Flächenelementen ∞^1 Streifen S an. Jetzt bestimmt die PFAFF'sche Gleichung $F = 0$ *dreifach* unendlich viele Elemente E, die im Raume X, Y, Z dieselbe Rolle spielen, wie im Raume x, y, z die ∞^3 Elemente e. *Zwischen den* ∞^3 *Elementen* e *und den* ∞^3 *Elementen* E *stellt* unsere Berührungstransformation eine *unendlich-unendlich-deutige* Beziehung fest. Die ∞^3 Elemente E setzen sich zu ∞^3 Streifen S zusammen, deren jeder das Bild eines Elementes e liefert; dementsprechend bestimmen die ∞^3 Elemente e dreifach unendlich viele Streifen s, deren jeder einem Elemente E zugeordnet ist.

Nehmen wir im Raume x, y, z eine beliebige Integralcurve c der PFAFF'schen Gleichung: $f = 0$, und construiren wir alle ∞^1 Complexcurven K, deren Bildpunkte auf der Curve c liegen, so erzeugen diese ∞^1 Curven K eine Fläche, deren Flächenelemente lauter Elemente E sind. Die PFAFF'sche Gleichung: $F = 0$ hat also *Integralflächen* und zwar gehört jedes Element E einer und eo ipso auch nur einer Integralfläche an. Die PFAFF'sche Gleichung: $F = 0$ ist also *integrabel*, und dementsprechend ist auch die PFAFF'sche Gleichung $f = 0$ integrabel.

Hiermit ist der von mir in den Mathematischen Annalen Bd. 5, p. 163, Z. 6 aufgestellte fundamentale Satz bewiesen.

Theorem III. *Bestimmen die beiden Gleichungen*

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0\,, \quad \psi(\cdots) = 0$$

sowohl im Raume x, y, z *wie im Raume* X, Y, Z *dreifach unendlich viele Curven, die jedesmal eine Pfaff'sche Gleichung erfüllen, so sind diese Pfaff'schen Gleichungen alle beide integrabel.*

Wie ich schon an der citirten Stelle hervorgehoben habe, wirft dieser Satz Licht über die Frage nach allen *eindeutigen* (Berührungs-)Transformationen des Raumes. Gleichzeitig hebe ich hervor, dass unser Theorem sich factisch mit dem Satze deckt, dass jede Osculationstransformation der Ebene eine Berührungs-

transformation ist. Ich vermuthe, dass es Herrn BÄCKLUND's Aufmerksamkeit entgangen ist, dass ich schon in den Mathematischen Annalen, Bd. 5 das Theorem III ausdrücklich aufgestellt habe. Auch erlaube ich mir darauf hinzuweisen, dass die Frage nach den Osculationstransformationen des n-fachen Raumes zuerst von mir und zwar im Jahre 1872 in den Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania formulirt wurde. Ich behalte mir vor, auf Herrn BÄCKLUND's schöne Untersuchungen auf diesem Gebiete später zurückzukommen.

Der Vollständigkeit wegen stellen wir noch das folgende Theorem auf:

Theorem IV. *Bestimmen die Gleichungen*

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0\,, \quad \psi(\cdots) = 0$$

im Raume x, y, z dreifach unendlich viele Integralcurven k einer Pfaff'schen Gleichung und im Raume X, Y, Z dreifach unendlich viele Curven K, die eine nicht-lineare Monge'sche Gleichung $F = 0$ erfüllen, so ist jene Pfaff'sche Gleichung nicht-integrabel. Die Curven K sind die Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Auf die Umkehrung dieses Theorems gehen wir hier nicht ein; dagegen betonen wir, dass wir später das aufgestellte Theorem, wie seine Umkehrung, verallgemeinern wollen; zu diesem Zwecke ersetzen wir zunächst die PFAFF'sche Gleichung $f = 0$ durch ein System PFAFF'scher Gleichungen.

Endlich wollen wir annehmen, dass weder die MONGE'sche Gleichung $f = 0$ noch die Gleichung $F = 0$ die PFAFF'sche Form besitzt.

Alsdann bestimmen wiederum zwei benachbarte sich schneidende Complexcurven K und K' einen Flächenstreifen S; jetzt giebt es aber *vierfach* unendlich viele Streifen S. Dementsprechend finden wir auch im Raume x, y, z *vierfach* unendlich viele Streifen s. Nehmen wir sodann eine beliebige Integralcurve c der MONGE'schen Gleichung: $f = 0$ und construiren alle ∞^1 Complexcurven K, deren Bildpunkte auf c liegen, so erzeugen diese ∞^1 Curven K jedesmal eine Fläche: $W(X, Y, Z) = 0$, die ∞^1 Streifen S enthält. Wir erhalten in dieser Weise ∞^∞ viele Flächen: $W = 0$ und diese Flächen liefern *das allgemeine Integral*

eines Involutionssystems, bestehend aus zwei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Ein derartiges Involutionssystem hat bekanntlich immer *fünffach* unendlich viele charakteristische Streifen zweiter Ordnung. Da beide Gleichungen unseres Involutionssystems die MONGE-AMPÈRE'sche Form haben, so hat dieses Involutionssystem eo ipso *vierfach* unendlich viele charakteristische *Streifen erster Ordnung. Die Zahl der charakteristischen Curven ist aber* ∞^3.

Soweit mir bekannt, sind derartige Involutionssysteme noch nicht betrachtet worden.

Bei unserer Berührungstransformation verhält sich unser Involutionssystem selbstverständlich nicht regulär.

Die Verallgemeinerung dieser Theorie liegt an der Hand.

Liegt irgend eine nicht-lineare MONGE'sche Gleichung

$$F(X, Y, Z;\ dX : dY : dZ) = 0$$

vor, so bestimmt sie bekanntlich immer eine nicht-lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Sind

$$\Phi(X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma) = 0\,, \quad \Psi(\cdots) = 0$$

die Gleichungen der ∞^3 Charakteristiken dieser partiellen Differentialgleichung, so bestimmen die Gleichungen

$$\Phi(X, Y, Z, x, y, z) = 0\,, \quad \Psi(\cdots) = 0$$

eine Berührungstransformation, bei welcher die ∞^3 Charakteristiken den ∞^3 Punkten x, y, z zugeordnet werden. Gleichzeitig werden den ∞^4 Linienelementen der Gleichung: $F = 0$ die ∞^4 Linienelemente einer nicht-integrablen PFAFF'schen Gleichung

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$$

zugeordnet. Die bekannte Transformationstheorie dieser PFAFF-schen Gleichung liefert unmittelbar die vollständige Transformationstheorie der MONGE'schen Gleichung: $F = 0$. Die Berührungstransformationen der Ebene geben unmittelbar alle Transformationen der ∞^4 Linienelemente $F = 0$, bei denen vereinigte Lage bewahrt wird. Ich bemerke ausdrücklich, dass diese Theorie *unmittelbar* aus meinen Entwickelungen im fünften Bande der Math. Annalen hervorgeht.

Bei unseren Transformationen kann jede nicht-lineare MONGE'sche Gleichung die Form

$$d\mathfrak{y} - \mathfrak{p}\, d\mathfrak{x} = 0 \tag{i}$$

erhalten, ebenfalls jede nicht-integrable PFAFF'sche Gleichung. Eine integrable PFAFF'sche Gleichung kann nie auf die Form (i), wohl aber auf die Form

$$d\mathfrak{y} = 0$$

gebracht werden.

Gegenüber den von mir eingeführten allgemeinen Transformationen hat daher eine Monge'sche Gleichung nur eine invariante Eigenschaft.

Führt man das Linienelement, wie ich gethan habe, als Raumelement ein, so erhält man eine Geometrie der Linienelemente des Raumes. Diese Geometrie zerfällt aber naturgemäss in zwei Theile. Die elementare Geometrie der Linienelemente betrachtet nur Punkttransformationen des Raumes; ich habe schon früher gezeigt, dass die Verwerthung transcendenter Punkttransformationen zu überraschend einfachen und wichtigen Resultaten führen kann. Die höhere Geometrie der Linienelemente betrachtet solche Transformationen der Linienelemente von MONGE'schen Gleichungen, die in meinen ersten geometrischen Arbeiten eingeführt wurden. Die von mir in dieser Abhandlung wiederholt angekündigten neuen Untersuchungen gehören, so kann ich sagen, zu der höheren Geometrie der Elemente des n-fachen Raumes.

§ 3.

Bestimung der allgemeinsten polaren Beziehung zwischen Linienconplexen.

Im Februar 1869 theilte ich der Gesellschaft der Wissenschaften in Christiana eine Deutung des Imaginären der ebenen Geometrie mit, die für meine sämmtlichen mathematischen Untersuchungen der Ausgangspunkt gewesen ist. In dieser Arbeit brachte ich den Grundgedanken der PLÜCKER'schen Liniengeometrie in Verbindung mit derjenigen geometrischen Deutung einer imaginären Grösse, die man lange ARGAND und GAUSS zugeschrieben hat, während sie factisch schon im Jahre 1797 von ABEL's (und meinem) Landsmanne, dem *Norweger* CASPAR WESSEL der dänischen Gesellschaft der Wissenschaften mitgetheilt wurde [1]).

---

1) CASPAR WESSEL's schöne Arbeit lag in fast hundert Jahren begraben in den Schriften der *dänischen* Ges. d. W. Nachdem der *dänische*

DESCARTES stellte das System zweier *reellen* veränderlichen Grössen durch einen Punkt der Ebene dar, und durch consequente Entwickelung dieser fundamentalen Idee begründete er die analytische Geometrie der Ebene, die als eine sinnliche Darstellung der Algebra zweier *reellen* Grössen aufgefasst werden kann.

Will man für das System zweier *imaginären* Grössen:

$$A = a_1 + a_2 i, \quad C = c_1 + c_2 i$$

eine sinnliche Darstellung schaffen, so muss man als Repräsentant dieses Grössensystems eine reelle geometrische Figur einführen, die von vier reellen Parametern: a_1, a_2, c_1, c_2 abhängt. Den ersten Schritt in dieser Richtung machte v. STAUDT, dessen Arbeiten mir damals unbekannt waren.

Für denjenigen, der sich PLÜCKER's Ideen angeeignet hatte, lag es nahe, eine reelle Raumgerade als Repräsentant des imaginären Grössensystems $A = a_1 + a_2 i$, $C = c_1 + c_2 i$ einzuführen. Zu diesem Zwecke stellte ich nach dem Vorgange WESSEL's die imaginäre Grösse $A = a_1 + a_2 i$ durch den Punkt a_1, a_2 einer Ebene dar, ferner die imaginäre Grösse $C = c_1 + c_2 i$ durch den Punkt c_1, c_2 einer *parallelen* Ebene; sodann *fasste ich die Verbindungslinie dieser beiden Punkte als Repräsentant des imaginären Grössensystems* $A = a_1 + a_2 i$, $C = c_1 + c_2 i$ *auf.*

Bei dieser Gelegenheit brauche ich nicht ausführlich darauf einzugehen, wie die consequente Durchführung dieser einfachen Idee mich zu einer Reihe geometrischer und analytischer Theorien führte, die nicht allein für mich, sondern auch für die Wissenschaft neu waren.

Mathematiker JUEL den Werth dieser Arbeit erkannt hatte, veranlasste ich, dass WESSEL's ursprüngliche Abhandlung in dem norwegischen Archiv for Mathematik reproducirt würde. Es war damals meine ausdrückliche Absicht, sobald wie möglich eine deutsche oder französische Ausgabe dieses Werkes *meines Landsmannes* zu veranstalten. Inzwischen ist eine solche Ausgabe von der dänischen Gesellschaft veröffentlicht worden. Gegenüber diesem Factum erlaube ich mir folgende Data anzuführen. Im Jahre 1797 waren die beiden Königreiche *Norwegen* und *Dänemark* noch unter einem König vereinigt. CASPAR WESSEL war aber, wie JUEL ausdrücklich angiebt, *Norweger*. Die von mehreren *dänischen* Mathematikern besorgte Ausgabe beabsichtigt wahrscheinlicherweise diese Thatsache soweit wie möglich zu eliminiren.

Hier kann ich mich auf die Bemerkung beschränken, dass meine geometrische Deutung der *imaginären Dualität* der Ebene mir ohne weiteres (Februar 1869) eine merkwürdige Kategorie von Berührungstransformationen des Raumes lieferte, die als speciellen Fall diejenige fundamentale Transformation umfasst, die gerade Linien in Kugeln umwandelt.

Diese letztere Berührungstransformation ordnet den Punkten eines Raumes x, y, z die Minimalgeraden[1]) eines anderen Raumes X, Y, Z zu; gleichzeitig werden die Punkte des Raumes X, Y, Z den Geraden eines linearen Liniencomplexes des Raumes x, y, z zugeordnet. Und zwar liegen die Bildpunkte x, y, z aller Minimalgeraden, die durch einen gemeinsamen Punkt X, Y, Z gehen, auf einer Geraden, nämlich auf derjenigen Geraden des linearen Complexes, deren Bildpunkt der betreffende Punkt X, Y, Z ist. Denken wir uns andererseits, dass eine Gerade des linearen Complexes um einen auf ihr gelegenen Punkt x, y, z sich dreht, so beschreibt der Bildpunkt X, Y, Z dieser Complexlinie eine Gerade, nämlich diejenige Minimalgerade, deren Bildpunkt der besprochene Punkt x, y, z ist.

Meine Deutung der imaginären Dualität gab mir drei wesentlich verschiedene Berührungstransformationen zwischen den beiden Räumen x, y, z und X, Y, Z. Diese drei Transformationen besassen einen gemeinsamen Charakter, so verschieden sie auch im Einzelnen waren. In jedem Falle traten zwei Liniencomplexe auf, unter denen der eine im Raume x, y, z gelegen war, während der andere Complex dem Raume X, Y, Z gehörte. *Dabei wurden jedesmal die Punkte des ersten Raumes in die Complexlinien des anderen Raumes und die Complexlinien des ersten Raumes in die Punkte des anderen Raumes übergeführt.* Complexlinien durch einen Punkt entsprachen jedesmal Punkte einer Complexlinie des zweiten Raumes.

In dem zuerst besprochenen Falle war der eine Complex ein linearer, der andere Complex dagegen ein specieller Complex zweiten Grades, dessen Gerade sämmtlich einen Kegelschnitt trafen.

---

4) Als *Minimalgerade* bezeichne ich jede imaginäre Gerade des Raumes, die den PONCELET'schen imaginären Kugelkreis schneidet. Vgl. Verh. d. G. d. W. zu Christiania, 1870 und 1871, sowie Math. Ann. Bd. V.

In dem zweiten Falle waren beide Liniencomplexe vom zweiten Grade, und zwar solche Complexe, die man jetzt gewöhnlich als tetraedrale Complexe bezeichnet.

Im dritten Falle waren beide Complexe specielle lineare Complexe, und die betreffende Berührungstransformation des Raumes war nicht wesentlich verschieden von einer Transformation, die in analytischer Form schon bei Euler, später auch bei Ampère aufgetreten war. Allerdings ist wohl zu beachten, dass Euler und Ampère diese Operation keineswegs als eine Berührungstransformation des Raumes, sondern nur als ein *Hülfsmittel zur Transformation gewisser Differentialgleichungen auffassten.*

Eine jede unter diesen drei Berührungstransformationen bietet ein besonderes Interesse dar. Ja die erstgenannte Transformation, die gerade Linien in Kugeln überführt, hat schon auf die Entwickelung der Geometrie (und der Analysis) einen so grossen Einfluss ausgeübt, dass sie der Poncelet'schen Transformation der reciproken Polaren an die Seite gestellt werden kann. Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, dass die Poncelet'sche Transformation bei Ausdehnung auf n Dimensionen ihr Interesse bewahrt, während meine Transformation bei Ausdehnung auf n Dimensionen ihre wichtigsten Eigenschaften verliert.

Durch Betrachtungen von dieser Art wurde ich schon im Jahre 1871 dazu veranlasst, *alle (algebraischen) Berührungstransformationen des dreifachen Raumes zu suchen, die alle Punkte des Raumes in die Geraden eines Liniencomplexes und alle Geraden eines Liniencomplexes in die Punkte des Raumes transformiren.*

Anders ausgesprochen:

Ich suchte die allgemeinste polare Beziehung:

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(\ldots) = 0$$

zwischen zwei Liniencomplexen.

Bei meiner Behandlung dieses schwierigen und hochinteressanten Problems gelang es mir, einige Schritte vorwärts zu kommen. Durch Betrachtungen, die ich sogleich reproduciren werde, erkannte ich nämlich, dass die Kegel der beiden Liniencomplexe vom ersten oder zweiten Grade sein müssen, oder aber dass sie in Kegel zweiten bez. ersten Grades zerfallen. Da

es mir aber im Jahre 1871 noch nicht gelang, in definitiver Weise alle Liniencomplexe zu bestimmen, deren Complexkegel in Kegel zweiten bez. ersten Grades zerfallen, so sah ich mich damals dazu gezwungen, meine Frage nach den Berührungstransformationen des Raumes, die alle Punkte in ∞^3 Gerade und ∞^3 Gerade in die Punkte des Raumes überführen, nur unter gewissen speciellen Voraussetzungen zu erledigen.

Jetzt steht die Sache anders. Nachdem im ersten Paragraphen dieser Abhandlung alle Linienconplexe bestimmt worden sind, deren Complexkegel zerfallen, bietet die Bestimmung aller Berührungstransformationen des Raumes, bei denen Punkte in Gerade und gewisse ∞^3 Gerade in Punkte übergehen, nicht unüberwindliche Schwierigkeiten. In diesem Paragraphen führe ich diese Bestimmung vollständig durch.

Es ist nicht schwierig, specielle Lösungen unseres Problems anzugeben.

Das System der beiden *bilinearen* Gleichungen:

$$\begin{aligned}&(a_1 x+b_1 y+c_1 z+d_1)X+(a_2 x+b_2 y+c_2 z+d_2)Y\\&+(\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot)Z+(\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot)\ =0\\&(\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z+\delta_1)X+(\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z+\delta_2)Y\\&+(\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot)Z+(\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot)\ =0\end{aligned}$$

ordnet ja offenbar jedem Punkte x, y, z eine Gerade des Raumes X, Y, Z zu und zugleich jedem Punkte X, Y, Z eine Gerade des Raumes x, y, z.

Die bilinearen Gleichungssysteme liefern daher eine Kategorie von Berührungstransformationen, welche Punkte in Gerade und ∞^3 Gerade in die Punkte des Raumes überführen. In dieser Weise erhält man aber nur projective Verallgemeinerungen derjenigen Berührungstransformationen, die ich ursprünglich durch meine reelle Deutung der imaginären Dualität der Ebene gefunden hatte.

Es liegt nichts destoweniger nahe, zu vermuthen, dass ein bilineares Gleichungssystem $\varphi = 0$, $\psi = 0$ die allgemeinste polare Beziehung zwischen zwei Linienconplexen herstellt. So steht aber die Sache nicht. Es ist in der That möglich (und sogar in wesentlich verschiedenen Weisen), eine polare Beziehung zwischen zwei Linienconplexen herzustellen, die nicht durch ein bilineares Gleichungssystem definirt werden kann.

Man nehme z. B. zwei beliebige (algebraische) Developpablen und ordne einer jeden unter den ∞^1 Tangentialebenen der einen Fläche eine Tangentialebene der zweiten zu. Bezieht man sodann die Punkte und Geraden jeder Tangentialebene der ersten Developpable dualistisch auf die Geraden und Punkte der entsprechenden Tangentialebene der zweiten Fläche, so erhält man eine polare Beziehung zwischen den beiden Liniencomplexen, die von den Tangenten dieser developpablen Flächen gebildet werden. Und die Definitionsgleichungen der hiermit definirten Berührungstransformation, die unter Umständen *transcendent* sein kann, sind *niemals bilinear*.

Indem wir jetzt das aufgestellte Problem in Angriff nehmen, erinnern wir zuerst an eine schöne Bemerkung von MALUS, die seinerzeit von mir verallgemeinert und vervollständigt wurde. MALUS ordnet jedem Punkte x, y, z des Raumes eine hindurchgehende Gerade durch Gleichungen:

$$\xi - x = r(\zeta - z), \quad \eta - y = s(\zeta - z)$$

zu, in denen r und s gewisse Functionen von x, y, z bezeichnen. Er betrachtet sodann diejenigen Geraden dieser Schaar, die den Punkten $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ in der Umgebung des Punktes x, y, z zugeordnet sind und untersucht, welche unter diesen Geraden die Gerade des Punktes x, y, z schneiden. Eine einfache Rechnung zeigt ihm, dass diese benachbarten Punkte durch die MONGE'sche Gleichung

$$(r\,dz - dx)\ ds - (s\,dz - dy)\ dr = 0,$$

die vom *zweiten* Grade in den Differentialen dx, dy, dz ist, bestimmt werden. Er zog hieraus den Schluss, dass die gesuchten, dem Punkte x, y, z benachbarten Punkte auf einem *Kegel zweiten Grades* liegen, dessen Spitze der Punkt x, y, z ist.

In meiner früher citirten Arbeit aus dem Jahre 1871 *verallgemeinerte* und *vervollständigte* ich diese schöne Bemerkung von MALUS in der folgenden Weise. Ich betrachtete einen beliebigen Liniencomplex, der in *irgend einer Weise* auf den Punktraum x, y, z abgebildet war. Es werden dann die Geraden des Complexes durch Gleichungen von der Form:

$$r\zeta = \xi - \varrho, \quad s\zeta = \eta - \sigma$$

dargestellt, deren Coefficienten: r, ϱ, s, σ von x, y, z abhängen. Verlangen wir jetzt, dass die beiden benachbarten Complexlinien, deren Bildpunkte die Coordinaten x, y, z und

$$x + dx, \quad y + dy, \quad z + dz$$

besitzen, sich schneiden sollen, so erhalten wir die MONGE'sche Gleichung:

$$dr \cdot d\sigma - d\varrho \cdot ds = 0 ,$$

die in den Differentialen dx, dy, dz vom zweiten Grade ist. *Es giebt immerhin einen Ausnahmefall, in dem diese Monge'sche Gleichung sich auf eine Pfaff'sche Gleichung reducirt. Dies tritt dann und nur dann ein (man vergleiche die Entwickelungen des vorigen Paragraphen), wenn die Geraden des betreffenden Liniencomplexes die Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung sind.* Alsdann werden die charakteristischen Streifen dieser partiellen Differentialgleichung jedesmal von zwei benachbarten Complexlinien g und g' gebildet, die sich schneiden. Alle Flächenelemente eines Streifens liegen somit in einer Ebene, und diese Ebene berührt alle Complexkegel, die unsere Complexlinie g enthalten. Es sind daher alle Complexlinien *singuläre* Gerade, und der Complex selbst besteht aus allen Tangenten einer nicht-developpablen Fläche oder aus allen Treffgeraden einer krummen Curve.

Wir formuliren zuerst das letzte Resultat als Satz:

Satz 1. *Die Geraden eines Liniencomplexes sind dann und nur dann Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, wenn der Complex aus allen Tangenten einer nicht-abwickelbaren Fläche oder aus den Treffgeraden einer krummen Curve besteht.*

Indem wir uns auf diesen Satz stützen, können wir *meine Verallgemeinerung und Vervollständigung des Satzes von Malus*[1]), die ich ursprünglich in anderer Weise begründet hatte, in der folgenden Weise formuliren:

Satz 2. *Wird ein Liniencomplex des Raumes ξ, η, ζ auf den Punktraum x, y, z abgebildet, so drückt sich die Bedingung für das Schneiden zweier benachbarten Complexlinien durch eine Monge'sche Gleichung*

---

1) In meinen Publicationen aus den Jahren 1870—72 wurden MALUS' mir damals unbekannte Betrachtungen nicht citirt.

$$f(x, y, z;\ dx : dy : dz) = 0$$

aus, die im Allgemeinen vom zweiten Grade in den Differentialen dx, dy, dz *sein wird. Besteht aber der Complex aus allen Tangenten einer nicht-abwickelbaren Fläche oder aus allen Secanten einer krummen Curve, so ist die Gleichung:* $f = 0$ *eine nicht-integrable Pfaff'sche Gleichung. Besteht endlich der Complex aus allen Tangenten einer abwickelbaren Fläche oder aus den Secanten einer Geraden, so ist:* $f = 0$ *eine integrable Pfaff'sche Gleichung.*

Wenn wir eben gesagt haben, dass die Bedingung: $f = 0$ für das Schneiden zweier benachbarten Geraden eines Liniencomplexes im Allgemeinen die Form:

$$a\,dx^2 + b\,dy^2 + c\,dz^2 + 2e \cdot dy\,dz + 2f \cdot dz\,dx + 2g \cdot dx\,dy = 0$$

besitzt, so ist wohl zu beachten, dass die Coefficienten $a, b \ldots g$ im Allgemeinen keine eindeutigen Functionen von x, y, z sind, während sie selbstverständlicherweise innerhalb passend gewählter Bereiche eindeutig sein müssen. Nur wenn die Abbildung des betreffenden Complexes auf den Punktraum x, y, z so beschaffen ist, dass jeder Punkt x, y, z nur einer einzigen Complexlinie als Bildpunkt zugeordnet ist, kann man von vornherein behaupten, dass die Coefficienten der Gleichung: $f = 0$ eindeutige Functionen des Ortes sind.

Verbinden wir unsere letzten Ergebnisse mit den Entwickelungen des zweiten Paragraphen, so erhalten wir unmittelbar den folgenden Satz über die allgemeinste polare Beziehung zwischen zwei Liniencomplexen:

Satz 3. *Sind zwei irreducible Liniencomplexe polar auf einander bezogen, so sind drei Fälle möglich.*

1) *Sind beide Complexe nicht-speciell, sind also ihre Geraden weder Tangenten einer Fläche noch Secanten einer Curve, so bilden alle Geraden jedes Complexes, die durch einen Punkt allgemeiner Lage gehen, einen einzigen irreduciblen Kegel zweiten Grades. In diesem Falle sind beide Liniencomplexe algebraisch und vom zweiten Grade.*

2) *Ist der Liniencomplex des Raumes* x, y, z *nicht-speciell, dagegen der Complex des Raumes* X, Y, Z *speciell, so bilden die Complexlinien des Raumes* x, y, z *einen allgemeinen Liniencomplex ersten Grades; dagegen besteht der Complex des Raumes* X, Y, Z *entweder aus allen Tangenten einer nicht-abwickelbaren Fläche*

zweiten Grades oder aus den Secanten eines irreduciblen Kegelschnitts.

3) *Sind beide Liniencomplexe speciell, so bestehen sie alle beide aus den Tangenten einer (transcendenten oder algebraischen) developpablen Fläche, oder aber aus den Secanten einer geraden Linie.*

Schon im Jahre 1871 versuchte ich den hier streng begründeten Satz zu beweisen. So beachtenswerth aber auch meine damaligen Bestrebungen waren, so fehlte mir doch damals (wie ich übrigens in den Verh. d. G. d. W. zu Christiana, 1871, pag. 87 offen zugab) noch die feste Grundlage für diese schwierige Untersuchung.

Wir wollen jetzt der Reihe nach die drei möglichen Fälle durchgehen und alle Berührungstransformationen aufstellen, die unsere Forderungen erfüllen. Dabei erscheint es zweckmässig, zuerst den dritten Fall zu erledigen, sodann den zweiten Fall zu nehmen und endlich zum Schluss den ersten Fall zu discutiren.

Wir nehmen zwei ganz beliebige — algebraische oder transcendente — developpable Flächen und ordnen jeder Ebene der einen Fläche eine Ebene der zweiten zu. Selbstverständlich soll diese Zuordnung durch eine *analytische* Gleichung vermittelt werden. Sodann stellen wir zwischen je zwei entsprechenden Ebenen unserer Developpablen eine *dualistische* Beziehung fest. In dieser Weise ordnen wir jeder Tangente der einen (wie der anderen) developpablen Fläche einen Punkt des anderen Raumes zu, und diese Zuordnung besitzt immer die von uns verlangte charakteristische Eigenschaft: *Punkt und Complexlinie (d. h. Tangente der developpablen Fläche) in vereinigter Lage bilden sich als Complexlinie und Punkt in vereinigter Lage ab.*

Hiermit ist eine ausgedehnte Kategorie von Berührungstransformationen gefunden, die unsere Forderungen erfüllen, und andere Transformationen liefert der dritte Fall offenbar nicht. Wünscht man unter diesen Berührungstransformationen alle ein-eindeutige herauszugreifen, so muss man die beiden developpablen Flächen durch zwei Ebenenbüschel ersetzen. Unter diesen letzteren Transformationen giebt es einige, die durch zwei bilineare Gleichungen definirt werden können.

Jetzt nehmen wir den zweiten Fall mit seinen beiden Unterfällen.

Wir setzen *zuerst* voraus, dass die Complexlinien des Raumes x, y, z einen allgemeinen Complex ersten Grades l bilden, und dass die Complexlinien des Raumes X, Y, Z einen irreduciblen Kegelschnitt K schneiden. Eine derartige polare Beziehung liefert meine so bekannte Berührungstransformation $\mathcal{A}$, die gerade Linien in Kugeln überführt und von mir schon im Februar 1869 entdeckt wurde.

Ist nun L irgend eine andere derartige Berührungstransformation, so können wir ohne wesentliche Beschränkung annehmen, dass L und $\mathcal{A}$ denselben linearen Complex auf denselben Complex zweiten Grades beziehen. Alsdann dürfen wir behaupten, dass die Berührungstransformation:

$$L\mathcal{A}^{-1}$$

eine Punkttransformation P des Raumes x, y, z darstellt, welche die PFAFF'sche Gleichung des linearen Liniencomplexes l in sich transformirt. Es besteht daher die symbolische Gleichung:

$$L\mathcal{A}^{-1} = P$$

oder

$$L = P.\mathcal{A};$$

und in ihr bezeichnen P eine *projective* Transformation, $\mathcal{A}$ meine Berührungstransformation und L die allgemeinste Berührungstransformation, die zwischen einem allgemeinen linearen Complex und dem Complex der Secanten eines irreduciblen Kegelschnitts eine polare Beziehung herstellt.

Die wichtigste Eigenschaft meiner Berührungstransformation $\mathcal{A}$ ist, dass sie Gerade in Kugeln und Haupttangentencurven in Krümmungslinien überführt.

Sodann wollen wir annehmen, dass der Liniencomplex des Raumes x, y, z wiederum ein allgemeiner linearer Complex l ist, dass dagegen der Complex des Raumes X, Y, Z aus allen Tangenten einer nicht-abwickelbaren Fläche zweiten Grades besteht.

Die betreffende Berührungstransformation B führt die Geraden des linearen Complexes l in die Punkte X, Y, Z über; gleichzeitig transformirt sie die Punkte x, y, z in die Tangenten unserer Fläche zweiten Grades. Nun aber giebt es eine zuerst

von DARBOUX untersuchte *Punkt*transformation D, die alle Tangenten einer Fläche zweiten Grades in die Secanten eines Kegelschnittes überführt. Daher können wir eine Berührungstransformation

$$BD$$

bilden, die alle Punkte des Raumes in die Secanten eines Kegelschnittes und die Geraden eines allgemeinen linearen Liniencomplexes in die Punkte des Raumes überführt. Wir können daher die symbolische Gleichung:

$$BD = A$$

oder

$$B = AD^{-1}$$

bilden. *Die gesuchte Berührungstransformation B setzt* sich also aus meiner Berührungstransformation A, DARBOUX's Transformation und projectiven Transformationen zusammen.

In meinen Untersuchungen im Jahre 1871 (Math. Ann. Bd. 5) discutirte ich auch die hier untersuchte Hypothese. Ich begnügte mich aber damals mit der Bemerkung, dass es keine eindeutige Berührungstransformation giebt, die dieser Annahme entspricht.

In den Math. Ann. Bd. 15 betrachtete Herr SCHUR eine Abbildung des linearen Liniencomplexes auf den Punktraum, bei welcher alle Complexlinien durch einen Punkt sich als Punkte einer Geraden abbilden, die eine Fläche zweiten Grades berührt. *Es entging aber seiner Aufmerksamkeit, dass diese Transformation insofern nicht wesentlich neu war, weil sie sich aus meiner Transformation und Darboux's Transformation zusammensetzt.* Auf diesen Umstand lenkte ich die Aufmerksamkeit im Jahre 1882 in den Verh. d. G. d. W. zu Christiania. Gleichzeitig betonte ich, dass *die Berührungstransformation B Haupttangentencurven einer Fläche in nicht-euclidische Krümmungslinien überführt.*

Mir gehört jedenfalls die wichtige Bemerkung, dass *jede* Berührungstransformation B, die zwischen einem allgemeinen linearen Complex und dem Tangentencomplex einer nicht-abwickelbaren Fläche zweiten Grades eine polare Beziehung herstellt, durch die Formel

$$B = AD^{-1}$$

dargestellt wird.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die allgemeinste polare Beziehung zwischen zwei Liniencomplexen zweiten Grades zu be-

stimmen. In meinen früher citirten Arbeiten kam ich zu dem richtigen Resultate, dass jede derartige Zuordnung durch ein bilineares Gleichungssystem definirt wird, und dass dementsprechend beide Geradensysteme *tetraedrale* Complexe sind. Ich werde jetzt auf den recht schwierigen Beweis dieses fundamentalen Satzes ausführlicher eingehen.

Wir wollen annehmen, dass eine polare Beziehung zwischen zwei nicht-speciellen Liniencomplexen zweiten Grades durch die beiden Gleichungen

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(\cdots) = 0$$

definirt ist. Nehmen wir sodann eine Ebene allgemeiner Lage im Raume x, y, z, so sind ihre Punkte Bildpunkte der Geraden eines Strahlensystems S, und da unsere Ebene einen irreduciblen Complexkegelschnitt enthält, und jeder Punkt auf zwei Tangenten dieses Kegelschnittes liegt, so schneidet jede Gerade des Strahlensystems S eine *Brenncurve zweimal.* Das Strahlensystem S besteht also aus den Sehnen einer Raumcurve, und da diese Curve auf ∞^1 Kegeln zweiten Grades gelegen ist, nämlich auf allen Complexkegeln, deren Scheitel auf der Brenncurve liegt, so ist diese Curve eine gewundene Curve dritter Ordnung.

Die Punkte x, y, z jeder Ebene sind somit Bildpunkte der Sehnen einer gewundenen Curve dritter Ordnung. Im Raume X, Y, Z treten ∞^3 derartige Curven auf, die C_3 heissen mögen. Im Raume x, y, z finden wir in entsprechender Weise ∞^3 Curven dritter Ordnung c_3.

Nach PLÜCKER hat jeder allgemeine Liniencomplex zweiten Grades eine algebraische Singularitätenfläche, deren Punkte dadurch charakterisirt sind, dass die zugeordneten Complexkegel zerfallen. Nun muss jede Curve C_3 die Singularitätenfläche des Raumes X, Y, Z mindestens in einem Punkte schneiden, und in diesem Schnittpunkte P_0 sollen die hindurchgehenden Complexlinien zwei Strahlenbüschel bilden. Es bilden aber die hindurchgehenden Sehnen der C_3 einen irreduciblen Kegel zweiten Grades. *Also ist P_0 ein Doppelpunkt* des Complexes, und *alle* hindurchgehenden Geraden sind Complexlinien. Nun aber ist klar, dass unser Complex nur eine begrenzte Anzahl Doppelpunkte (und zwar höchstens vier) haben kann. Also dürfen wir schliessen, dass alle C_3 den Punkt P_0 (wie überhaupt alle Schnittpunkte mit der Singularitätenfläche) gemein haben. Dies folgt

übrigens unmittelbar daraus, dass die Doppelpunkte des Complexes auf allen Complexkegeln liegen, während jede C_3 auf ∞^1 Complexkegeln gelegen ist.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir im Raume x, y, z alle ∞^3 Complexlinien, die eine feste Complexlinie g schneiden. Diese ∞^3 Geraden bilden ein Strahlensystem σ, dessen Gerade zu ∞^1 Complexkegeln und zu ∞^1 Complexkegelschnitten zusammengefasst werden können. Die ∞^3 Bildpunkte aller Strahlen dieses Systems bilden eine Fläche, die von ∞^1 Complexlinien erzeugt wird, und diese Complexlinien gehen durch einen gemeinsamen Punkt Q. Die betreffende Fläche ist somit ein Complexkegel K_0 und dieser Kegel enthält ∞^1 Curven C_3 und gleichzeitig den gemeinsamen Punkt P_0 aller Curven C_3.

Unsere ∞^1 Curven C_3 haben jedenfalls zwei gemeinsame Punkte, nämlich Q und P_0. Schneiden zwei solche C_3 sich in einem weiteren Punkte Π, so leuchtet unmittelbar ein, dass Π ein Doppelpunkt des Complexes und gleichzeitig ein gemeinsamer Punkt aller C_3 sein muss.

Greifen wir nun unter den ∞^1 C_3 zwei beliebige heraus, und construiren wir die beiden Kegel zweiten Grades mit dem Scheitel P_0, die unsere beiden C_3 enthalten, so haben diese Kegel eo ipso *vier* gemeinsame Strahlen, unter denen wir einen, nämlich $P_0 Q$, kennen. Diese Gerade kann ausnahmsweise vierfach zählen; ist dies nicht der Fall, so haben unsere Kegel jedenfalls noch einen gemeinsamen Strahl, und trifft dieser Strahl den Complexkegel K_0 in Ω, so ist Ω ein gemeinsamer Punkt der beiden C_3, gleichzeitig ein Doppelpunkt des Complexes und also liegt Ω auf allen ∞^1 C_3 unseres Complexkegels K_0.

Hier können nun mehrere Fälle eintreten. Der allgemeine Fall ist dadurch charakterisirt, dass die ∞^1 C_3 des Complexkegels K_0 fünf Punkte gemein haben, nämlich die Spitze Q und vier weitere Punkte P_0, P_1, P_2, P_3, die wir als Ecken eines Tetraeders auffassen können. Nach längst bekannten Sätzen schneiden dann die ∞^3 Sehnen unserer ∞^1 C_3 das besprochene Tetraeder nach constantem Doppelverhältnisse. Hieraus folgt, dass in diesem allgemeinen Falle der Liniencomplex des Raumes X, Y, Z ein allgemeiner tetraedraler Complex ist. Fallen einige unter den fünf Punkten $Q_0 P_1 P_2 P_3 P_4$ zusammen, so ist der Complex des Raumes X, Y, Z immer ein tetraetraler Complex, dessen Tetraeder in irgend einer Weise ausgeartet ist.

Hieraus folgt unmittelbar, dass auch der Liniencomplex des Raumes x, y, z ein tetraedraler Complex ist. Nun aber habe ich schon längst gezeigt, dass ein bilineares Gleichungssystem $\varphi = 0$, $\psi = 0$ im Allgemeinen eine polare Beziehung zwischen zwei tetraedralen Liniencomplexen liefert, unter denen der eine Complex ganz beliebig gewählt werden kann.

Hieraus lässt sich nun schliessen, dass jede polare Beziehung zwischen zwei tetraedralen Complexen t und T durch ein bilineares Gleichungssystem vermittelt wird. Den Beweis führen wir einfach in der folgenden Weise.

Zwischen dem Complex t und einem gewissen anderen tetraedralen Complex τ sei durch ein bilineares Gleichungssystem eine polare Beziehung festgestellt, die in der Berührungstransformation $\mathfrak{B}$ ihren analytischen Ausdruck findet. Es sei ferner B diejenige Berührungstransformation, die zwischen den Complexen t und T die polare Beziehung feststellt.

Bilden wir dann die Berührungstransformation

$$B^{-1}\mathfrak{B},$$

so leuchtet ein, dass sie eine Punktransformation ist, und dass sie die Geraden des tetraedralen Complexes T in die Geraden des Complexes τ überführt. Nun aber sind die Ebenen im Raume X, Y, Z die einzigen Flächen, die in doppelter Weise von Geraden des Complexes T erzeugt sind. Durch derartige Betrachtungen erkennen wir, dass die Punkttransformation $B^{-1}\mathfrak{B}$ eine *projective* Transformation P ist. Und hieraus folgt, dass die Berührungstransformation

$$B = \mathfrak{B}P^{-1}$$

durch ein bilineares Gleichungssystem vermittelt werden kann.

Hiermit ist es uns durch Betrachtungen, die im Princip streng sein dürfen, gelungen, die allgemeinste polare Beziehung zwischen zwei *irreduciblen* Liniencomplexen zu bestimmen. Ehe wir unsere Resultate formuliren, wollen wir jedenfalls andeuten, wie sie sich auf reducible Complexe ausdehnen.

Es seien zwei reducible (algebraische) Liniencomplexe c und C polar auf einander durch das Gleichungssystem: $\varphi = 0$, $\psi = 0$ bezogen. Wir nehmen an, dass der Complex c in m irreducible Complexe $c_1 c_2 \dots c_m$ zerfällt, und dass C in entsprechender Weise aus M irreduciblen Complexen $C_1 C_2 \dots C_M$ besteht. Alsdann leuchtet ein, dass die MONGE'sche Gleichung $f = 0$ in m irreducible Gleichungen $f_1 = 0, \dots f_m = 0$ zerfällt und dass dementsprechend die Gleichung $F = 0$ sich in M irreducibile Gleichungen $F_1 = 0, \dots F_M = 0$ zerlegt.

Jetzt können wir einfach von den Complexen $C_2 \dots C_M$ absehen und nur C_1 behalten. Die Bedingung für das Schneiden zweier benachbarter Geraden des Complexes C_1 erhält dann die Form

$$f_{k_1} \cdot f_{k_2} \cdots f_{k_\mu} = 0$$

und dabei sind $k_1 k_2 \dots k_\mu$ einige unter den Zahlen $1, 2 \dots m$. Eine jede unter den Gleichungen $f_{k_i} = 0$ ist die MONGE'sche Gleichung eines irreduciblen Complexes c_{k_i}. Behalten wir jetzt unter den c nur c_{k_1}, so erhalten wir eine polare Beziehung zwischen den beiden irreduciblen Liniencomplexen C_1 und c_{k_1}.

Theorem V. *Sind zwei Liniencomplexe polar auf einander bezogen, so lassen sich alle Möglichkeiten auf die folgenden Fälle reduciren:*

1) *Es können beide Complexe tetraedrale Complexe sein. Die Beziehung kann dann durch ein bilineares Gleichungssystem vermittelt werden.*

2) *Der eine Complex ist ein allgemeiner linearer, der andere besteht aus allen Secanten eines Kegelschnittes. Die Beziehung setzt sich aus meiner bekannten Berührungstransformation, die alle Geraden in Kugeln überführt, und projectiven Transformationen zusammen.*

3) *Der eine Complex ist ein allgemeiner linearer, der andere besteht aus den Tangenten einer nicht-abwickelbaren Fläche zweiten Grades.*

4) *Beide Complexe bestehen aus den Tangenten einer abwickelbaren Fläche.*

5) *Die Geraden des einen Complexes schneiden eine feste Gerade; diejenigen des anderen Complexes sind Tangenten einer abwickelbaren Fläche.*

6) *Beide Complexe sind specielle lineare Complexe. Die Beziehung wird im einfachsten Falle durch eine Berührungstransformation vermittelt, die schon bei Euler und Lagrange auftritt.*

Nur die drei letzten Fälle können auch transcendente Berührungstransformationen liefern.

Ich habe versucht, auch diese Untersuchungen auf n Dimensionen auszudehnen [1]).

---

1) Ich sehe mich dazu veranlasst, nachträglich zu betonen, dass ich in meinen Vorlesungen bei vielen Gelegenheiten hervorgehoben habe, dass der Begriff: *derivirte Gruppe* in der Substitutionentheorie sein Analogon hat.

Zur Erinnerung

an

FRIEDRICH STOHMANN.

Rede

im Auftrage der Königl. Sächs. Gesellschaft
der Wissenschaften

gehalten in der

öffentlichen Gesammtsitzung zur Feier des Todestages Leibnizens
am 13. November 1897

von

Wilhelm Ostwald,
o. M.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1897.

Am 1. November 1897 verschied nach kurzer Krankheit im 65. Lebensjahre Friedrich Stohmann. Er war seit dem April 1891 Mitglied unserer Gesellschaft, deren Schriften eine Reihe von zehn werthvollen Abhandlungen aus seiner Feder enthalten. Noch kurz vor seinem Tode war er mit der Fertigstellung einer elften letzten Arbeit beschäftigt, die er der Gesellschaft vorzulegen gedachte; es ist zu hoffen, dass ihre Ergebnisse uns und der Wissenschaft nicht verloren gehen werden, wenn es ihm auch nicht vergönnt war, sie vollständig abzuschliessen.

Friedrich Stohmann wurde 1832 in Bremen als Sohn eines vermögenden Kaufmannes geboren. Ursprünglich zum praktischen Chemiker und Fabrikleiter bestimmt, hat er, getrieben von der unbezwinglichen Sehnsucht nach der Bethätigung im Gebiete der reinen Wissenschaft, sich unter Mühen und persönlichen Opfern langsam zu einer Stellung durchgearbeitet, welche seinem Ideal entsprach. Nachdem er seine Studien unter Wöhler in Göttingen und unter Hofmann in London gemacht hatte, fand er am letzteren Orte eine Thätigkeit als Assistent bei Graham. Von dort begab er sich in seine Heimath, um eine seinem Vater gehörige chemische Fabrik zu übernehmen, gab wegen widriger Verhältnisse diese Thätigkeit aber bald auf und widmete sich, zuerst als Assistent, dann als Leiter landwirthschaftlicher Versuchsstationen in Celle, Braunschweig, München und Halle Aufgaben, die sich aus der Anwendung der Chemie und Physiologie der Pflanzen und Thiere auf die Landwirthschaft ergaben. Von den zahlreichen Veröffentlichungen aus dieser Periode sei auf die gemeinsam mit Henneberg 1860 und 1864 herausgegebenen »Beiträge zur Begründung einer rationellen Fütterungslehre der

Wiederkäuer« hingewiesen, welche seinen Ruf begründeten und als ein grundlegendes Werk für die Ernährungsphysiologie der Haussäugethiere noch heute angesehen werden müssen.

Ausser dieser umfassenden Arbeit, die er später durch einen 1873 erschienenen Band »Biologische Studien« ergänzte, hat er zahlreiche andere Abhandlungen aus den verschiedensten Gebieten der angewandten Chemie veröffentlicht, deren Gesammtheit ihm einen so hohen Rang unter den Arbeitsgenossen verschafften, dass er 1871 an die Universität Leipzig mit dem Auftrage berufen wurde, ein biologisch-chemisches Laboratorium einzurichten. In diesem konnte er ohne Beschränkung durch die Bedürfnisse der praktischen Tagesarbeit sich der rein wissenschaftlichen Thätigkeit widmen, welche von jeher das höchste Ziel seines Strebens gewesen war, und er hat oft bezeugt, dass er in dieser Richtung mit seinem Leipziger Amt alles erreicht hatte, was er wünschen und hoffen konnte.

Auch die erste Zeit seiner Leipziger Thätigkeit war mit Arbeiten über Ernährung und Stoffwechsel der Thiere ausgefüllt. Aber unwiderstehlich drängte sich ihm die Ueberzeugung auf, dass der Stoffwechsel nur der äussere Rahmen für den viel wichtigeren, ja schliesslich allein massgebenden Energiewechsel im Haushalte der Organismen ist, und aus seiner Wendung auf die hier vorliegenden Probleme hat sich in der Folge seine Zugehörigkeit zu unserer, der reinen Wissenschaft allein gewidmeten Gesellschaft ergeben.

Die Frage nach dem Energiehaushalt der höheren Thiere lässt sich auf verhältnissmässig einfache Formen bringen. Denn da die stickstofffreien Nährstoffe zum allergrössten Theile die gleiche Umwandlung erfahren, welche bei einer Verbrennung im freien Sauerstoff vor sich geht, so ergiebt die Verbrennungswärme dieser Nährstoffe unmittelbar den Gesammtbetrag der dem Organismus aus ihnen zukommenden Energie. Bei den stickstoffhaltigen Nährstoffen entsteht zwar nicht, wie bei der gewöhnlichen Verbrennung, freier Stickstoff, sondern der seinerseits noch einer Oxydation fähige Harnstoff. Doch hier handelt es sich nur noch darum, auch die Verbrennungswärme des Harnstoffs zu messen; zieht man diese von der des stickstoffhaltigen Nährstoffes ab, so ergiebt der (für dieselbe Stickstoffmenge beiderseits) berechnete Unterschied den Betrag der im Organismus verwendeten Energie.

Nun war noch vor zwanzig Jahren unsere Kenntniss dieser Grössen äusserst dürftig. Zwar lagen einerseits schon recht genaue Messungen von Verbrennungswärmen vor, sie bezogen sich aber nur zum kleinen Theil auf die physiologisch wichtigen Stoffe, da diese der Messung grosse Schwierigkeiten entgegensetzten. Andererseits hatte Frankland durch ein besonderes Verfahren die Schwierigkeiten zu überwinden gesucht und eine Reihe von Messungen mitgetheilt; über die Genauigkeit der erhaltenen Ergebnisse war indessen noch kein sicheres Urtheil möglich.

An diesem Punkte griff Stohmann ein. Zunächst entwickelte er die Frankland'sche Methode mit der ihm eigenthümlichen Sorgfalt und Gewissenhaftigkeit, bestimmte die erforderlichen Constanten und führte nach ihr eine grosse Reihe von Messungen aus. Als aber einige Jahre später die von Berthelot und Vieille ausgearbeitete Methode der »calorimetrischen Bombe« sich als ein allseitig brauchbares und zuverlässiges Verfahren erwies, zögerte er nicht, die Möglichkeit einer Prüfung seiner Zahlen alsbald zu benutzen. Nachdem ihm die sächsische Staatsregierung mit gewohnter Bereitwilligkeit für die Unterstützung wissenschaftlicher Arbeiten die erheblichen Mittel zur Beschaffung der kostbaren Apparate und Einrichtungen bewilligt hatte, ging Stohmann nach Paris, um sich vom Erfinder selbst in der Handhabung des Apparates unterrichten zu lassen. Es sollte nicht lange dauern, so übertraf der Schüler den Lehrer; in der That können Stohmann's thermochemische Messungen in ihrer Gesammtheit als die genauesten bezeichnet werden, die in unserer Zeit ausgeführt worden sind.

Mit dem neuen Apparat wurden zunächst die für den Stoff- und Energiewechsel der Thierorganismen massgebenden Werthe nochmals gemessen und wo erforderlich verbessert. Aus dem gewonnenen Zahlenmaterial ergaben sich aber alsbald Schlüsse allgemeinerer Art, und diese Richtung der Arbeit, die Frage nach dem Zusammenhange des Energie-Inhaltes organischer Verbindungen mit deren Zusammensetzung und Constitution, fesselte von nun ab völlig Stohmann's Aufmerksamkeit. In der That verdanken wir ihm einen ganz erheblichen Theil unserer Kenntnisse auf diesem mannigfaltigen und interessanten Gebiete.

Was bis dahin bekannt war, lässt sich wesentlich dahin

zusammenfassen, dass für gleiche Unterschiede der chemischen Zusammensetzung auch gleiche Unterschiede der Verbrennungs- und somit der Bildungswärme auftreten. Diesen Satz in weitem Umfange geprüft und vielfach bestätigt zu haben, ist ein erstes Verdienst Stohmann's.

Doch zeigte sich bald, dass dieses Gesetz nicht streng richtig sein kann. Nach ihm sollte nur die chemische Zusammensetzung für die Verbrennungswärme massgebend sein, so dass isomeren Verbindungen die gleiche Verbrennungswärme zukommen müsste. Die älteren, weniger genauen Messungen liessen in dieser Beziehung keine erheblichen Unterschiede erkennen, und in Stohmann's ersten Abhandlungen tritt unverkennbar die Neigung hervor, beobachtete Unterschiede solcher Art Versuchsfehlern zuzuschreiben. Indessen machte die gesteigerte Genauigkeit der Messungen eine solche Auffassung bald unmöglich und es wurde nothwendig, constitutive Einflüsse anzuerkennen und womöglich ihrerseits gesetzmässig zu begreifen.

Auf diesem weit feineren und schwierigeren Gebiete hat sich unser Forscher bald sicher bewegen gelernt und interessante Ergebnisse erlangt. Das interessanteste unter ihnen ist die völlig neue und unerwartete Entdeckung des Parallelismus zwischen der Verbrennungswärme und der elektrolytischen Dissociationsconstante isomerer organischer Säuren. Zuerst an wenigen Beispielen erkannt, hat diese Beziehung sich durch Stohmann's Bemühungen als sehr allgemein erwiesen, so dass unzweideutige Ausnahmen von ihr noch nicht beobachtet worden sind.

Von weiteren Ergebnissen sind die Gesetzmässigkeiten zu nennen, die sich bei den organischen Aminbasen zeigen, je nachdem die Substitution der Alkyle am Stickstoff oder am Kohlenstoff stattfindet, ferner die sehr bemerkenswerthen Regelmässigkeiten bei der Hydrirung geschlossener Ringe. Den betheiligten Mitgliedern der Gesellschaft werden diese Dinge noch nach den Vorträgen unseres dahingeschiedenen Genossen in persönlicher Erinnerung sein.

Es war nur eine gerechte Anerkennung der Bedeutung dieser Arbeiten, dass unsere Gesellschaft Stohmann 1891 zu ihrem ordentlichen Mitgliede wählte. Von Stohmann, der auf diesen Theil seiner Thätigkeit das grösste Gewicht legte, wurde diese Anerkennung sehr lebhaft empfunden.

Suchen wir schliesslich das Bild der wissenschaftlichen Persönlichkeit Stohmann's uns zu vergegenwärtigen, so wird vielleicht ein Gleichniss dazu am dienlichsten sein. Wie man die optischen Instrumente auf den Typus des Fernrohrs und des Mikroskops zurückführen kann, so lassen sich auch die meisten Naturforscher unter entsprechende Typen bringen. Den einen ist es gegeben, mit umfassendem Weitblick das Ferne zu erschauen und es uns nahe zu bringen; die anderen dringen umgekehrt in die feinen und feinsten Einzelheiten eines engeren Gebietes ein, und nur ganz selten finden sich Naturen, die so reich angelegt sind, dass sie mit beidem wechseln können. Stohmann gehörte durchaus zur zweiten Klasse. Gewissenhaftigkeit und Sorgfalt der Arbeit, unermüdliche Prüfung und Verbesserung der Methoden, um die bestmöglichen Ergebnisse zu erlangen, sind die Eigenschaften, welche vor allem seine Thätigkeit kennzeichnen. Irrthümer sind auch ihm nicht erspart geblieben; aber — und dies ist nicht sein kleinster Ruhmestitel — er ist es fast immer selbst gewesen, der sie entdeckt und verbessert hat.

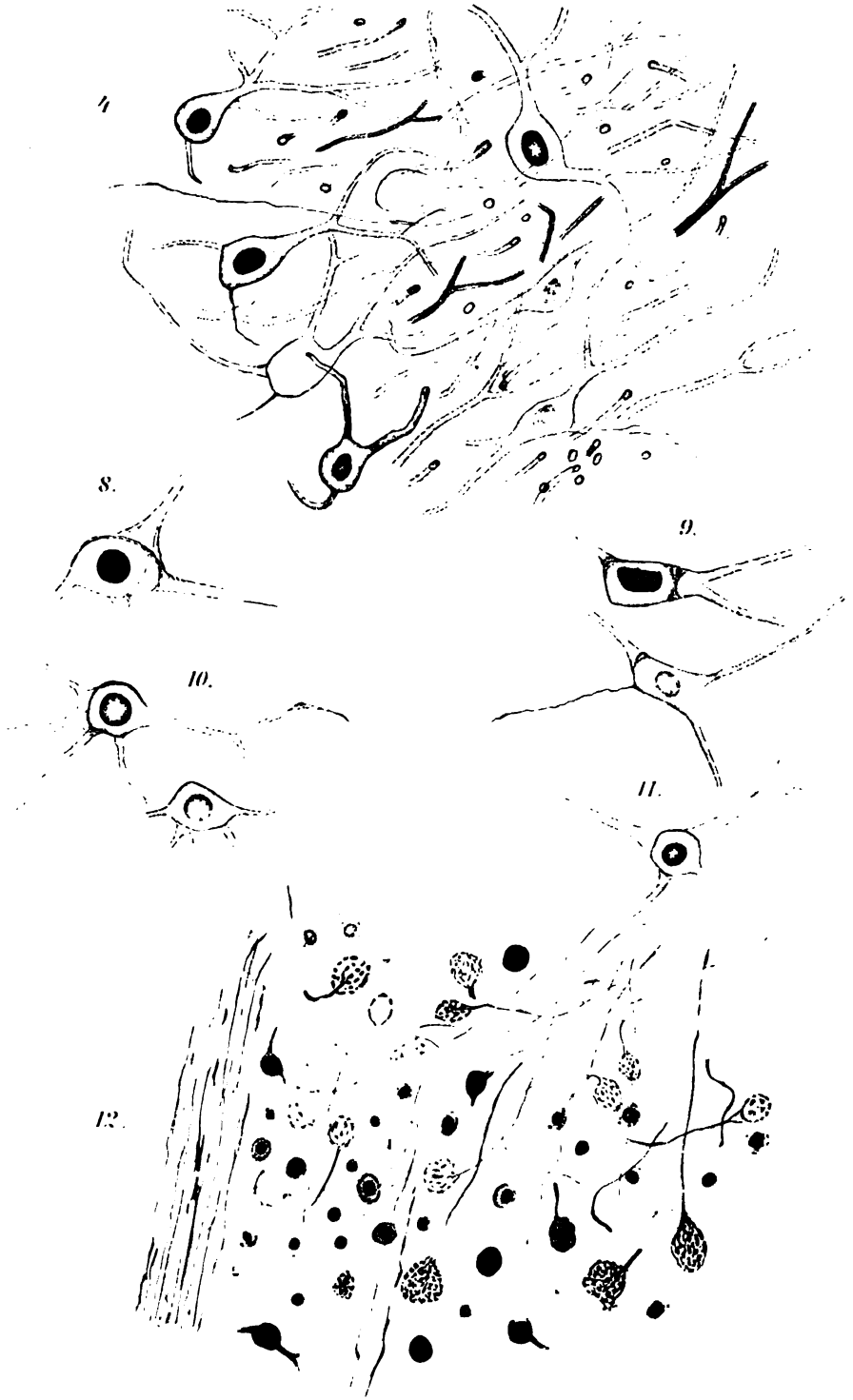
Welche von diesen beiden Begabungen die höhere ist, wer wollte es entscheiden? Wissen wir doch, dass in letzter Linie Mikroskop und Fernrohr auf dem gleichen Princip beruhen: sie erweitern unseren Sehwinkel. So müssen wir allen den Forschern dankbar sein, welche unseren wissenschaftlichen Sehwinkel erweitern, sei es auf dem einen oder dem anderen Wege. Und darum wird die Gesellschaft auch dem geschiedenen Arbeitsgenossen ein treues Andenken bewahren.

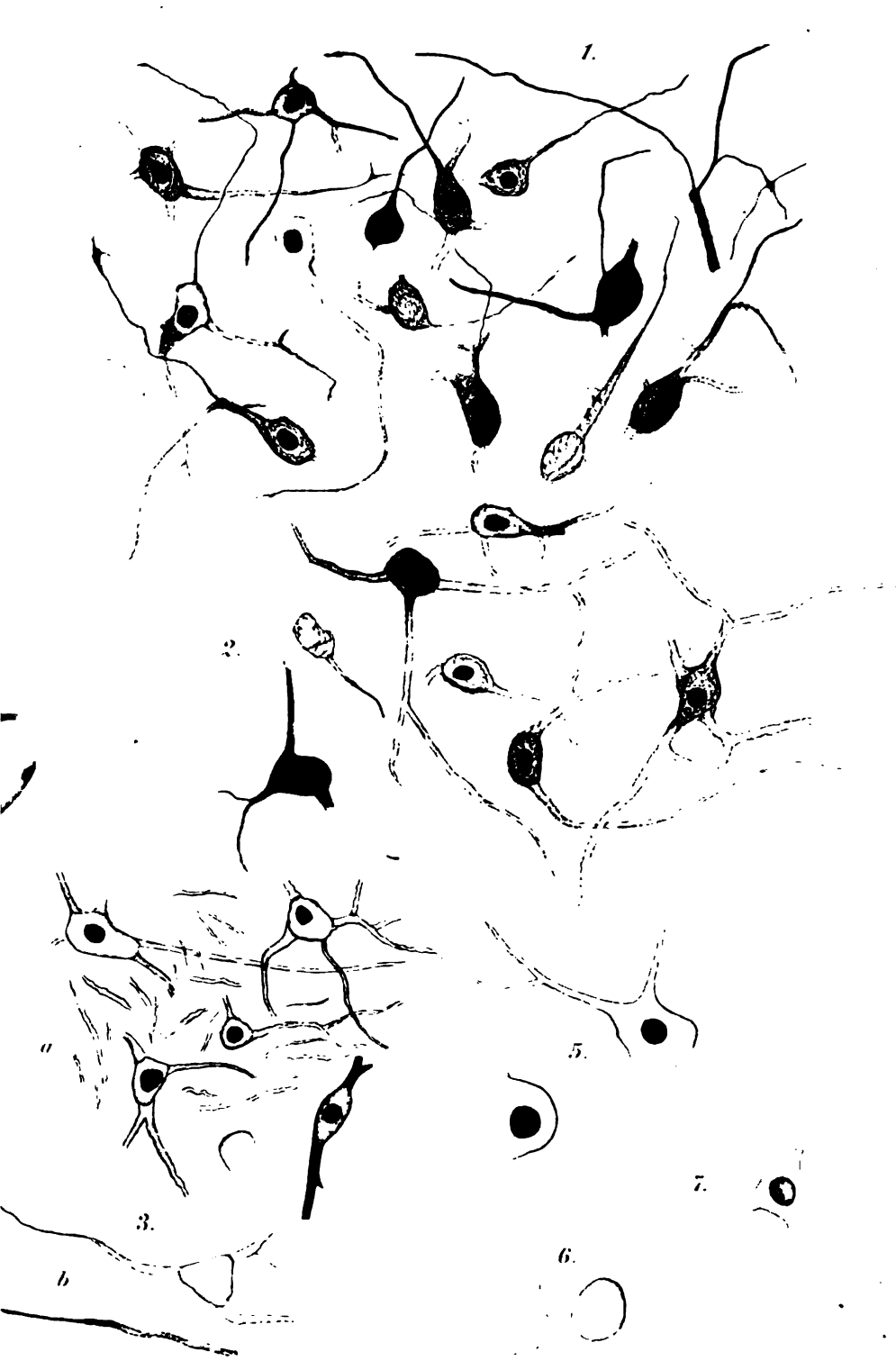
Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

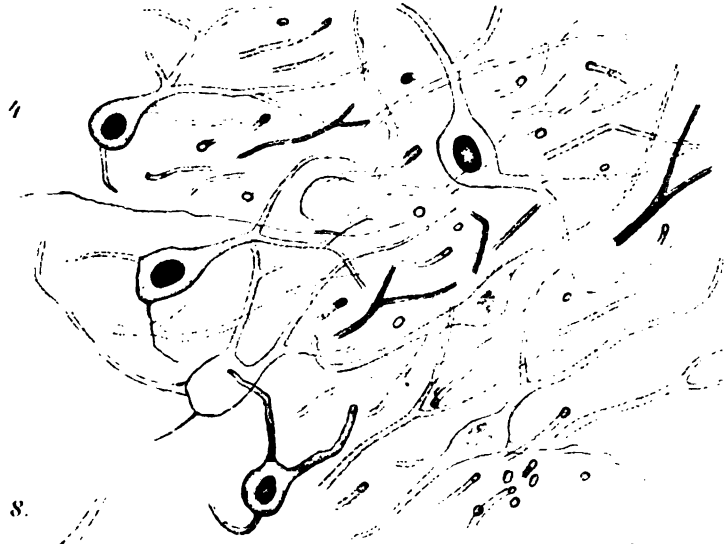
Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

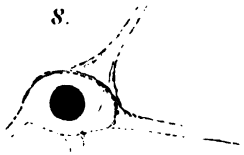
math.phys.Cl. 1897.

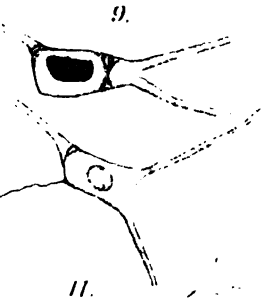
Differentiation der Protoplasma-Fortsätze der Nervenzellen

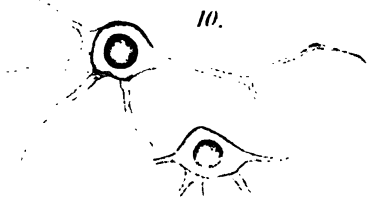

4
8.
9.
10.
11.
12.

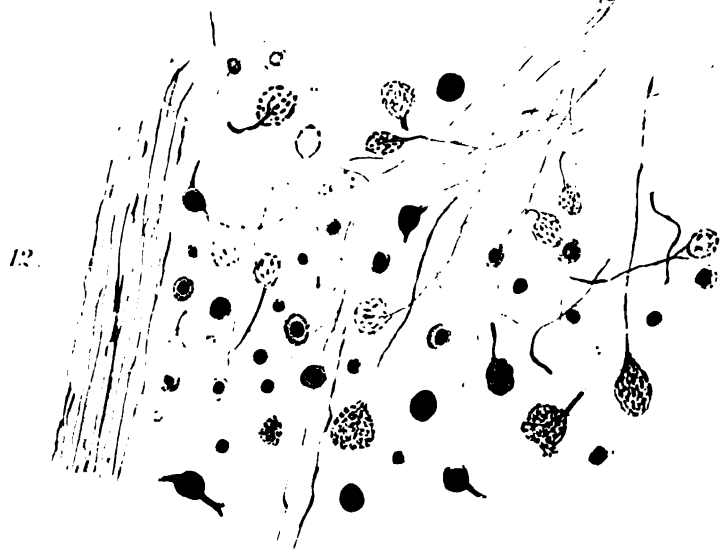

1.
2.
3.
a
b
5.
6.
7.

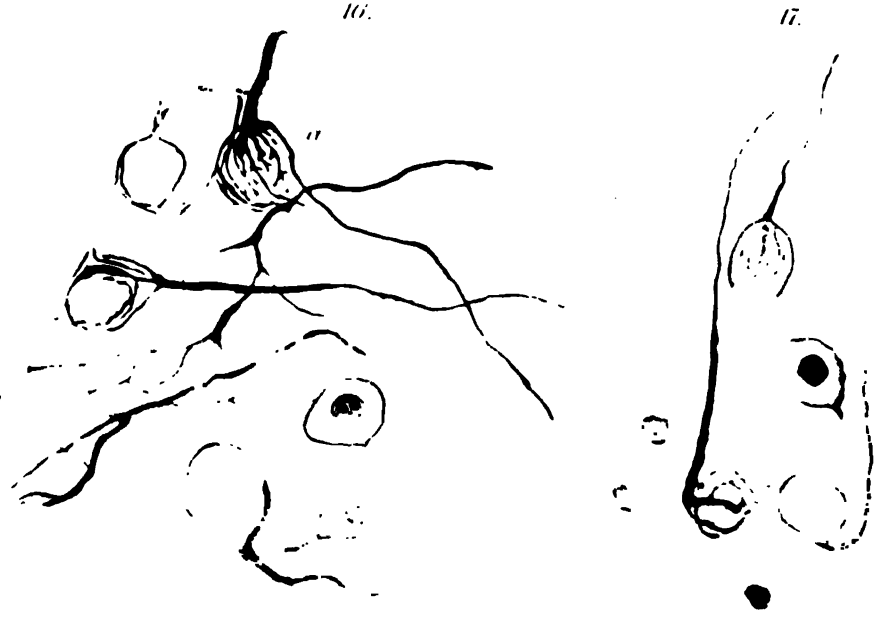






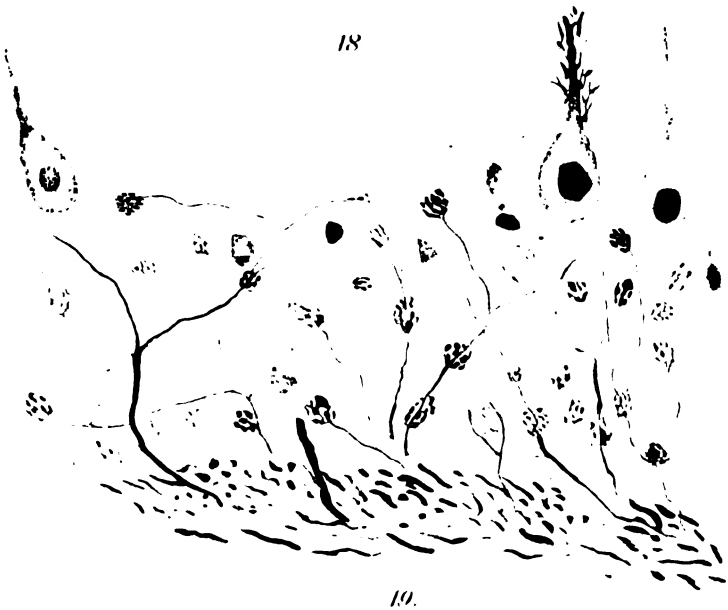






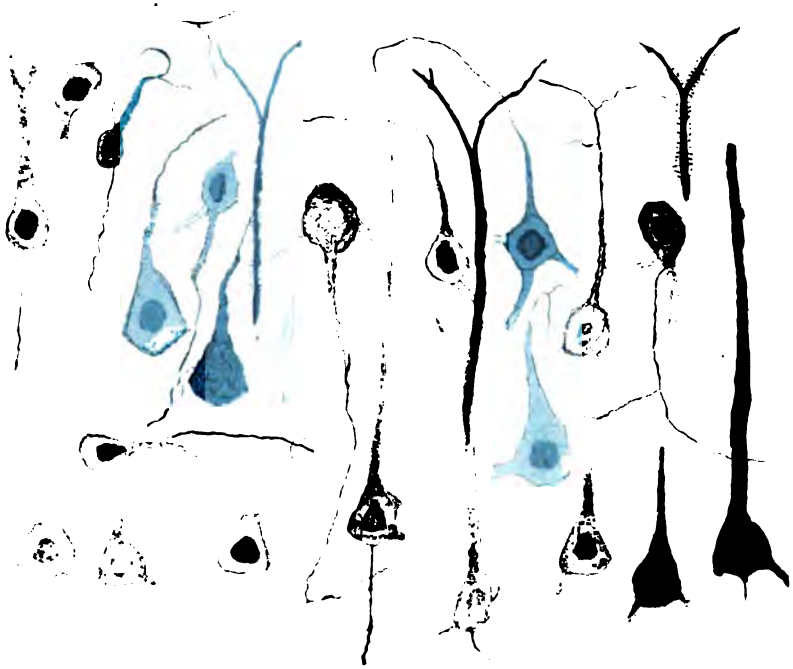
hte d K S Ges d Wiss math phys Cl 1897

18.



19.

20.



This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

DUE AUG 2 1915

DUE MAY 18 1923

DUE OCT 30 1925

DUE NOV 6 1925

DUE DEC 29 1927

4001 4

CANCELLED

JUN 13 1973

JUN 12 '73

3 2044 092 889 344